сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-90-525

Н.В.Махалдиани

К ДИНАМИКЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

1990

Природа в широком диапазоне масштабов описывается моделью пространства в виде трехмерного многообразия[1,2].

Математические теории, призванные описывать единым образом все виды материи и взаимодействий[3], естественно задаются в 10- или 11-мерном пространстве-времени (супергравитация) или 10 (суперструна)- и 26 (бозонная струна)-мерном пространстве-времени. Если эти модели соответствуют реальности, они должны описывать явления на масштабах порядка планковских (10^{-33} см). На масштабах электрослабого взаимодействия (10^{-16} см) пространство-время задается в виде четырехмерного пвсевдоевклидова многообразия Минковского. На масштабе адронизации (10^{-13} см) взаимодействие между кварками и глюонами сильное, и адронная материя, видимо, организуется в виде двумерного пространственно-временного объекта — адронной струны[4]. Динамическое явление запирания кварков и глюонов внутри адронов кинематически можно оформить утверждением, что пространство, занимаемое кварк-глюонной материей на масштабах, превосходящих масштаб адронизации, представляет собой пульмерное пространство — набор точечных адронов[5].

Для космологических теорий, кроме стандартных моделей трехмерного пространства, иногда рассматривают двумерные[6] и многомерные[7] пространства. Структура скоплений галактик в кластерах[8] указывает на переменное значение размерности пространства в разных областях Вселенной и/или на след переменного, флюктуирующего значения размерности пространства на ранних этапах эволюции Вселенной[9].

В окрестности критической точки фазовых переходов второго рода поведение вещества описывается моделями (евклидовой) квантовой теории поля[10,11]. Функции Грина (корреляторы моделей статфизики) в окрестности неподвижной точки преобразований ренормализационной группы описываются конечным числом аномальных размерностей (критических индексов) и представляют собой (самоподобные) фракталы, т.к. классическая, каноническая, и динамическая размерности отличаются. Возможно, фрактальная геометрия окажется адекватным языком квантовой теории поля.

Классическую нелинейную динамику также можно сформулировать[12] на языке функциональных интегралов[13,14]. Явления перемежаемости[15] можно описать с помощью квазиклассического приближения с сильной связью[16]. При этом в отличие от квазиклассики со слабой связью, когда основной вклад дается классическими волновыми процессами, существенны классические механические объекты, частицы, струны (вихри) и т.д. Траектории нелинейных (конечно-мерных) эволюционных систем в хаотическом режиме описывают некоторые множества с фрактальными (нецелочисленными) размерностями (странные аттракторы[17]). Для малых интервалов времени дифференциальные системы уравнений описывают некоторые многообразия с целочисленной размерностью. Для больших интервалов времени траектории ложатся на многообразия с фрактальной размерностью. Следовательно, при переходе от малых масштабов времени к большим, размерность множества состояний меняется. На языке функциональной формулировки это означает, что для больших масштабов времени локальный минимум эффективного действия достигается на множестве с нецелочисленной размерностью. Естественно с самого начала в функциональном интеграле суммировать по состояниям со всевозможными размерностями. Например, для состояний поверхности струны рассматривать не только структуры многообразий с фиксированным конечным числом ручек (заданный порядок теорий возмущений), но и состояний с бесконечным числом ручек, которым соответствуют фрактальные поверхности с, вообще говоря, нецелочисленной размерностью. В зависимости от внешних условий, от разрешающей способности, скорости системы отсчета и т.д. в производящий функционал могут давать доминирующий вклад состояния с разной размерностью (методический пример см. в приложении 1).

Ряд явлений, таких, как конвекция, агрегация[18], характеристики множественного рождения в физике высоких энергий[19] и других, описываются понятием мультифрактала, которому соответствует бесконечное количество критических индексов[20]. Возможно, квантовая теория протяженных частиц, струн, мешков и т.д. соответствует мультифракталам и окажется полезной для описания этих явлений.

Словом, из вышесказанного следует важность развития математических моделей пространства, меняющих размерность с изменением масштаба и/или других внешних параметров, температуры, плотности вещества и т.д., для создания единой картины Природы.

В данной работе вводится понятие динамической размерности пространства, которое может меняться в зависимости от разрешающей способности и от точки к точке в объемлющем пространстве-времени — локальное поле размерности пространства. В качестве примера изучается иерархическая решетка Келли — Бете*.

---

*Основные результаты данной работы доложены на втором семинаре памяти Р.Фейнмана (Дубна, 15 февраля 1990 г.) и на первом минисимпозиуме по p-адическим теориям, (Москва, МИ АН СССР, 5 марта 1990 г.).

2. Рассмотрим вопрос динамики размерности в квантовой теории гравитации (геометрии) и полей материи. Основной объект квантовой теории, производящий (все остальное) функционал, имеет вид

$$Z = \int dg\, e^{-S[g]} \int d\phi\, e^{-S[\phi,\, g]}, \tag{1}$$

где g — метрика, задающая геометрию; ϕ — материальные поля.

Например, в теории струны [21],

$$S[x,g] = \frac{1}{2}\int d^2\zeta \sqrt{g}\, g^{ab}\, \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu(\zeta)\, G_{\mu\nu}(x),$$
$$S[g] = \alpha \int d^2\zeta \sqrt{g} + \beta \int d^2\zeta \sqrt{g}\, R, \tag{2}$$

где x^μ — координаты поверхности струны, в объемлющем пространстве с метрикой (внешнего, фонового, гравитационного поля) $G_{\mu\nu}(x)$ — играют роль материальных полей; g_{ab} — метрика на мировой поверхности струны.

