сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-90-523

И.И.Бажанский*, Б.Л.Резник*, А.И.Титов

СВЯЗЬ КАНАЛОВ, УНИТАРНОСТЬ S-МАТРИЦЫ И ФЛУКТУАЦИИ СЕЧЕНИЙ

* Дальневосточный государственный университет, Владивосток

1990

1. Для описания ядерных реакций, идущих с образованием большого числа перекрывающихся резонансов с шириной Γ и плотностью уровней ρ ($\rho\Gamma \gg 1$), обычно используется модель Эриксона /1/, в которой амплитуда процесса представлена в виде суммы резонансных членов с постоянной шириной уровней:

$$f_{эр}(E) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{E_n - E - i\cdot\Gamma/2} \equiv \xi + i\cdot\eta \,. \qquad (1)$$

Предполагается, что комплексные числа a_n являются независимыми случайными величинами с нулевыми средними значениями и определенной дисперсией. Энергии резонансов E_n также независимы и распределены случайно и равномерно (конкретный вид закона распределения E_n оказывается не существенным). Амплитуда $f(E)$ тогда также будет некоторой случайной функцией энергии. В условиях сильного перекрывания уровней величины $\xi = \mathrm{Re}(f)$ и $\eta = \mathrm{Im}(f)$ являются суммами большого числа независимых случайных слагаемых и, следовательно, распределены по закону

$$p(\xi) = p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\cdot\exp(-\eta^2/2a^2)\,, \qquad (2)$$
$$\langle\xi\rangle = \langle\eta\rangle = 0\,, \quad \langle\xi^2\rangle = \langle\eta^2\rangle = a^2\,.$$

При дополнительном предположении о равноправии и взаимной статистической независимости $\mathrm{Re}(f)$ и $\mathrm{Im}(f)$ сечение реакции $\sigma = (\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2$ будет также случайной величиной, распределенной по закону

$$p(\sigma/\bar\sigma) = \exp(-\sigma/\bar\sigma)\,, \qquad (3)$$

где $\bar\sigma$ – среднее значение сечения.

Из распределения (3) следуют большие флуктуации величины σ, в частности, дисперсия D_σ и относительная флуктуация $\eta_\sigma = \sqrt{D_\sigma}/\bar\sigma$

принимают значения:

$$D_\sigma = (\bar{\sigma})^2 \,, \quad \eta_\sigma = 1 \,. \tag{4}$$

Флуктуации сечений обнаружены экспериментально, они получили название эриксоновских флуктуаций, а формулы (1) – (3) и получаемые из них выражения для корреляционных функций явились основой для интерпретации экспериментальных данных.

Однако впоследствии было замечено /2/, что исходные положения данного подхода не удовлетворяют условию унитарности S- матрицы. Так, с учетом сложных связей, налагаемых на коэффициенты a_n требованием унитарности, становится неясным вопрос об их статистической независимости. Далее, являются ли независимыми компоненты $\mathrm{Re}(f)$ и $\mathrm{Im}(f)$ и равноправны ли они при отсутствии равноправия между реальной и мнимой частями амплитуд изолированных резонансов? Какова роль оптической теоремы, согласно которой среднее значение величины $\mathrm{Im}(f)$ больше нуля, не приводит ли это к "естественному" затуханию флуктуаций?(В модели Эриксона затухание флуктуаций определяется числом независимых каналов и фоновыми процессами).

2. В работе /2/ предложена другая модель, основанная на построении амплитуды процесса с учетом требования унитарности. Для перекрывающихся резонансов амплитуда записывается в виде

$$f_{\text{уи}}(E) = S(E) - 1 = \prod_{n=1}^{N} \frac{E_n - E + i\cdot\Gamma/2}{E_n - E - i\cdot\Gamma/2} - 1 \,. \tag{5}$$

Для случая изолированных резонансов (расстояние между соседними уровнями велико по сравнению с их шириной) амплитуда $f_{\text{уи}}$ практически совпадает с суммой парциальных амплитуд отдельных резонансов

$$f_{\text{уи}} = \sum_{n=1}^{N} f^n_{\text{уи}} \,, \quad f^n_{\text{уи}} = \frac{i\cdot\Gamma_n}{E_n - E - i\cdot\Gamma_n/2} \,. \tag{6}$$

