объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-90-448

В.К.Мельников

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в журнал "Communications in Mathematical Physics"

1990

В настоящее время в исследовании нелинейных эволюционных уравнений с помощью метода обратной задачи рассеяния вырисовывается новое перспективное направление: речь идет о применении этого метода к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений с источником. При весьма большом разнообразии в деталях использование метода обратной задачи рассеяния для интегрирования различных нелинейных эволюционных уравнений с источником позволяет обнаружить много общего как в самой схеме интегрирования, так и в динамике получаемых решений. В данной работе эти утверждения будут продемонстрированы на примере нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником. Более точно, речь идет об интегрировании следующей системы уравнений:

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+2|u|^2u+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2i\sum_{n=1}^{N}(\phi_n p_n-\bar{\psi}_n\bar{q}_n), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial x}+u\psi_n-i\zeta_n\phi_n=\frac{\partial\psi_n}{\partial x}-\bar{u}\phi_n+i\zeta_n\psi_n=0, \quad n=1,\dots,N, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial x}+uq_n-i\zeta_n p_n=\frac{\partial q_n}{\partial x}-\bar{u}p_n+i\zeta_n q_n=0, \quad n=1,\dots,N, \tag{3}$$

где черта означает комплексное сопряжение. При этом мы будем предполагать, что функция $u=u(x,t)$ при любом $t\geq 0$ удовлетворяет требованию

$$\sum_{r=0}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^r u(x,t)}{\partial x^r}\right|dx<\infty. \tag{4}$$

С учетом этого требования решения $\phi_n=\phi_n(x,t)$, $\psi_n=\psi_n(x,t)$ и $p_n=p_n(x,t)$, $q_n=q_n(x,t)$, $n=1,\dots,N$, соответственно уравнений (2) и (3) необходимо выбирать так, чтобы выражение, стоящее в правой части уравнения (1), при любом $t\geq 0$ стремилось достаточно быстро к нулю, если $x\to\pm\infty$. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ выбора решений уравнений (2) и (3) таков. Пусть величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ лежат в верхней полуплоскости комплексного параметра ζ, т.е. $\operatorname{Im}\zeta_n > 0$, $n = 1, \ldots, N$. Пусть, далее, решение ϕ_n, ψ_n уравнения (2) стремится к нулю при $x \to -\infty$, а решение p_n, q_n уравнения (3) стремится к нулю при $x \to \infty$, т.е. при любом $t \geq 0$ справедливы асимптотики

$$
\begin{aligned}
&|\phi_n(x,t)| + |\psi_n(x,t)| \to 0, \qquad \text{если} \quad x \to -\infty, \\
&|p_n(x,t)| + |q_n(x,t)| \to 0, \qquad \text{если} \quad x \to \infty.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Как будет показано ниже, в этом случае правая часть уравнения (1) при любом $t \geq 0$ стремится достаточно быстро к нулю, если $x \to \pm\infty$, а само решение $u = u(x,t)$ удовлетворяет условию (4). При этом величины ζ_n могут быть произвольными функциями времени t, при любом $t \geq 0$ удовлетворяющими условию $\operatorname{Im}\zeta_n > 0$, $n = 1, \ldots, N$. Оказывается, что в этом случае функция $u = u(x,t)$ может описывать ряд нетривиальных процессов, например, распад и слияние солитонов, захват солитонов в колебательный режим движения, образование связанного состояния из нескольких солитонов.

Второй способ выбора решений уравнений (2) и (3) состоит в следующем. Пусть величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ являются точками дискретного спектра оператора L вида

$$
L = \Lambda\partial + U, \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{6}
$$

где

$$
\Lambda = \operatorname{diag}(1, -1), \qquad U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ \bar{u} & 0 \end{vmatrix}, \tag{7}
$$