Если нас интересует только динамика геометрии, можно взять функциональный интеграл в (1) по материальным полям и построить эффективное действие для динамики геометрии

$$Z = \int dg\, e^{-S_{eff}[g]}, \tag{3}$$

где

$$S_{eff} = S[g] + s[g],$$

$$s[g] = -\ln \int d\phi\, e^{-S[\phi,\, g]}.$$

Если нас интересует лишь динамика некоторых характеристик, например, размерности пространства, то можем взять интеграл по всем другим характеристикам с помощью известного приема с единицей,

$$1 = \int d\text{đ}(x)\, \delta(\text{đ}(x) - F[g]), \tag{4}$$

что в данном случае обозначает тот факт, или предположение, что в (почти) каждой точке объемлющего пространства рассматриваемое множество имеет некоторую, определенную динамикой размерность $\text{đ}(x)$. Подставив (4) в (3) и поменяв порядок интегрирования по g и đ, получим

$$Z = \int dg \int d\text{đ}\, \delta(\text{đ}(x) - F[g])\, e^{-S_{eff}[g]} =$$

$$= \int d\mathrm{d}(x)\, e^{-S_{eff}[\mathrm{d}]}, \quad (5)$$

где $\mathrm{d} = \mathrm{d}(x)$ — поле размерности пространства.

Обычно предполагают, что $\mathrm{d} = 4$ — размерность пространства-времени. Это имеет место, если у $S_{eff}[\mathrm{d}]$ имеется (локальный) минимум при $\mathrm{d} = 4$ (например, в случае квантовой теории поля со слабой нелинейностью).

В случае теории струны, действие (2) квадратично по полям материи, поэтому интеграл по ним берется в замкнутом виде,

$$s[g] = \frac{d}{2}\,\mathrm{tr}\ln\Delta, \quad (6)$$

где d — размерность объемлющего пространства-времени; для замкнутых римановых поверхностей без границы,

$$\Delta = -\partial_a\,(g^{ab} G_{\mu\nu}\,\partial_b). \quad (7)$$

Здесь, вообще говоря, следовало бы рассматривать всевозможные геометрии, задаваемые фоновой метрикой $G_{\mu\nu}$,

$$Z = \int dG\, e^{-S[G]} \int dg\,dx\, e^{-(S[g] + S[x,g])}. \quad (8)$$

После взятия интеграла по x получим

$$Z = \int dG\, e^{-S_{eff}[G]} \simeq$$

$$\simeq \sum_{G_i} e^{-S_{eff}[G_i]}, \quad (9)$$

где G_i описывают геометрии внешних пространств, на которых эффективное действие достигает локальных минимумов. На сегодня известно много представителей из множества $\{G_i\}$ [22], которым соответствуют разные, в том числе нецелочисленные, размерности внешнего пространства.

В принципе, следуя схеме вычислений (8), (9), можем найти геометрию G_0, на которой достигается абсолютный минимум. Эта геометрия может меняться в зависимости от масштаба и/или других внешних параметров. Для численных расчетов удобно применять дискретизацию Редже [23, 24, 5], в которой все геометрические характеристики выражаются через длины ребер, соединяющих соседние узлы решетки. Рассмотрев наравне с действительной (архимедовой) метрикой p-адические (неархимедовы) метрики [25], мы получим формализм, позволяющий

обсуждать фазовые переходы между разными числовыми полями (и соответствующими геометриями) [26]. Например, в качестве g можно взять p-адические, а для G — действительные метрики. Для простых моделей статистической физики на самоподобных (иерархических) решетках показано, что имеется гладкий переход от иерархической (фрактальной, p-адической) структуры на малых масштабах к трансляционно-инвариантной структуре (многообразия) на больших расстояниях [27, 28].

Поведение динамических систем в фазе хаоса (сильная связь) сложно. Грубой характеристикой фазового портрета динамики является глобальная фрактальная размерность. Более тонкой характеристикой является локальная размерность. В принципе, в определении значений локальной размерности имеется неопределенность, которую можно скомпенсировать с помощью взаимодействия. Если мы изучаем подмножество риманова пространства, характеризуемого полем размерности $\mathrm{d}(x)$, то эффективное действие для этого поля может иметь вид

$$S = \int d^n x \sqrt{G}\, \mathfrak{L}(G^{\mu\nu}, D_\mu \mathrm{d}), \quad (10)$$

где $D_\mu \mathrm{d} = (\partial_\mu - A_\mu)\,\mathrm{d}(x)$, $G = |\det G_{\mu\nu}|$, x^μ — координаты, принимающие значения из объемлющего n-мерного пространства с метрикой $G_{\mu\nu}$. При преобразованиях

$$\mathrm{d}(x) \to \lambda(x)\,\mathrm{d}(x),$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \lambda^{-1}\partial_\mu\lambda, \quad (11)$$

$$G^{\mu\nu} \to \lambda^{2a} G^{\mu\nu}, \quad a = \frac{2}{n-2}$$

действие

$$S = \int d^n x \sqrt{G}\, G^{\mu\nu} D_\mu \mathrm{d}\, D_\nu \mathrm{d} \quad (12)$$

инвариантно. Преобразование метрики (11) соответствует масштабному преобразованию

$$x^\mu \to \lambda^a x^\mu. \quad (13)$$

Действие для векторного поля A_μ можно выбрать в виде

$$S[A] = \frac{1}{4e^2} \int d^n x \sqrt{G}\, G^{\mu\nu} G^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}, \quad (14)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Последнее инвариантно относительно преобразований (11), при $n = 4$, $(a = 1)$ (см. приложение 2), что указывает на выделенность этого значения размерности для объемлющего, математического пространства-времени. Заметим, что инвариантность относительно преобразования (11) имеет место также для действия [29]

$$S = \int d^n x \sqrt{G} \{G^{\mu\nu} \partial_\mu ḋ \partial_\nu ḋ + \xi R ḋ^2\},$$