Однако в случае сильного перекрывания резонансов формулы (1) и (5) существенно различаются. В принципе выражение (5) можно переписать в виде суммы полюсных членов типа (1):

$$f_{\text{уи}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{g_n}{E_n - E - i\cdot\Gamma_n/2} \,, \tag{7}$$

где

$$g_n \equiv \mathrm{res}_n S(E) = i\cdot\Gamma_n \cdot \prod_{k\neq n} \left(E_n - E_k + i\cdot\frac{\Gamma_n+\Gamma_k}{2}\right)\cdot\left(E_n - E_k - i\cdot\frac{\Gamma_n-\Gamma_k}{2}\right)^{-1} .$$

Но тогда при $|E_n - E_k| \le \Gamma_n, \Gamma_k$ комплексные "вычеты" g_n становятся довольно сложными функциями всех E_n и Γ_n, и перестают быть независимыми.

S- матрицу упругого рассеяния в формуле (5) можно представить в виде

$$S(E) = e^{i\delta} = \prod_{n=1}^{N} e^{2i\delta_n} \,, \tag{8}$$

где фазы

$$\delta_n = \mathrm{arctg}(\Gamma_n / 2(E_n - E)) \,. \tag{9}$$

Если предположить, что энергии уровней E_n (и ширины Γ_n) статистически независимы, то парциальные фазы δ_n также будут независимыми случайными величинами, а суммарная фаза - δ-суммой большого числа случайных величин:

$$\delta = 2\cdot \sum_{n=1}^{N} \delta_n \,. \tag{10}$$

При достаточно большой плотности уровней, когда $\sqrt{D_\delta} \gg 2\pi$, величина δ становится практически равномерно распределенной на интервале от $\delta = 0$ до $\delta = 2\pi$. Для такого распределения имеем $\overline{\mathrm{Cos}\delta} = 0$, $\overline{\mathrm{Cos}^2\delta} = \frac{1}{2}$. То есть, для сечения $\sigma \simeq |f_{\text{уи}}|^2$, где $f_{\text{уи}} = e^{i\delta} - 1$, получим $\sigma \simeq 2\cdot(1-\mathrm{Cos}\delta)$, $\sigma^2 \simeq 4\cdot(1+\mathrm{Cos}^2\delta - 2\cdot\mathrm{Cos}\delta)$ и

$$\eta_\sigma \equiv \left((\overline{\sigma^2} - \bar{\sigma}^2)/\bar{\sigma}^2 \right)^{1/2} = 1/\sqrt{2} \ . \qquad (11)$$

Таким образом, относительные флуктуации сечения упругого резонансного рассеяния η_σ оказываются конечными и не зависят от степени перекрывания резонансных уровней, но количественно значение η_σ меньше, чем в модели Эриксона.

Зная связь между σ и δ и закон распределения фазы δ, можно найти закон распределения эффективного сечения σ :

$$p(\sigma/\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}\cdot\partial\delta/\partial\sigma\cdot p(\delta) = \frac{1}{2\pi}\cdot(1-(1-\sigma/\bar{\sigma})^2)^{-1/2} \ . \qquad (12)$$

Результат (11) является предельным в том смысле, что он соответствует сильному перекрыванию. Для произвольной величины $\rho\Gamma$ получено [2]:

$$D_\sigma = \overline{\sigma^2} - \bar{\sigma}^2 \simeq 2\cdot(1-e^{-2\pi\rho\Gamma}) \ ,$$
$$\eta_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \sqrt{1-e^{-2\pi\rho\Gamma}}/(1-e^{-\pi\rho\Gamma}) \ . \qquad (13)$$

Из (13) видно, что асимптотический режим (11) наступает уже при $\rho\Gamma \simeq 2$. Для случая $\rho\Gamma \ll 1$ (что соответствует случаю изолированных резонансов) имеем $\eta_\sigma = 1/\sqrt{\pi\rho\Gamma}$.