и по-прежнему лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ комплексного параметра ζ. Всюду в дальнейшем, не оговаривая это особо, будем считать, что все точки $\zeta = \zeta_n$ дискретного спектра оператора L являются простыми, $n = 1, \ldots, N$. Пусть, далее, решение ϕ_n, ψ_n уравнения (2) стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, т.е. получается из нормированной на единицу собственной функции оператора L вида (6), (7), отвечающей собственному значению $\zeta = \zeta_n$, с помощью умножения на не зависящую от x величину, а решение p_n, q_n уравнения (3), наоборот, стремится к бесконечности при $x \to \pm\infty$, т.е. при любом $t \geq 0$ имеют место асимптотики

$$
\begin{aligned}
&|\phi_n(x,t)| + |\psi_n(x,t)| \to 0, \qquad \text{если} \quad x \to \pm\infty, \\
&|p_n(x,t)| + |q_n(x,t)| \to \infty, \qquad \text{если} \quad x \to \pm\infty.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Как будет показано ниже, в этом случае правая часть уравнения (1) при любом $t \geq 0$ также стремится достаточно быстро к нулю, если $x \to \pm\infty$, а само решение $u = u(x,t)$ удовлетворяет условию (4). При этом величины ζ_n оказываются функциями времени, удовлетворяющими условию

$$\frac{d\zeta_n}{dt} - i W_n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N, \tag{9}$$

где величины W_n определяются равенством

$$W_n = \phi_n(x,t)\, q_n(x,t) - \psi_n(x,t)\, p_n(x,t) \tag{10}$$

и в силу (2), (3) не зависят от x. Отсюда следует, что величины ζ_n в процессе эволюции могут из верхней полуплоскости комплексного параметра ζ попадать на вещественную ось, т.е. мнимая часть $\mathrm{Im}\,\zeta_n$ величины ζ_n может в какой-то момент времени $t = t'$ обратиться в нуль. Это приводит к тому, что в процессе эволюции соответствующий этому собственному значению солитон исчезает, т.е. уничтожается. Далее, если при $t > t'$ величина ζ_n уходит с вещественной оси, то исчезнувший солитон появляется вновь, т.е. рождается. Таким образом, в этой ситуации, кроме упомянутых ранее нетривиальных процессов, функция $u = u(x,t)$ может описывать еще и процессы рождения и уничтожения солитонов.

Указанные выше результаты получаются с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L вида (6), (7). Почти дословным повторением сказанного ниже аналогичные результаты могут быть получены для модифицированного уравнения Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником, а после небольшого изменения некоторых деталей этой работы сходные результаты могут быть получены для уравнений Лиувилля и sin-Gordon с самосогласованными источниками.

§1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Применение метода обратной задачи рассеяния для интегрирования системы (1)-(3) основывается на следующем. Возьмем оператор L вида (6), (7). Пусть, далее, оператор A имеет вид [1]:

$$A = -i(2\Lambda\partial^2 + U\partial + \partial \cdot U + \Lambda U^2). \tag{11}$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$[A,L] = -i(2\Lambda U^3 + \Lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}),$$

т.е.

$$[A,L] = \begin{vmatrix} 0 & \Delta \\ \bar{\Delta} & 0 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\Delta = -i(2|u|^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}). \tag{13}$$

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$(L - i\zeta) f_0 = 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \tilde{\Psi}_n f_0, \quad n = 1, \ldots, 2N, \tag{14}$$

относительно неизвестных величин f_0, f_1, ..., f_{2N}. Здесь и всюду в дальнейшем знак " ~ " означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. При этом мы будем считать, что f_0 - квадратная матрица второго порядка, Ψ_1, ..., Ψ_{2N} - векторы-столбцы с двумя компонентами каждый и, следовательно, f_1, ..., f_{2N} являются двухкомпонентными векторами-строками. С помощью решения f_0, f_1, ..., f_{2N} системы (14) определим величины g_0, g_1, ..., g_{2N} посредством равенств

$$\begin{gathered} g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + A f_0 + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n f_n, \\ g_n = \tilde{\Psi}_n \Lambda f_0 - i(\zeta - \zeta_n) f_n, \quad n = 1, \ldots, 2N, \end{gathered} \tag{15}$$

