сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-90-61

С.Н.Солодухин*, М.Н.Тентюков

КВАНТОВАЯ БОЗОННАЯ СТРУНА С ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

---

*Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

1990

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что в теории струн имеются определенные трудности, связанные с заданием динамики гравитационных степеней свободы в двумерной геометрии. Происходят они из-за того, что в чисто римановом описании геометрии мировой поверхности струны (посредством двумерной метрики $g_{\mu\nu}$) единственным подходящим лагранжианом для геометрических степеней свободы, включающим безразмерные константы связи, является скаляр кривизны R. Однако в двумерии этот лагранжиан обращается в полную дивергенцию.

Для того чтобы обойти эту трудность, было предложено расширить риманово описание геометрии стандартной бозонной струны, используя дополнительное скалярное поле /1/. При этом динамика гравитационных степеней свободы описывалась вариантом скалярно-тензорной теории, то есть двумерной гравитацией с переменной гравитационной константой. Целью работы /1/ было получение состоятельной струнной модели в произвольном числе измерений.

Для решения аналогичной задачи в /2, 3/ двумерную геометрию предлагалось описывать не метрикой, а ортонормированным базисом $\bar{h}^a_\mu\,(g_{\mu\nu}=\bar{h}^a_\mu \bar{h}^b_\nu \delta_{ab})$. Рассматривалось следующее модернизированное действие струны:

$$I = \frac{1}{2}\int d^2 z\sqrt{\bar{g}}\,\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu X^i\,\partial_\nu X^i + \frac{\kappa}{4}\int d^2 z\sqrt{\bar{g}}\,\bar{C}^a_{\mu\nu}\bar{C}^{\mu\nu}_a\,, \qquad (1)$$

где $\bar{C}^a_{\mu\nu}=\partial_\mu \bar{h}^a_\nu-\partial_\nu \bar{h}^a_\mu$, а $X^i(z)$, $i = 1, \ldots, D$ — координаты струны в D-мерном пространстве-времени.

При отсутствии второго члена из (1) следуют уравнения минимальной поверхности. В физике элементарных частиц подобное действие рассматривалось впервые в работе /4/ в связи с исследованием нелинейных квантово-полевых моделей Борна — Инфельда.

Дополнительный член в (1) не инвариантен относительно конформных и локальных лоренцевых преобразований репера. В /2/ показано, что вариация этого члена при конформных преобразованиях $\delta\bar{h}^a_\mu=\sigma\bar{h}^a_\mu$ имеет вид конформной аномалии. Таким образом, гравитационную часть (1) можно рассматривать как контрчлен для конформной аномалии. В этом отношении модели /1/ и /2/, по-видимому, эквивалентны /3/.

Заметим, что член $C^a_{\mu\nu}C^{\mu\nu}_a$ в (1) следует понимать именно как квантовую поправку, введение которой позволяет скомпенсировать конформную аномалию. Последнее, в частности, означает, что κ пропорциональна $\hbar$. Если же трактовать этот член как чисто классическое выражение, то будет несовместимость следующего типа. Классические уравнения Лагранжа, получающиеся варьированием (1) по h^a_μ, при свертке с h^a_μ дают $\kappa R = 0$, что возможно только в том случае, если мировая поверхность топологически эквивалентна тору. В общем случае, рассматривая минимум функционала (1) в классе более сложной топологии, приходим к противоречию, что показывает невозможность классической интерпретации члена $C^a_{\mu\nu}C^{\mu\nu}_a$ в (1). Это аналогично невозможности классически интерпретировать λ-член в модели Полякова, когда уравнения движения приводят к $\lambda = 0$.