Таким образом, модельное представление (5), учитывающее в явном виде условие унитарности, для случая одноканального упругого рассеяния приводит к результатам, отличающимся от соответствующих результатов модели Эриксона. Однако реальные реакции являются многоканальными, поэтому сопоставление полученных результатов с экспериментом затруднено.

3. Проблему учета процессов распада резонансов по неупругим каналам удается решить в подходе, учитывающем сильную связь между различными каналами реакции [3]. Для реакций, идущих с образованием

промежуточных (квази-) стационарных состояний (дибарионов) этот подход разработан в [4]. При учете распада резонансных состояний только по упругому каналу резонансная часть S – матрицы имеет вид

$$S^0_{CK}(E) = \frac{1 + i\cdot\sum_n \Gamma_n/2(E_n-E)}{1 - i\cdot\sum_n \Gamma_n/2(E_n-E)} \ . \qquad (14)$$

Используя представление

$$S^0_{CK} = e^{2i\delta} = \frac{1 + i\cdot tg\delta}{1 - i\cdot tg\delta} \ , \qquad (15)$$

получим выражение для суммарной фазы δ, принципиально отличающееся от (10):

$$\delta = \mathrm{arctg}\ \left(\sum_{n=1}^{N} tg\delta_n \right) \ , \quad tg\delta_n = \Gamma_n/2(E_n-E) \ , \qquad (16)$$

Для такой фазы δ нельзя сделать предположение о ее равномерном распределении на интервале $(0,2\pi)$, и соотношения (11-12) для распределения $p(\sigma)$ и относительной флуктуации η_σ сечения σ перестают работать.

При учете распада резонансов по неупругим каналам в работе [5] получены следующие выражения для элементов S – матрицы:

$$S^{el}_{CK} = \frac{1 + \Sigma_{\mu\nu} + i\cdot \sum_n (2\cdot x_n-1)\cdot\Gamma_n/2(E_n-E)}{1 - \Sigma_{\mu\nu} - i\cdot \sum_n \Gamma_n/2(E_n-E)} \ ,$$
$$S^{in}_{CK} = - \frac{i\cdot \sum_n \sqrt{x_n(1-x_n)}\cdot\Gamma_n/(E_n-E)}{1 - \Sigma_{\mu\nu} - i\cdot \sum_n \Gamma_n/2(E_n-E)} \ , \qquad (17)$$

где

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv \sum_{\mu>\nu} \left(\sqrt{x_\mu(1-x_\nu)} - \sqrt{x_\nu(1-x_\mu)} \right)^2 \cdot\Gamma_\mu\cdot\Gamma_\nu/4(E_\mu-E)(E_\nu-E) \ ,$$

$$x_n = \Gamma^{el}_n/\Gamma_n \ , \quad \Gamma_n = \Gamma^{el}_n + \Gamma^{in}_n \ .$$

При выполнении дальнейших расчетов будем использовать предположение, что ширина Γ для всех резонансов одинакова ($\Gamma_n \equiv \Gamma$). Это оправдано наличием большого числа парциальных ширин и отсутствием определенного канала распада. Величина x_n для каждого отдельного резонанса равна отношению ширины распада данного резонанса в упругий канал к полной ширине резонанса. При этом максимальное значение $x_{max} = Max(x_n)$ характеризует соотношение упругого и неупругого каналов распада резонанса. Так, при $x_{max} \to 1$ преобладающим является упругое рассеяние, а при $x_{max} \to 0$ основной модой распада являются неупругие каналы.