где R —скалярная кривизна,

$$\xi = \frac{(n-2)(n-1)}{4}.$$

Согласно данному построению, мы можем фиксировать значение ḋ, например, ḋ = 3,99, выбором калибровки $\lambda(x)$. Для простых фазовых портретов это будет удобно. В случае сложной структуры выбором соответствующего ḋ(x) можно адекватно описать характерную геометрию данной структуры. При этом поле взаимодействия A_μ будет слабым, и по нему можно будет строить теорию возмущений. Наоборот, если произвольно фиксировать поле размерности, то взаимодействие будет сильным, и мы не сможем использовать теорию возмущений. Так обстоит дело в квантовой хромодинамике на адронных масштабах, когда хотим работать со значением ḋ = 4, тогда как при принятии физической картины "адронной струны" соответствующей теории при ḋ = 2 уже первый порядок теории возмущений (одноглюонный обмен) дает вклад, линейно растущий с расстоянием, в потенциал взаимодействия между кварками, который обычно постулируется в феноменологических моделях спектроскопии адронов [30].

На данном этапе, в теории квантовых струн, так же как в теории развитой турбулентности [31], изучают поведение систем вблизи некоторого локального минимума в рамках теории возмущений. Удобный формализм для изучения глобального поведения таких систем пока не развит [22, 31].

Обобщение действия (12) для поля размерности имеет вид

$$S = \int d^n x \sqrt{G} (D_\mu ḋ G^{\mu\nu} D_\nu ḋ - V(ḋ) + G^{\mu\nu} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} G^{\rho\sigma}). \quad (15)$$

Потенциал V, для простых структур многообразия, имеющих целочисленную размерность, можно выбрать, например, так

$$V = \lambda(ḋ - 4)^2, \quad (16)$$

или

$$V = \frac{\lambda}{2\pi} \sin^2(\pi ḋ).$$

Уравнение движения для поля размерности в последнем случае имеет вид

$$\Box ḋ + \lambda \sin(2\pi ḋ) = 0. \quad (17)$$

Инстантонные решения уравнения (17) будут описывать квантовые переходы между разными локальными минимумами, в которых размерность принимает разные целочисленные значения. Отрицательные значения ḋ могут соответствовать грассмановым (фермионным) степеням свободы пространства [32].

Предположим, что у потенциала V имеется локальный минимум $ḋ = ḋ_0 \neq 0$. Тогда по механизму Хиггса векторное поле A_μ приобретает массу. Если рассматривать масштабы большие, чем радиус распространения этого векторного поля, то кинетическим членом калибровочного поля можно пренебречь и в окрестности значения $ḋ_0$ рассмотреть лишь первое слагаемое действия (15)

$$\int d^n x \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} (\partial_\mu - A_\mu) ḋ (\partial_\nu - A_\nu) ḋ =$$

$$= \int d^n x \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \partial_\mu ḋ \partial_\nu ḋ - \int d^n x \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu ḋ^2 + \int d^n x \sqrt{g} A_\mu A^\mu ḋ^2, \quad (18)$$

$$\int d^n x \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu ḋ^2 = \int d^n x\, \partial_\nu (\sqrt{g} A^\nu ḋ^2) - \int d^n x\, ḋ^2 \partial_\nu (\sqrt{g} A^\nu).$$

Второе слагаемое (18), при выборе калибровочного условия

$$\partial_\nu (\sqrt{g} A^\nu) = 0,$$

превращается в поверхностный член

$$\int d^n x\, \partial_\nu (A^\nu ḋ^2 \sqrt{g}) = \int dS_\mu A^\mu ḋ^2. \quad (19)$$

Положим, что $\vec{A} = 0$, $A_0 = m$. Тогда выражение (19) примет вид

$$m\Big(\int_{t=\infty} dV ḋ^2(x) - \int_{t=-\infty} dV ḋ^2(x)\Big). \quad (20)$$

Пусть

$$đ(t=\infty,\vec{x}) = đ_2, \quad đ(t=-\infty,\vec{x}) = đ_1,$$

тогда (20) дает вклад

$$mV(đ_2^2 - đ_1^2).$$

Откуда видно, что $đ_2 \neq đ_1$ лишь на области с конечным объемом. Следовательно, в рамках рассматриваемой модели размерность пространства может менять значение с изменением времени лишь в конечных объемах Вселенной: чем больше рассматриваемый объем объемлющего пространства, тем меньше вероятность изменения размерности физического подпространства. В целом, имея одну размерность, Вселенная в отдельных достаточно малых областях объемлющего пространства может иметь различные размерности. Имеет место соотношение неопределенности

$$\Delta đ^2 \Delta V \lesssim \frac{\hbar}{m}.$$

Далее можно учесть изменение объема со временем для расширяющейся Вселенной,

$$m(V_2 đ_2^2 - V_1 đ_1^2) \sim \hbar,$$

где $V_2 \gg V_1$, $đ_2 \ll đ_1$. Видимо, на очень малых (планковских) масштабах флуктуирует геометрия в целом и размерность пространства в частности.

3. Перейдем к обсуждению понятия размерности пространства. Согласно топологическому определению размерности [33,2] считается, что множество имеет размерность n, если его граница имеет размерность $n-1$. При этом множество, состоящее из конечного набора точек, имеет размерность 0, а пустое множество имеет размерность -1. Поясним содержание метрического определения размерности [34] на простых примерах. Рассмотрим (гладкую) кривую на плоскости (рис.1). Выберем некоторый малый масштаб a. Тогда длина кривой приближенно равняется величине $\ell = Na$, где целое число $N = [\ell/a]$.