Цель нашей работы состоит в построении непротиворечивой квантовой теории для действия (1) и, в частности, в сопоставлении двух путей квантования: функционального интегрирования и операторного. При этом под непротиворечивостью мы будем понимать выполнение следующего требования. Как показали Бабелон и Виале /5/, интегрирование по всему пространству калибровочных потенциалов можно провести, выбирая в этом пространстве некоторое сечение, что является выбором системы координат в этом пространстве. Тогда функциональный интеграл, вообще говоря, оказывается функционалом этого сечения. Но в калибровочных теориях, как показано в /5/, эта зависимость тривиальна. Поскольку действие (1) инвариантно относительно группы перепараметризации, этот подход применим и здесь. При этом независимость результата квантования от выбранного сечения и будет условием непротиворечивости квантовой теории модели.

2. ВЫДЕЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ (ФОНА)

Мы начнем с того, что в действии

$$I_0 = \kappa \int d^2 z \sqrt{\bar{g}}\ \frac{1}{4}\bar{C}^a_{\mu\nu}\bar{C}^{\mu\nu}_a \qquad (2)$$

выделим фон h^a_μ так, что потенциал $\bar{h}^a_\mu$ в (2) представляется в виде

$$\bar{h}^a_\mu = e^\sigma \,(h^a_\mu \cos\phi + \epsilon^a_b\, h^b_\mu \sin\phi)\ , \qquad (3)$$

где $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$ — двумерный символ Леви-Чивиты, а σ и ϕ — некоторые скалярные поля.

Сначала рассмотрим конформную часть в (3): $\bar{h}^a_\mu = e^\sigma h^a_\mu$. Тогда

$$I_0[\bar{h}^a_\mu]=I_0[h^a_\mu]+\kappa\int d^2z\sqrt{-g}\,\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma+\frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\sigma R\,, \tag{4}$$

где для скаляра кривизны имеем

$$R=-2\nabla_\mu(h^a_\nu C^{\mu\nu}_a)\,. \tag{5}$$

Лоренцева часть подстановки (3)

$$\bar{h}^a_\mu=h^a_\mu\cos\phi+\epsilon^a_b\,h^b_\mu\sin\phi$$

не изменяет метрики $\bar{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$, но преобразует объекты неголономности $\bar{C}^a_{\mu\nu}$:

$$\bar{C}^a_{\mu\nu}\bar{C}^{\mu\nu}_a=C^a_{\mu\nu}C^{\mu\nu}_a+2g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi+4C^a_{\mu\nu}\epsilon_{ab}\,h^{b\nu}\partial^\mu\phi\,.$$

Таким образом,

$$I_0[\bar{h}^a_\mu]=I_0[h^a_\mu]+\kappa\int d^2z\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+\frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\phi K\,, \tag{6}$$

где

$$K=2\nabla_\mu(h^a_\nu\,\epsilon_{ab}C^{b,\mu\nu})\,. \tag{7}$$

Можно показать, что при конформных преобразованиях фона K преобразуется как

$$K[e^\sigma h^a_\mu]=e^{-2\sigma}K[h^a_\mu]+e^{-2\sigma}\nabla_\mu[h^a_\nu\epsilon_{ab}\,h^{\mu\,b}\nabla^\nu\sigma]\,.$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу ковариантного постоянства величины $\epsilon_{\mu\nu}=\epsilon_{ab}h^a_\mu h^b_\nu$. Следовательно, выражение (6) конформно инвариантно.

Объединяя (4) и (6), приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}I_0[\bar{h}^a_\mu]&=I_0[h^a_\mu]+\kappa\int d^2z\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+\\&+\frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma+\frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\sigma R+\frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{g}\,\phi K\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Оно, очевидно, не зависит от выбора фона, что заключается в симметрии (8) относительно преобразований

$$h^a_\mu\to h^a_\mu e^\alpha\,,$$

$$\sigma\to\sigma-\alpha\,,$$

а также

$$h^a_\mu \to \hat{L}_\beta h^a_\mu ,$$

$$\phi \to \phi - \beta ,$$

где $\hat{L}_\beta$ — оператор лоренцева поворота на угол β.

В случае псевдориманова двумерного многообразия получаем аналогичное выражение:

$$I_0[\bar{h}^a_\mu] = I_0[h^a_\mu] + \frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \\ + \frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\sigma R - \frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\phi K . \tag{9}$$

Его отличие от (8) состоит в обратном знаке пе́ред кинетическим членом для лоренцевой моды.