где Φ_1, ..., Φ_{2N} - векторы-столбцы с двумя компонентами каждый и, следовательно, g_0 является квадратной матрицей второго порядка, а g_1, ..., g_{2N} являются двухкомпонентными векторами-строками. Выясним, далее, каким условиям должны удовлетворять матрица U и векторы Φ_1, ..., Φ_{2N}, Ψ_1, ..., Ψ_{2N} для того, чтобы определенные выше величины g_0, g_1, ..., g_{2N} удовлетворяли соотношениям

$$(L - i\zeta) g_0 = \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n g_n, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, \ldots, 2N. \tag{16}$$

С помощью несложных вычислений нетрудно убедиться, что для справедливости этих соотношений необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = \sum_{n=1}^{2N} [\Lambda, \Phi_n \tilde{\Psi}_n],$$

$$(L - i\zeta_n)\,\Phi_n = (\tilde{L} - i\zeta_n)\,\Psi_n = 0, \quad n = 1, \ldots, 2N, \tag{17}$$

где

$$\tilde{L} = -\Lambda\partial + \tilde{U}. \tag{18}$$

Возьмем теперь матрицу σ вида

$$\sigma = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что в силу (7) выполняются равенства $\sigma\Lambda\sigma = -\Lambda$, $\sigma U \sigma = \tilde{U}$, т.е. с учетом (6) и (18) получаем равенство $\sigma L \sigma = \tilde{L}$. Отсюда следует, что если вектор-столбец $\Phi = \Phi_0$ удовлетворяет уравнению

$$(L - i\zeta)\,\Phi = 0 \tag{20}$$

при $\zeta = \zeta_0$, то вектор-столбец $\Psi = \sigma\Phi_0$ удовлетворяет уравнению

$$(\tilde{L} - i\zeta)\,\Psi = 0 \tag{21}$$

при том же самом значении параметра $\zeta = \zeta_0$. Далее, пусть $E = \Lambda\sigma$. Согласно (7) и (19) справедливы равенства $E\Lambda\tilde{E} = -\Lambda$, $EU\tilde{E} = -\bar{U} = -\tilde{\bar{U}}$, т.е. в соответствии с (6) и (18) находим, что $EL\tilde{E} = -\bar{L}$, $E\tilde{L}\tilde{E} = -L^*$, где $\bar{L} = \Lambda\partial + \bar{U}$, $L^* = -\Lambda\partial + U$. Таким образом, получаем, что если вектор-столбец $\Phi = \Phi_0$ удовлетворяет уравнению (20) при $\zeta = \zeta_0$, то вектор-столбец $\Phi = E\bar{\Phi}_0$ удовлетворяет этому же уравнению, но при $\zeta = \bar{\zeta}_0$. Более того, если вектор-столбец $\Psi = \Psi_0$ удовлетворяет уравнению (21) при $\zeta = \zeta_0$, то вектор-столбец $\Psi = E\bar{\Psi}_0$ также удовлетворяет уравнению (21), но при $\zeta = \bar{\zeta}_0$. С учетом сказанного выше положим при $n = 1, \ldots, N$

$$\Phi_n = \begin{vmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{vmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{vmatrix} q_n \\ p_n \end{vmatrix}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{22}$$

Предположим, наконец, что при $n=1, \ldots, N$ выполняется условие $\zeta_{N+n}=\bar{\zeta}_n$, и в соответствии с этим условием положим

$$\Phi_{N+n}=\begin{vmatrix} \bar{\psi}_n \\ -\bar{\phi}_n \end{vmatrix}, \quad \Psi_{N+n}=\begin{vmatrix} \bar{p}_n \\ -\bar{q}_n \end{vmatrix}, \quad n=1,\ldots,N. \tag{23}$$

Отсюда следует равенство

$$\sum_{n=1}^{2N} [\Lambda, \Phi_n \tilde{\Psi}_n] = 2\begin{vmatrix} 0 & \gamma \\ \bar{\gamma} & 0 \end{vmatrix}, \tag{24}$$