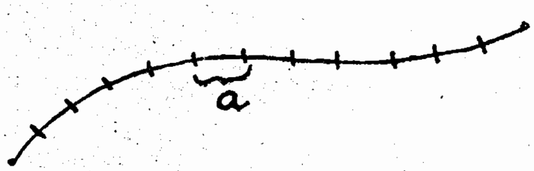

Рис.1.

Для объема $đ$-мерного подмножества евклидова пространства, покрытого достаточно малыми элементами (например, сферами) объемлющего пространства с линейным размером порядка a, получим

$$V = N(a)\, a^{đ} = \text{const} \neq 0. \tag{21}$$

Откуда следует, что

$$đ = \frac{\ln N(a)}{\ln 1/a} + O(1/\ln 1/a). \tag{22}$$

Приближенная формула (22) для обычных многообразий принимает точные целочисленные значения в пределе $a \to 0$. Величина $đ$, определенная из соотношения (21), для произвольных множеств принимает, вообще говоря, нецелочисленные (фрактальные) значения [34]. Для самоподобных фракталов логарифмическая поправка в (22) отсутствует. Тем самым фрактальная размерность, регуляризованного, обрезанного на масштабе $a_0 < a$, и предельного фракталов совпадают.

Для конечного набора точек, $N(a) \to \text{const}$, $đ(a) \to 0$. Для пустого множества $N=0$, но естественно попробовать применить конструкцию (21) и в этом случае. Для этого понадобится "регуляризовать" пустое множество, рассмотрев $N(a) \neq 0$, $N(a) \to 0$. Но тогда из формулы (21) получаем, что $đ < 0$. Первое подходящее целочисленное значение $đ = -1$ согласуется с индуктивным определением топологической размерности для пустого множества. Но что значит изменение величины $N(a)$ в окрестности нуля? Она ведь принимает целочисленные значения!

Дело можно представить так. Существует нормирование для рациональных (в данном случае целых) чисел, в котором в обычном смысле большие целые числа могут иметь малую норму. Это p-адическое нормирование [25]. Для любого заданного простого числа p и любого заданного целого числа N существует однозначное представление

$$N = p^{\mathrm{ord}_p N} M, \tag{23}$$

где целое число M не делится на p, а целое значение

$$\mathrm{ord}_p N = n \geq 0$$

дает кратность вхождения простого числа p в N. Теперь p-адическая норма N принимает значение

$$|N|_p = \begin{cases} 0, & N = 0, \\ \dfrac{1}{p^{\mathrm{ord}_p N}}. & \end{cases} \tag{24}$$

Следовательно, $|N_p| \leq 1$ и $|N|_p \to 0$ при $\mathrm{ord}_p N \to \infty$.

Если теперь рассматривать иерархию масштабов $a_m = 1/p^m$, то можно обеспечить ненулевое значение объема (21) при отрицательных значениях

$$đ = \frac{\ln |N|_p}{\ln 1/a_m} = -\frac{n}{m}. \tag{25}$$

Можно считать, что для каждого заданного p мы имеем некоторое регуляризованное "пустое" множество. При этом, как и для самоподобных фракталов, с изменением масштаба (m, $m = n$) размерность (25) не меняется.

В стандартных построениях квантовой теории (поля) в основном состоянии нет наблюдаемых частиц (точек). Хотя оно может заполняться даже бесконечным числом ненаблюдаемых частиц (фермионов). Здесь, мне кажется, мы соприкоснулись с аналогичными структурами в теории чисел.

Рассмотрим определение размерности, которое может принимать разные значения в разных точках объемлющего пространства

$$đ(x) = \lim_{a \to 0} \frac{\ln N(a)}{\ln 1/a(x)}. \tag{26}$$

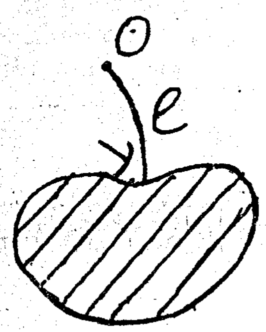

Рис.2.

Например, для фигуры (рис.2) определение (26) соответственно для $x = 0;\ \in \ell\ ;\ \in S$ дает значения 0, 1, 2. Вне фигуры $đ = 0$, а в точке $x = y$ функция $đ(x)$ терпит разрыв, со стороны кривой ℓ размерность равна единице, со стороны области S — двойке*.

Если рассматривать покрытие заданного множества в целом, а не только локальные покрытия, то получаем глобальную размерность

$$đ = \max_x đ(x), \tag{27}$$

*Посмотрев на такие сингулярные точки под "микроскопом", мы можем "увидеть" фрактальные структуры, обеспечивающие более гладкий переход от одной целочисленной к другой размерности.

которая для фигуры на рис.2 дает значение $đ = 2$. Объем окрестности точки x,

$$d\,v(x) \sim \lim_{a \to 0} N(a)\, a^{đ(x)}, \tag{28}$$

определяет меру Хаусдорфа. Приближенное значение размерности, при конечных значениях a,

$$\tilde{d}(x) = \frac{\ln N(a)}{\ln 1/a}, \tag{29}$$

вообще говоря, отличается от предельного значения $đ$ на величину $o(1/\ln 1/a)$. Для самоподобных фракталов $\tilde{d} = đ$. Для приложений обычно достаточно рассматривать некоторые, достаточно малые, значения a. Дело в том, что для функционального интеграла при преобразованиях ренормализационной группы [11,35] после некоторого числа шагов мы либо приходим к самоподобному режиму, либо с очевидностью к расходящему выражению, т.е. к несуществованию рассматриваемой системы.