В частном случае, когда для всех резонансов величины x_n равны, то есть $x_n \equiv x$, $n = 1 \div N$, для эффективных сечений упругого канала и каналов реакций получим:

$$\sigma_{el} \simeq |f_{el}|^2 = |S^{el}_{CK}-1|^2 = x^2\cdot\sigma_0 ,$$
$$\sigma_{in} \simeq |f_{in}|^2 = |S^{in}_{CK}|^2 = x(1-x)\cdot\sigma_0 , \qquad (18)$$

где

$$\sigma_0 \simeq |f_0|^2 = |S^0_{CK}-1|^2 = \Gamma^2\cdot\Sigma^2\cdot\left(1+\Gamma^2\cdot\Sigma^2/4\right)^{-1} ,$$
$$\Sigma \equiv \sum_n (E_n-E)^{-1} . \qquad (19)$$

При этом для величин дисперсии D_σ и относительной флуктуации η_σ имеют место соотношения:

$$D_{\sigma_{el}}(x) = x^4\cdot D_{\sigma_0} ,$$
$$D_{\sigma_{in}}(x) = x^2(1-x)^2\cdot D_{\sigma_0} , \qquad (20)$$
$$\eta_{\sigma_{el}}(x) = \eta_{\sigma_{in}}(x) = \eta_{\sigma_0} .$$

Таким образом, η_σ не зависит от значения x и совпадает в упругом и неупругом каналах со значением η_{σ_0}.

В реальной ситуации величины x_n не являются равными для различных резонансных состояний и их можно считать случайными величинами (в частном случае – равномерно распределенными на интервале $x_n \in [0, x_{max}]$). При этом не удается получить явную аналитическую формулу типа (10), (16), связывающую результирующую фазу δ с фазами отдельных изолированных резонансов δ_n:

$$tg2\delta_n = x_n\Gamma(E_n-E)/((E_n-E)^2+(1-2x_n)\cdot\Gamma^2/4) . \qquad (21)$$

Поэтому зависимость D_σ и η_σ от значения величины $\rho\Gamma$ при различных x_{max} определялась численно. Результаты расчетов оказываются устойчивыми к виду распределения величин x_{max} и E_n (и не меняются при использовании эквидистантного спектра энергий резонансов $E_n = E_0 + n\cdot D$, где $D=1/\rho$ – среднее растояние между резонансами). Однако вид зависимости величин D_σ и η_σ как функции $\rho\Gamma$ существенно зависит от значения x_{max}.

На рис.1 изображено поведение D_{σ_0} и η_{σ_0} для случая упругого резонансного рассеяния ($x_n \equiv 1$). Для сравнения приведены расчеты по формуле (13) и результаты численного анализа с амплитудой (5). Относительная флуктуация η_{σ_0} хорошо аппроксимируется зависимостью

$$\eta_{\sigma_0} = 1/\sqrt{\pi\rho\Gamma} , \qquad (22)$$

то есть флуктуации затухают с ростом степени перекрывания резонансов и при $\rho\Gamma \gg 1$ фактически исчезают.

На рис.2 представлены расчеты D_σ и η_σ для упругого и неупругого каналов при различных значениях x_{max}. Характер зависимости $\eta_{\sigma_{el}}$ определяется величиной x_{max}. Так, при преобладании упругой моды распада резонансов ($x_{max} \simeq 1$) флуктуации затухают с ростом $\rho\Gamma$, хотя и не так сильно, как для сечения σ_0. В случае

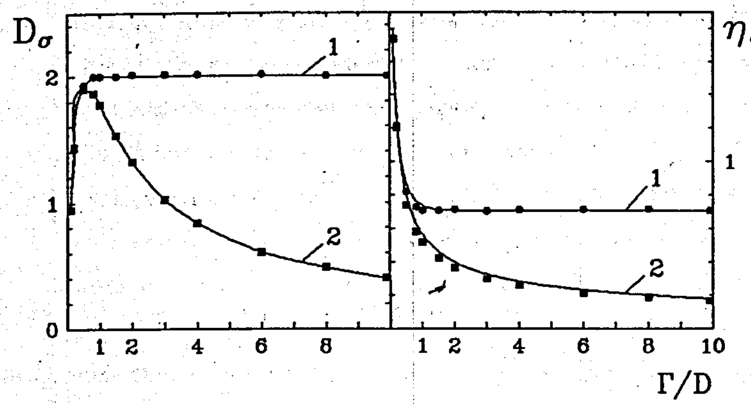

Рис. 1. Зависимость D_σ и η_σ для сечения упругого резонансного рассеяния с S – матрицей (5) – кривые "1" и S – матрицей (14) – кривые "2". Сплошные линии – расчет по формулам (13) и (22); точки – результаты численного расчета.