Вообще говоря, при квантовании двумерной гравитации в действие обычно включают слагаемое с λ-членом:

$$I_\lambda = \lambda\int\sqrt{g}\,d^2z , \qquad I_\lambda[\bar{h}^a_\mu] = \lambda\int\sqrt{g}\,e^{2\sigma}\,d^2z , \tag{10}$$

роль которого состоит в поглощении соответствующих расходимостей. Однако в дальнейшем мы будем полагать, что перенормированная "космологическая константа" λ в (10) равна нулю. Такое предположение вполне естественно, поскольку расходимости подобного вида возникают только в однопетлевом приближении, и более высокие порядки не вносят дополнительных поправок. Более того, при использовании регуляризации с помощью ζ-функции или размерной регуляризации объемные расходимости тождественно равны нулю /6/. Что касается других видов регуляризации, то ранее было показано /7/, что L^2-бесконечности сокращаются при корректном выборе меры интегрирования по функциональному пространству метрик, которая должна включать локальный фактор, пропорциональный некоторой степени $\det h^a_\mu$. Необходимость включения такого локального фактора вытекает из рассмотрения соответствия с каноническим функциональным интегралом /6,7/.

3. КВАНТОВАНИЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Функциональный интеграл для действия (1) имеет вид

$$Z = \int DX^i\,Dh^a_\mu e^{-I} , \tag{11}$$

где в действии I уже проведено выделение фона (8).

Как уже отмечалось, в пространстве потенциалов $\bar{h}^a_\mu$ мы, следуя методу работы [5], выбираем сечение (фон) h^a_μ так, что любой потенциал $\bar{h}^a_\mu$ выражается в виде (3) с точностью до преобразования из группы диффеоморфизмов. Таким образом, сечение представляет собой орбиту, получающуюся из некоторого потенциала $\bar{h}^a_\mu$ действием группы диффеоморфизмов.

Мера интегрирования в пространстве реперов в этом случае равна

$$D\bar{h}^a_\mu = Dv(h^a_\mu)\, D\phi D\sigma \det \hat{L}\,[h^a_\mu],$$

где

$$\det \hat{L}\,[h^a_\mu] = \exp \frac{26}{48\pi} \int \frac{1}{2} R(h)\, G(z,z')\, R(h')\, \sqrt{g}\, d^2z\, d^2z'. \qquad (12)$$

Здесь $G(z,z')$ — это функция Грина:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu G(z,z') = \delta^2(z-z'). \qquad (13)$$

Меру $Dv(h^a_\mu)$ на выделенном сечении можно выбрать в виде $Dv(h^a_\mu) = D\xi^\mu$, то есть интегрирование по сечению сводится к интегрированию по группе диффеоморфизмов.

Далее обычным образом берется интеграл по X^i, учитывая, что в (11) $I_X = I_X[h^a_\mu]$:

$$\int DX^i\, e^{-I_X} = \exp -\frac{D}{48\pi} \int \frac{1}{2} R(h)\, G(z,z')\, R(h')\, \sqrt{g}\, d^2z\, d^2z'. \qquad (14)$$

Теперь в (11) следует взять гауссов интеграл по лоренцевой моде:

$$\int D\phi \exp\left[-\frac{\kappa}{2}\int d^2z \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\kappa}{2}\int d^2z \sqrt{g}\, \phi K\right] =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{48\pi}\int \frac{1}{2} R(h)\, G(z,z')\, R(h')\sqrt{g}\, d^2z\, d^2z' - \frac{\kappa}{4}\int \frac{d^2z\, d^2z'}{2} \sqrt{g}\, K G K'\right\}. \qquad (15)$$

Аналогично берется интеграл по конформной моде:

$$\int D\sigma \exp\left[-\frac{\kappa}{2}\int d^2z \sqrt{g}\, \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{\kappa}{2}\int d^2z \sqrt{g}\, \sigma R\right] =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{48\pi} - \frac{\kappa}{4}\right) \int \frac{d^2z\, d^2z'}{2} \sqrt{g}\, R(h)\, G(z,z')\, R(h'). \qquad (16)$$