Для другого определения размерности

$$đ_2(x) = \lim_{a \to 0} \frac{d \ln N(a)}{d \ln 1/a(x)}, \tag{30}$$

$$\tilde{d}_2(x) = \frac{d \ln N(a)}{d \ln 1/a(x)}, \tag{31}$$

логарифмическая поправка на конечное значение a отсутствует. Размерность вида (30) рассматривалась в работе [36].

Определение (29) позволяет, меняя разрешающую способность "прибора", например корреляционную длину $\xi \sim a(x)$ материальных полей, заданных на (гиперкубической) решетке, переходить от нульмерного пространства — набора узлов решетки, при $\xi \sim$ шага решетки, к d-мерному (евклидову многообразию) пространству при $\xi \gg a$ (что происходит в точке фазового перехода второго рода для рассматриваемой статистической системы). На малых масштабах пространство может иметь также самоподобную фрактальную структуру (подобную ковру Серпинского [28]), а на больших масштабах — структуру (двумерного [28]) многообразия. Согласно теореме Лебега (которая лежит в основе наиболее общего определения топологической размерности [2,33]), кратность покрытия многообразия размерности n равняется $n + 1$. Например, для плоскости "кирпичное" покрытие (рис.3) имеет кратность 3 (в каждом узле встречаются три области, три ребра). Заметим, что

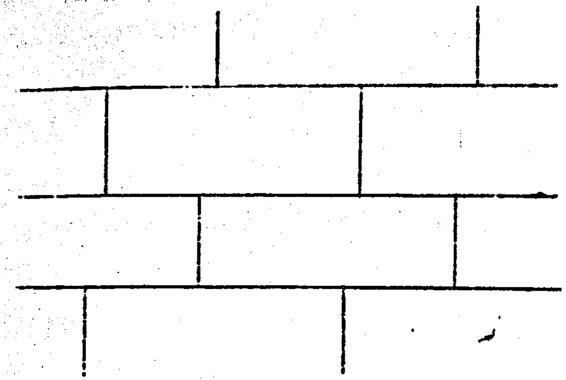

Рис.3

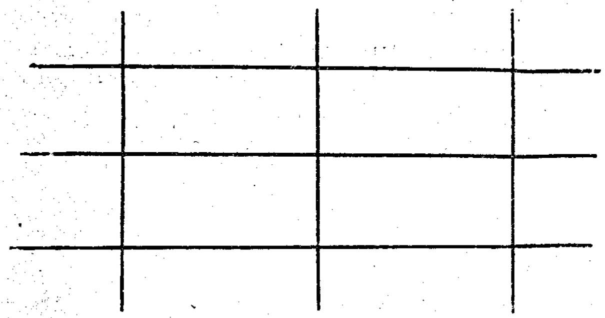

Рис.4

"шахматное" покрытие (рис.4) не является ("устойчивым", минимальным) покрытием общего положения, малая деформация превращает его в "кирпичное". Результат этой теоремы можно использовать для определения размерности физических объектов. Например, если рассматриваемая система имеет кластерную структуру и число составляющих кластера равно $n+1$, это указывает на то, что этому кластеру соответствует размерность пространства n. Если система имеет иерархическую, кластерную структуру и при этом с изменением масштаба меняется число составляющих кластера, то это означает изменение размерности пространства с масштабом. Астрономические наблюдения указывают на иерархическую структуру Вселенной в достаточно широком диапазоне масштабов. При этом на заданном масштабе, например, на масштабе кластеров в скоплении галактик число составляющих кластера разное для разных кластеров, что указывает на различное значение эффективной размерности пространства в разных частях космоса и/или на наличие областей с разной размерностью пространства на раннем этапе эволюции Вселенной*.

4. Теперь в качестве примера модели пространства, которая меняет размерность с изменением масштаба, рассмотрим решетку Келли — Бете, которая строится так /37/. Выберем исходную точку x_0, добавим к ней

* Автор благодарит профессора А.А.Гриба за обсуждение этого вопроса.

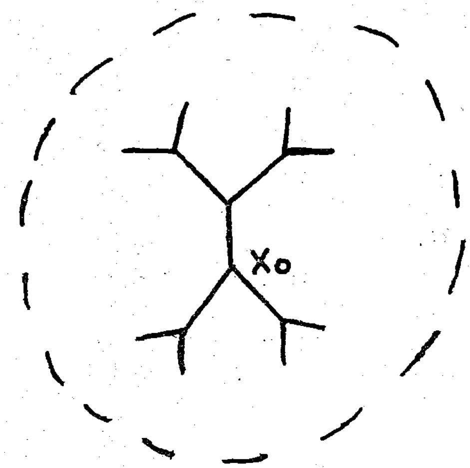

Рис.5. Решетка Келли — Бете с $q=3$.