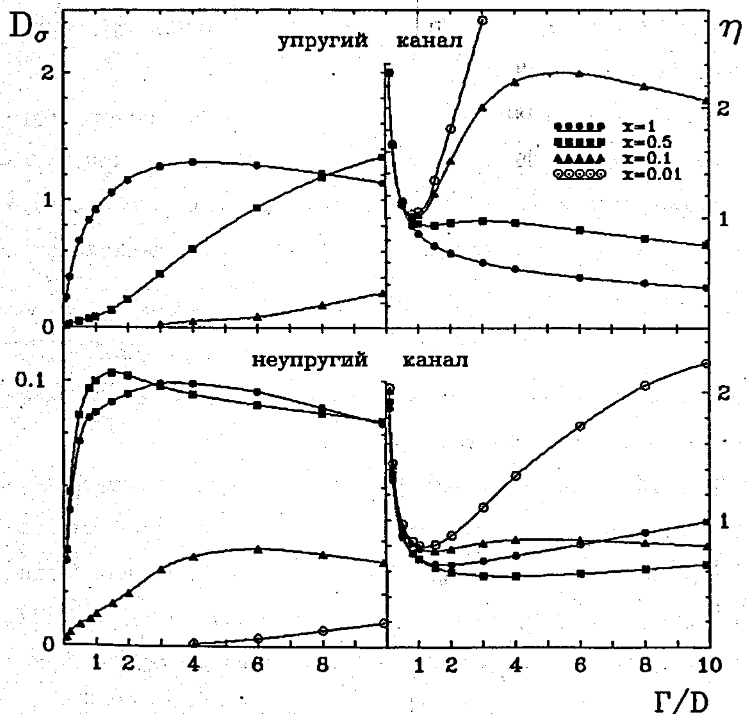

Рис. 2. D_σ и η_σ для сечений упругого и неупругого каналов с S – матрицей (17) для различных значений величины x_{max}.

преобладания неупругих мод распада ($x_{max} \to 0$) $\eta_{\sigma_{el}}$ неограниченно растет с ростом $\rho\Gamma$. Наиболее интересным представляется случай, когда $x_{max} \simeq 1/2$, для которого величина $\eta_{\sigma_{el}}$ практически не изменяется с ростом $\rho\Gamma$ и равна $\eta_{\sigma_{el}} = 1$ при $\rho\Gamma = 1 \div 10$.

Для каналов реакции $\eta_{\sigma_{in}}$ практически неизменна для значений $x_{max} = 0.1 \div 1$ на всем исследуемом интервале $\rho\Gamma$.

Таким образом, можно сделать следующие основные выводы. Для одноканальных реакций упругого рассеяния в методе связи каналов флуктуации эффективных сечений затухают с ростом $\rho\Gamma$: $\eta_\sigma = 1/\sqrt{\pi\rho\Gamma}$. Учет неупругих мод распада существенно изменяет картину, и при $x_{max} \simeq 1/2$ можно считать величину η_σ практически постоянной и равной $\eta_\sigma \simeq 1$ на большом интервале изменения $\rho\Gamma$. В этом смысле результат, полученный в модели связи каналов, численно совпадает с результатами модели Эриксона. Для более детального сравнения различных подходов необходим анализ поведения функций распределения $p(\sigma)$ и различных корреляционных характеристик, например, энергетической корреляционной функции.

Литература

1. Ericson T., Mayer-Kuckuk T.–Ann.Rev.Nucl.Sci.,1966,v.16,p.183 (см. перев.: УФН,1967,т.92,с.271).
2. Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И.–ЯФ,1976,т.24,вып.1,с.214.
3. Базь А.И., Жуков М.В.–ЯФ,1972,т.16,вып.1,с.60.
4. Dorkin S.M., Lukyanov V.K., Titov A.I.–Z.Phys.,1984,A316,p.331.
5. Бажанский И.И.–В кн.: "Ядерные реакции и кварковая структура ядер",ДВГУ,Владивосток,1987,с.74.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 ноября 1990 года.