Теперь, собирая вместе (12), (14)-(16) и учитывая, что интегрирование по сечению дает объем группы диффеоморфизмов $\int D\xi^\mu = V_{diff}$, получаем

$$Z = \exp - I_{эфф}[h^a_\mu],$$

где эффективное действие для фона

$$I_{эфф}[h^a_\mu] = \frac{\kappa}{4}\int d^2z\sqrt{g}\,C^a_{\mu\nu}C^{\mu\nu}_a + \left(\frac{\kappa}{4} - \frac{24-D}{48\pi}\right)\int\frac{d^2z\,d^2z'}{2}\sqrt{g}\,RGR' + \frac{\kappa}{4}\int\frac{d^2z\,d^2z'}{2}\sqrt{g}\,KGK'. \tag{17}$$

Легко показать, что

$$R[e^\alpha h^a_\mu] = e^{-2\alpha} R[h^a_\mu] - 2e^{-2\alpha}\nabla_\mu\nabla^\mu\alpha, \tag{18}$$

и следовательно, вариация скаляра кривизны относительно бесконечно малого конформного преобразования равна

$$\delta_\alpha R\sqrt{g} = -2\sqrt{g}\,\nabla_\mu\nabla^\mu\alpha,$$

откуда

$$\frac{\delta I_{эфф}}{\delta\alpha} = \frac{24-D}{24\pi}R. \tag{19}$$

Аналогично при бесконечно малом лоренцевом вращении $\delta_\beta h^a_\mu = \epsilon^a_b h^b_\mu \beta$ имеем

$$\delta_\beta K = -2\nabla_\mu\nabla^\mu\beta,$$

следовательно,

$$\delta_\beta I_{эфф} = 0. \tag{20}$$

Таким образом, вообще говоря, функциональный интеграл (11) зависит от выбранного сечения, хотя, как было показано, действие (8) инвариантно относительно замены сечения. Физически это означает нарушение равноправия систем координат в пространстве потенциалов. Однако в случае, если размерность пространства-времени, в которое погружена струна, равна $D=24$, зависимость от сечения, как видно из (19), пропадает, и равноправие систем координат восстанавливается. Интересно, что величина постоянной κ не влияет на полученный результат.

Следует также отметить, что проведение аналогичной процедуры для стандартной бозонной струны[8], которая получится, если взять негравитационную часть действия (1), приводит к следующему выражению для эффективного действия для фона:

$$I_{\text{эфф}}[h^a_\mu] = \frac{D-26}{48\pi}\int \frac{d^2z\,d^2z'}{2}\sqrt{g}\,R\,G\,R'. \tag{21}$$

Видно, что зависимость от фона в (21) пропадает для $D=26$. Этот результат хорошо известен[8].

4. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

При каноническом квантовании системы, описываемой действием (1), следует учитывать, что это — система со связями. Для того чтобы выявить их в явном виде, опять выделим фон h^a_μ. Тогда интересующее нас действие примет вид (см. (9))

$$\begin{aligned} I[\bar{h}^a_\mu] = I_0[h^a_\mu] &+ \frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\partial_\mu\sigma\,\partial^\mu\sigma + \frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\sigma R - \\ &- \frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{\kappa}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\,\phi K + \frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,d^2z\,\partial_\mu X^i\,\partial^\mu X^i . \end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) имеем уравнение движения для полей σ и ϕ:

$$\kappa\,\Box\sigma = \frac{\kappa}{2}R,$$

$$\kappa\,\Box\phi = -\frac{\kappa}{2}K,$$

где $\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$. Или в калибровке $h^a_\mu = \delta^a_\mu$

$$\Box\sigma = 0, \tag{23}$$

$$\Box\phi = 0, \tag{24}$$

где $\Box = \partial^a\partial_a$.