а новых точек и каждую из них соединим ребром с x_0. Так получим точки первой оболочки. Оболочку с номером $n+1$ строим, соединяя каждую точку n-й оболочки с $q-1$ новыми точками (рис.5). Число точек в $n+1$ оболочке

$$N_{n+1} = (q-1)\,N_n = (q-1)^n q. \qquad (32)$$

Для размерности этой оболочки имеем

$$\tilde{d}(a) = \frac{n}{\ln n}\ln(q-1) + \frac{\ln q}{\ln n}, \qquad (33)$$

$$\tilde{d}_2(a) = n\ln(q-1), \qquad (34)$$

где мы положили, что $na = 1$, n — дискретное "время" эволюции в глубину структуры к меньшим масштабам. Видно, что с уменьшением масштаба размерность пространства (оболочки) растет. В табл.1 приведены те значения q и n, для которых размерность $\tilde{d}$ принимает значения, близкие к 4, 10 и 26 — выделенные значения размерности пространства-времени в квантовой теории струн /3/. Функция $\tilde{d}(n, q)$ с ростом n сначала слегка уменьшается, потом монотонно растет. Все три выделенные значения размерности 4, 10 и 26 находятся на кривой с $q = 3$*. Для других значений q (≥ 4) размерность 4, а с ростом q сначала 10, а потом и 26 остаются вне кривой. Значения для размерности $\tilde{d}_2$ приведены в табл.2. Из приведенных данных видно, что значение $q = 3$ выделено и является наиболее приемлемым. Для $q = 3$, $n = 13$ или 14, $\tilde{d} = 4$. Размерность $\tilde{d} \simeq 10(26)$ при $n = 57(197)$. Размерности $\tilde{d}_2 \simeq 10(26)$ при $n = 33(86)$. Эти расчеты проведены с помощью микрокалькулятора "Электроника МК-52". Для удобства пользователей программа с комментариями приводится в приложении 3.

* Отметим также, что диаграмма бифуркации рождения циклов в нелинейных системах при переходе к турбулентному режиму имеет структуру дерева Келли — Бете с $q=3$ /31/.

Таблица 1

q	n	$\tilde{d}$	q	n	$\tilde{d}$
3	13	3,94	12	39	26,20
	14	4,09	13	37	26,17
	57	10,04	14	6	10,06
	197	26,05	14	35	25,99
			15	5	9,88
4	30	10,10	16	5	10,14
	110	26,00	17	4	10,04
			21	28	26,09
5	21	10,09	24	26	26,00
	81	25,92	26	25	26,01
			28	24	25,94
6	16	9,93	31	23	26,04
	67	26,07	34	22	26,03
			42	20	26,04
7	13	9,84	47	19	26,01
	58	26,07	53	18	25,98
			61	17	26,02
8	11	9,79	71	16	26,05
	52	26,14	82	15	25,97
			83	15	26,04
9	10	9,99	98	14	26,01
	47	25,96	99	14	26,06
			118	13	26,00
10	9	10,05	119	13	26,04
	44	26,16	145	12	26,00
			182	11	26,02

В заключение отметим, что структура решетки Келли — Бете совпадает со структурой решетки Юрюа — Титса [38], применяемой для описания гармонического анализа (и теории струны [39]) над p-адическими числовыми полями. При этом координационному числу q решетки Келли — Бете соответствует простое число p = q −1. Для p-адической размерности получаем значение (25). Привлечение p-адической структуры пространства* поясняет зануление энергии квантовых флюктуаций вакуума

*Отметим, что идея о p-адической структуре пространства на малых расстояниях находится в центре внимания всего p-адического подхода с самого начала (см., например, [40]).

Таблица 2

q	n	$\tilde{d}_1$	q	n	$\tilde{d}_2$
3	13	3,91	8	2	3,89
	14	4,21		5	9,73
	33	9,93		13	25,30
	34	10,23	9	2	4,16
	86	25,90		5	10,40
	87	26,19		12	24,95
				13	27,03
4	4	4,39	10	2	4,39
	9	9,89		5	11,00
	24	26,37		12	26,27
5	3	4,15			
	7	9,70			
	19	26,3			
6	2	3,21			
	3	4,83			
	6	9,65			
	16	25,75			
7	2	3,58			
	3	5,38			
	6	10,75			
	14	25,08			
	15	26,88			

(космологической постоянной) при произвольном значении параметра p [41]. Рассмотрение иерархической модели пространства в данной работе приводит к выделенности одного значения p =2. Следовательно, с одной стороны, малость космологической постоянной [42] указывает на p-адическую структуру пространства на малых расстояниях, с другой — последовательность размерностей 4 → 10 → 26 при уменьшении масштаба от электрослабых до планковских указывает на выделенность p-адической структуры пространства, описываемого числовым полем Q_2. Проблеме размерности пространства посвящено много работ [2, 43]. Из недавних отметим работы: Воловича [44], в которой на заданном классе геометрии вычисляется значение классического действия и предлагается размерность определить из условия минимума действия. При дальнейшем развитии этого подхода нужно учесть меру экстремальных конфигураций — квантовые поправки (энтропию) и минимизировать эффективное действие — свободную энергию. В работе Альвареца [45] предлагается в основу теории размерности положить нелокальное определение метрики пространства /46/ , производные от которого дают локальные геометрические характеристики; вводится поле размерности пространства. В работе /5/ предложено определять размерность из условия минимальности свободной энергии, рассмотрены модели калибровочных теорий поля и теории струны во внешнем гравитационном поле.

Автор благодарит И.В.Воловича, А.А.Гриба, Э.А.Кураева, О.К.Пашаева, В.Н.Первушина, Э.А.Тагирова, Н.И.Чернова за обсуждение некоторых вопросов данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вычислим фрактальную размерность траектории свободной (брауновской) частицы с массой m, движущейся со скоростью v,

$$\langle x(t)\rangle = x_0 + vt. \tag{35}$$

В рамках евклидовой формулировки квантовой механики (см., например, /47/) амплитуда перехода из точки x_0 в точку $x(T)$ дается выражением

$$p(T) = \langle x(T)\,|\,x(0)\rangle = N\exp\{-\frac{m(x(T)-x(0)-vT)^2}{2\hbar T}\}, \tag{36}$$

где N определяется условием нормировки

$$\int dx(T)\,\langle x(T)\,|\,x(0)\rangle = 1,$$

$$N = (2\pi\hbar\frac{T}{m})^{-1/2}; \tag{37}$$

соотношение (35) следует из выражения

$$\langle x(t)\rangle = \int dx(t)\,p(t)\,x(t). \tag{38}$$

Фрактальную размерность траектории квантовой частицы определим формулой

$$\langle x(T)^2\rangle \sim T^{2/d}. \tag{39}$$

Легко видеть, что

$$\langle x(T)^2\rangle = (x(0)+vT)^2 + \frac{2T}{m}\hbar. \tag{40}$$

Откуда, при больших значениях T, имеем

$$d \simeq \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{mv^2}{2}T \equiv S_{c\ell} \gg \hbar, \\ 2 & \text{при } S_{c\ell} \ll \hbar. \end{cases} \tag{41}$$

Заметим, что при заданном ненулевом значении v всегда можно рассматривать достаточно большие значения T, когда $S_{c\ell} \gg h$. При этом с ростом t от малых значений к большим происходит изменение фрактальной размерности траектории от значения размерности траектории квантовой частицы, равного двум, до значения размерности траектории классической частицы, равного единице.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим вопросы локальной масштабной (конформной) инвариантности. Пусть масштаб длины изменяется на множитель λ. Для простоты рассмотрим $\lambda = 1-\xi$, $|\xi| \ll 1$. Такое изменение можно описать в терминах координат

$$x^\mu \to \lambda x^\mu = x^\mu - \xi x^\mu, \tag{42}$$

или метрического тензора,

$$g_{\mu\nu} \to (1-2\xi)\,g_{\mu\nu}. \tag{43}$$

при неизменяющихся координатах. Действительно, для малых длин

$$d^2s = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \to g_{\mu\nu}((1-\xi)\,dx^\mu)\,((1-\xi)\,dx^\nu) = g_{\mu\nu}(1-2\xi)dx^\mu dx^\nu. \tag{44}$$

Для получения вариации действия следует использовать ковариантную запись. Например, для калибровочных полей

$$S = \frac{1}{4e^2}\int d^n x\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}\,g^{\rho\sigma}, \tag{45}$$

где $g = |\det g_{\mu\nu}|$; $g^{\mu\nu}$ — обратная к $g_{\mu\nu}$ матрица. При преобразованиях (43)

$$g^{\mu\nu} \to (1+2\xi)\,g^{\mu\nu},$$

$$g \to (1-2n\xi)\,g, \tag{46}$$

поэтому

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{g}\,((4-n)\,\xi)\, g^{\mu\nu} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} g^{\rho\sigma}. \tag{47}$$

Откуда видно, что действие (45) инвариантно при размерности пространства-времени $n = 4$. Заметим,что при глобальных масштабных преобразованиях, $\xi \neq \xi(x)$, безразмерные величины, в том числе и действие (в единицах $\hbar = 1$), остаются неизменными. Действительно, константа связи e^2 (45) представляется в виде $e^2 = e_0^2 \mu^{4-n}$, где μ — "единица массы", e_0 — безразмерный параметр. При глобальных преобразованиях

$$e^2 \to e^2(1 + \xi(4-n)), \tag{48}$$

и действие (45) с учетом (48) и (47) остается неизменным.

В общем случае вариация действия при изменении метрического тензора определяется тензором энергии-импульса, $T_{\mu\nu}$,

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{\bar{g}}\; \delta g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \tag{49}$$

Вариация действия при масштабных преобразованиях (46)

$$\delta g^{\mu\nu} = 2\xi\, g^{\mu\nu}$$

определяется следом тензора энергии импульса,

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{\bar{g}}\, T_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\, \delta\xi(x). \tag{50}$$

Инвариантность относительно локального изменения масштаба $\delta\xi = \delta\xi(x)$,

$$\frac{\delta S}{\delta\xi(x)} = 0 \quad (g \neq 0)$$

означает зануление следа (плотности) тензора энергии-импульса

$$T^{\mu}_{\mu}(x) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0.$$

На квантовом уровне классическое действие заменяется эффективным действием, учитывающим все (квантовые) конфигурации полей. На языке статистической аналогии (см., например, /47/) эффективное действие соответствует свободной энергии. Конформная инвариантность эффективного действия — зануление следа тензора энергии-импульса, соответствует занулению (локального) значения давления — принципу стабильности /5/ *.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Рассмотрим программу для табулирования функции с помощью микрокалькулятора. Программа состоит из общей части, команды $00 \div 10$ и части, зависящей от конкретного вида табулируемой функции, команды $11 \div \ldots$. Порядок введения программы в микрокалькулятор и вычислений следующий. После включения питания нажимаем клавиши F и ПРГ — переходим в режим программирования, что сопровождается высвечиванием адреса первой команды, 00. Дальнейшая последовательность действий и пояснения к ним приводятся в таблице.

Адрес	Команда	Выполняемое действие
00	П→Х 0	Вызов x в регистр X из регистра R0
01	ПП	Переход на подпрограмму
02	11	Адрес подпрограммы
03	С/П	Остановка и индикация
04	П→Х 0	"00"
05	П→Х 1	Вызов h в регистр X из регистра R1
06	+	Вычисление $x = x + h$
07	Х→П 0	Запись x в R0
08	С/П	Остановка и индикация x
09	БП	Безусловный переход к началу
10	00	Адрес безусловного перехода
11	П→Х 0	"00"
12	F ln	Вычисление ln x

*Автор благодарит профессора А.Б.Замолодчикова за обсуждение этого вопроса.