Связи, обусловленные перепараметризационной инвариантностью действия (1), соответствуют уравнениям движения для фона h^a_μ.

Поэтому следует сначала найти вариационную производную $\frac{\delta I}{\delta h^{\nu}_{a}}$, а затем перейти к калибровке $h^a_\mu = \delta^a_\mu$. В результате имеем

$$h^a_\mu \frac{\delta I}{\delta h^\nu_b}\eta_{ab} = \{\partial_\mu X^i \partial_\nu X^i - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^i\} +$$

$$+ \kappa\{\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma + \Box\sigma\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu\sigma\} - \tag{25}$$

$$- \kappa\{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \Box\phi\epsilon_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha\phi\epsilon^\alpha_\nu\},$$

где $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{-;+\}$ — двумерный тензор.

Симметризуя это выражение, получаем

$$T_{\mu\nu} = \{\partial_\mu X^i \partial_\nu X^i - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^i\} +$$

$$+ \kappa\{\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma + \Box\sigma\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu\sigma\} - \tag{26}$$

$$- \kappa\{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\alpha\phi\epsilon^\alpha_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\alpha\phi\epsilon^\alpha_\mu\}.$$

Легко видеть, что антисимметричная часть выражения (25) равна нулю в силу уравнений движения (24). Заметим также, что $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0$ в силу уравнения (23). Таким образом, связи даются уравнением

$$T_{\mu\nu} = 0.$$

Соответствующий набор интегралов движения L_n (заряды Вирасоро) представляются коэффициентами Фурье:

$$L_n = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dz_1\,(T_{00} + T_{01})\,e^{inz_1}. \tag{27}$$

Как следует из (22), канонические импульсы в плоской калибровке имеют вид

$$P_i = \partial_0 X^j \eta_{ij}, \quad P_\sigma = \kappa\partial_0\sigma, \quad P_\phi = -\kappa\partial_0\phi,$$

где $\eta_{ij} = \mathrm{diag}\,(-, +, \ldots, +)$ — D-мерный тензор. Запишем (27) через канонические переменные, то есть

$$L_n = L_n^X + L_n^\sigma + L_n^\phi ,$$

$$L_n^X = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dz_1 \, (\eta^{ij} P_j + \frac{\partial X^i}{\partial z^1})^2 e^{inz_1} , \tag{28}$$

$$L_n^\sigma = \frac{\kappa}{4} \int_0^{2\pi} dz_1 (\frac{1}{\kappa} P_\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z^1})^2 e^{inz_1} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dz_1 (\frac{\partial P_\sigma}{\partial z_1} + \kappa \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z_1^2}) e^{inz_1} , \tag{29}$$

$$L_n^\phi = -\frac{\kappa}{4} \int_0^{2\pi} dz_1 \, (-\frac{1}{\kappa} P_\phi + \frac{\partial \phi}{\partial z_1})^2 e^{inz_1} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dz_1 (\frac{\partial P_\phi}{\partial z^1} - \kappa \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_1^2}) e^{inz_1} . \tag{30}$$

Относительно скобок Пуассона эти величины образуют алгебру:

$$\{L_n^X , L_m^X\} = i\,(m-n)\, L_{n+m}^X ; \tag{31}$$

$$\{L_n^\sigma , L_m^\sigma\} = i\,(m-n)\, L_{n+m}^\sigma - i\pi\kappa n^3 \delta_{n,-m} , \tag{32}$$

$$\{L_n^\phi , L_m^\phi\} = i\,(m-n)\, L_{n+m}^\phi + i\pi\kappa n^3 \delta_{n,-m} . \tag{33}$$