13	Х→П 3	Запись ln x в регистр R3
14	П→Х 2	Вызов числа q из R2
15	В1	
16	1	
17	—	Вычисление q - 1
18	F ln	Вычисление ln (q - 1)
19	П→Х 0	"00"
20	Х	Вычисление x ln(q - 1)
21	П→Х 2	"14"
22	F ln	Вычисление ln q
23	+	Вычисление x ln (q - 1) + ln q
24	П→Х 3	Вызов значения ln x
25	÷	Вычисление $f(x) = \dfrac{x\ln(1-1)+\ln q}{\ln x}$
26	В/0	Возврат в главную программу
27	03	Переход к команде 03

Ввод программы в микрокалькулятор завершен. Переходим в автоматический режим, для чего нажимаем клавиши, F , АВТ; Набираем 2, Х→П 0; 1, Х→П 1; 3, Х→П 2; тем самым мы ввели начальные значения $x=2$, $h=1$ и $q=3$. Нажимаем В/0 , С/П и переходим в режим вычисления. Для изменения начальных данных, например, на $q=4$, $n=30$, набираем 4, Х→П , 2; 30, Х→П 0; далее В/0 , С/П .

ЛИТЕРАТУРА

1. Jarlskog C., Yndurain F.J. — CERN — TH 4244/85 , 1985.
2. Горелик Г.Е. — Размерность пространства. М.: МГУ, 1983.

3. Арефьева И.Я., Волович И.В. — УФН, 1985, 146, с.655; Duff M.J., Nilsson B.E.W., Pope C.N. — Phys. Rep., 1986, 130, p.1.
4. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. — Модель релятивистской струны. М.: Энергоатомиздат, 1987.
5. Махалдиани Н.В. — ОИЯИ, Р2-87-306, Дубна, 1987.
6. Saslaw W.C. — Mon. Not. Astr. Soc., 1977, v.179, p.659.
7. Antoniadis I. et al. : Phys. Lett. B, 1988, 211, p.393.
8. Peebles P.J.E. — Physica D., 1989, 38, p.273.
9. Линде А.Д. — Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.
10. Паташинский А.З., Покровский В.Л. — Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
11. Вильсон К., Когут Дж. — Ренормализационная группа и ϵ-разложение. М.: Мир, 1975.
12. Gozzi E. — Phys. Lett. B, 1988, 201, p.525.
13. Фейнман Р., Хиббс А. — Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
14. Попов В.Н. — Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
15. Зельдович Я.Б. и др. — УФН, 1987, 152, № 1, с.3.
16. Halpern M.B., Siegel W. — Phys. Rev. D., 1977, 16, No.8, p.2486.
17. Странные аттракторы. — Сб. статей под ред.Я.Г.Синая и Л.П.Шильникова. М.: Мир, 1981.
18. Смирнов Б.М. — УФН, 1986, 149, с.177.
19. Дремин И.М. — УФН, 1987, 152, с.531.
20. Paladin G., Vulpiani A. — Phys. Rep.., 1987, 156, No.4, p.149.
21. Polyakov A.M. — Gauge Fields and Strings Contemporary Concepts in Physics V.3, Harwood Academic Publishers, 1987.
22. Hubsch T. — All the String's Vacua, UTTG-38-89.
23. Regge T. — Nuovo Cim., 1961, 19, p.558.
24. Lehto M. — Univ. of Jyväskylä report 1/1988.
25. Коблиц Н. — p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.
26. Махалдиани Н.В. — ОИЯИ, Р2-88-916, Дубна, 1988.
27. Yang Z.R. — J. Phys. A., 1986, 19, p.L557.
28. Englert F. et al. — Nucl. Phys. B, 1986, 280, p.147.
29. Chernikov N.A., Tagirov E.A. — Ann. Int. H. Poincaré, 1968, 9A, p.109.
30. Клоуз Ф. — Кварки и партоны. М.: Мир, 1982.
31. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Гидродинамика. Теоретическая физика, М.: Наука, 1986, т.6.
32. Cvitanovic P. — Nucl. Phys. B, 1981, 188, p.373.

33. Александров П.С., Пасынков Б.А. — Введение в теорию размерность. М.: Наука, 1973.
33. Mahdelbrot B. — The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco, 1982.
35. Mack G. — Multigrid Methods in Quantum Field Theory. In: Nonperturbative Quantum Field Theory, Eds. G.'t Hooft et al., Cargese, 1987.
36. Krammer A.B., Nielsen H.B., Tze H.C. — Nucl. Phys. B, 1974, 81, p.145.
37. Бэкстер Р. — Точнорешаемые модели статистической механики. М.: Мир, 1985.
38. Манин Ю.И. — Соврем. проблемы математики, т.3, М.: ВИНИТИ, 1974.
39. Zabrodin A.V. — Commun. Math. Phys., 1989, 123, p.463.
40. Volovich I.V. — Preprint CERN-TH, 4781/87, 1987.
41. Махалдиани Н.В. — ОИЯИ, Р2-89-871, Дубна, 1989.
42. Weinberg S. — Rev. Mod. Phys., 1989, 61, p.1.
43. Владимиров Ю.С. — Размерность физического пространства-времени и объединенные взаимодействия. М.: Изд.МГУ, 1987.
44. Volovich I.V. — Phys. Lett. B, 1989, v.219, No.1, p.66.
45. Alvares E. — Phys. Lett. B, 1988, 210, p.73.
46. Синг Дж. — Общая теория относительности. М.: ИИЛ, 1963.
47. Глимм Дж., Джафе А. — Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984.
48. Махалдиани Н.В. — ОИЯИ, Р2-86-849, Дубна, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 ноября 1990 года.