Таким образом, связи (27) образуют алгебру

$$\{L_n , L_m\} = i\,(m-n)\, L_{n+m} .$$

Подобная алгебра связей впервые была получена в работе [4]. Квантование проводится стандартным образом [9] заменой скобок Пуассона на коммутаторы операторов:

$$[\,\hat{X}^i (z) , \hat{P}_j (y)] = i\delta(z-y) ,$$

$$[\,\hat{\phi}(z) , \hat{P}_\phi (y)] = i\delta(z-y) ,$$

$$[\,\hat{\sigma}(z) , \hat{P}_\sigma (y)] = i\delta(z-y) .$$

Рассматривая нормальное упорядочение для (28)-(30) и применяя технику [9], получаем алгебру операторов:

$$[\,L_n^X , L_m^X] = (n-m)\, L_{n+m}^X + \frac{D}{12} n\,(n^2-1)\, \delta_{n,-m} , \tag{34}$$

$$[L^{\sigma}_n, L^{\sigma}_m] = (n-m)\, L^{\sigma}_{n+m} + [\frac{n(n^2-1)}{12} + cn^3]\, \delta_{n,-m}, \qquad (35)$$

$$[L^{\phi}_n, L^{\phi}_m] = (n-m)\, L^{\phi}_{n+m} + [\frac{n(n^2-1)}{12} - cn^3]\, \delta_{n,-m}, \qquad (36)$$

где величина c совпадает с классическим значением $c = \pi\kappa$.

При квантовании системы со связями в действие необходимо ввести духи /10,11/ с соответствующим вкладом в связи (27). Теперь $L_n = L^X_n + L^{\sigma}_n + L^{\phi}_n + L^{gh}_n$, где для вклада духов имеем

$$[L^{gh}_n, L^{gh}_m] = (n-m)\, L^{gh}_{n+m} + (-\frac{26}{12} n^3 + \frac{2}{12} n)\, \delta_{n,-m}.$$

Таким образом, переходя к ренормализации /11/ $L_n \to L_n - \beta\delta_{n,0}$, получаем алгебру связей (27) на квантовом уровне:

$$[L_n L_m] = (n-m)\, L_{n+m} + [\frac{(D-24)}{12} n^3 + \frac{(24\beta - D)}{12} n]\, \delta_{n,-m}. \qquad (37)$$

Квантовая алгебра связей замыкается, если

$D = 24, \quad \beta = 1.$

На языке БРСТ-квантования это означает нильпотентность оператора БРСТ-заряда $\hat{Q}$ /10-11/ и возможность корректного наложения условия на физические векторы состояния:

$$\hat{Q}\,\Phi = 0. \qquad (38)$$

Это условие в случае струны Полякова гарантирует отсутствие состояний с отрицательной нормой. Заметим, что в нашем случае одна из гравитационных степеней свободы, либо σ, либо ϕ, в зависимости от знака κ является духом и приводит к дополнительным по сравнению с действием Полякова состояниям с отрицательной нормой. Фактически это эквивалентно тому, что в модели Полякова имелось бы две времениподобные координаты D-мерного пространства, и не очевидно, что условие (38) гарантирует отсутствие духов в этом случае.

Заметим, что в (22) можно, вообще говоря, включить λ-член с соответствующим изменением связей (26). Конформная мода в этом случае удовлетворяет уравнению Лиувилля

$\kappa \Box \sigma = 2\lambda e^{2\sigma}$.

По-видимому, имеются определенные трудности в квантовании модели Лиувилля, что отражается в неоднозначности получаемых здесь результатов [12–15]. Заметим, что в присутствии λ-члена конформная часть связи L_n^σ удовлетворяет той же алгебре (38), что и без него. При квантовании эта алгебра переходит в (35), где согласно [11–12] константа c приобретает квантовые поправки. С другой стороны, согласно [14] имеется произвол, которым можно воспользоваться для того, чтобы зафиксировать c на его классическом значении. Тот же результат получается при переходе от величины σ, удовлетворяющей уравнению Лиувилля, к полю ψ, удовлетворяющему свободному уравнению, через преобразование Бэклунда [15]. Если же теперь квантовать свободное поле ψ вместо σ, то для $L_n^\psi = L_n^\sigma$ получается квантовая алгебра (35) с $c = \kappa\pi$.Таким образом, и в присутствии λ-члена получается тот же результат (37).

Отметим, что два способа квантования модели (1) приводят к одному значению для размерности пространства-времени D =24, которое не зависит от величины постоянной κ, что, вообще говоря, с самого начала не было очевидно.

В работах [1,2] было найдено, что конформная аномалия в моделях типа (1) с динамической геометрией может быть устранена подходящим выбором постоянной κ. Однако там же была установлена неэквивалентность канонического квантования и квантования методом функционального интегрирования, в которых значения κ не совпадают. Отличие полученного выше результата связано, по-видимому, с иной трактовкой конформных преобразований и аномалии, возникающих в данном подходе из вейлевской свободы в выборе геометрического фона, которая должна сохраняться как на классическом, так и на квантовом уровне.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует отметить ряд особенностей вычисления детерминантов (12) и (14). Это вычисление проводится методом интегрирования конформной аномалии [16], которая в двумерии имеет вид

$$\int \sqrt{g}\,(\alpha R + \lambda)\, d^2 z\,, \tag{39}$$

где α — постоянная, зависящая от вида оператора.

С точки зрения когомологии групп аномалия является 1-коциклом. Причем существенны только нетривиальные аномалии, которые не являются, в свою очередь, когранцей. Между тем λ-член в (39) — именно такая тривиальная аномалия, которую можно ликвидировать переопределением соответствующего детерминанта, фактически добавляя в эффективное действие соответствующий контрчлен. Так что результат будет совпадать с (12) и (14), то есть будет тем же, что и без λ-члена.

С другой стороны, интегрирование нетривиальной аномалии в (39) подразумевает, что в результате получается действие, вариации которого при конформных преобразованиях метрики дает скаляр кривизны R. Если оставаться в рамках только метрики, получится нелокальное действие

$$\alpha \int R G(z,z') R' \sqrt{g}\, d^2z d^2z' ,$$

Однако локальное действие $C^a_{\mu\nu}C^{\mu\nu}_a$, так же как и скалярно-тензорная модель /1/, дает вариацию, пропорциональную R. Поэтому интегрирование аномалии (39) не является, вообще говоря, однозначным и зависит от того, в рамках какого набора полей оно производится. Возможно, что интегрирование конформной аномалии в случае вейлевских фермионов, то есть когда репер h^a_μ более естественен, чем метрика, дает выражение $C^a_{\mu\nu}C^{\mu\nu}_a$. В таком случае модель (1) можно было бы считать некоторой эффективной моделью фермионов.

Авторы выражают благодарность профессору Д.Д.Иваненко и Ю.Н.Обухову за большую помощь в получении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marnelius R. — Nucl.Phys., 1983, B211, p.14.
2. Назаровский Е.А., Обухов Ю.Н. — ДАН СССР, 1987, 297, с.334.
3. Hwang S., Marnelius R. — Nucl.Phys., 1986, B271, p. 369.
4. Барбашов Б.М., Черников Н.А. — ЖЭТФ, 1966, 60, вып.5, с.1296.
5. Babelon O., Viallet C. — Phys.Lett., 1979, B85, p. 246.
6. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. — Ann.Phys. (N.Y.), 1982, 143, p. 413.
7. Fradkin E.S., Vilkovitsky C.A. — Phys.Rev., 1973, D8, p.4241.
8. Polyakov A.M. — Phys.Lett., 1981, B105, p.207.
9. Scherk J. — Rev.Mod.Phys., 1975, 47, p.123.
10. Kato M., Ogawa K. — Nucl.Phys., 1983, B212, p.443.
11. Hwang S. — Phys.Rev., 1983, D28, p.2614.
12. Curtriht T.L., Thorn C.B. — Phys.Rev.Lett., 1982, 48, p.1309.
13. Braaten E., Curtright T.L., Thorn C. — Ann.Phys. (N.Y.), 1983, 147, p.365.
14. Otto H.J., Weight G. — Z.Phys., 1986, C31, p.219.
15. Johanson L., Marnelius R. — Phys.Rev., 1985, D32, p.1445.
16. Alvarez O. Nucl.Phys., 1983, B216, p.125.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1990 года.