где

$$\gamma = \sum_{n=1}^{N} (\phi_n p_n - \bar{\psi}_n \bar{q}_n). \tag{25}$$

Таким образом, если векторы-столбцы Φ_n и Ψ_n вида (22) удовлетворяют соответственно уравнениям (20) и (21) при $\zeta=\zeta_n$, то их компоненты ϕ_n, ψ_n и p_n, q_n удовлетворяют соответственно уравнениям (2) и (3), $n=1, \ldots, N$. Далее, определенные посредством (23) векторы-столбцы Φ_{N+n}и Ψ_{N+n}согласно сказанному ранее удовлетворяют соответственно уравнениям (20) и (21) при $\zeta=\zeta_{N+n}=\bar{\zeta}_n$, $n=1, \ldots, N$. Наконец, в силу (6), (7), (12), (13), (24) и (25) первое уравнение системы (17) эквивалентно уравнению (1). Это значит, что соотношения (16) при указанном выше выборе векторов Φ_n и Ψ_n, $n=1, \ldots, 2N$, эквивалентны системе уравнений (1) - (3).

Замечательной особенностью соотношений (16) является то, что с их помощью удается получить эволюционные уравнения для всех данных рассеяния оператора L вида (6), (7) с потенциалом $u=u(x,t)$, удовлетворяющим системе (1) - (3). Это позволяет назвать соотношения (16) определяющими соотношениями. Отметим, что метод определяющих соотношений впервые был использован в работе /2/ для интегрирования уравнения Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником, а несколько позже было показано /3/, что этот метод применим к интегрированию многих других нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, в частности, и для интегрирования нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе содержатся вспомогательные утверждения о свойствах решений уравнения (20), сформулированные в удобном для использования в настоящей статье виде.

Итак, пусть f_0^- и f_0^+ – матричные решения уравнения

$$(L - i\zeta) f_0 = 0, \tag{26}$$

при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ обладающие асимптотиками

$$\begin{aligned} &f_0^- \sim \exp(i\zeta \Lambda x), \quad \text{если} \quad x \to -\infty, \\ &f_0^+ \sim \exp(i\zeta \Lambda x), \quad \text{если} \quad x \to \infty. \end{aligned} \tag{27}$$

Как нетрудно убедиться, матрицы f_0^- и f_0^+ при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} &f_0^- = \exp(i\zeta\Lambda x) - \int_{-\infty}^{x} \exp[i\zeta\Lambda(x-z)]\Lambda U(z) f_0^-(z,\zeta)\,dz, \\ &f_0^+ = \exp(i\zeta\Lambda x) + \int_{x}^{\infty} \exp[i\zeta\Lambda(x-z)]\Lambda U(z) f_0^+(z,\zeta)\,dz. \end{aligned} \tag{28}$$

Положим

$$f_0^- = \begin{vmatrix} \phi_1^- & \phi_2^- \\ \psi_1^- & \psi_2^- \end{vmatrix}, \qquad f_0^+ = \begin{vmatrix} \phi_1^+ & \phi_2^+ \\ \psi_1^+ & \psi_2^+ \end{vmatrix}. \tag{29}$$

Подставляя эти выражения в равенства (28), легко находим, что между ϕ_1^- и ψ_1^- имеется связь вида

$$\begin{aligned} &\phi_1^- = \exp(i\zeta x) - \int_{-\infty}^{x} \exp[i\zeta(x-z)]\,u(z)\,\psi_1^-(z,\zeta)\,dz, \\ &\psi_1^- = \int_{-\infty}^{x} \exp[-i\zeta(x-z)]\,\bar{u}(z)\,\phi_1^-(z,\zeta)\,dz \end{aligned} \tag{30}$$

и аналогичная связь между ϕ_2^- и ψ_2^-:

$$\begin{aligned} &\phi_2^- = -\int_{-\infty}^{x} \exp[i\zeta(x-z)]\,u(z)\,\psi_2^-(z,\zeta)\,dz, \\ &\psi_2^- = \exp(-i\zeta x) + \int_{-\infty}^{x} \exp[-i\zeta(x-z)]\,\bar{u}(z)\,\phi_2^-(z,\zeta)\,dz. \end{aligned} \tag{31}$$

Кроме того, между ϕ_1^+ и ψ_1^+ выполняется связь вида

$$\phi_1^+ = \exp(i\zeta x) + \int_x^\infty \exp[\,i\zeta(x-z)]\,u(z)\,\psi_1^+(z,\zeta)\,dz,$$
$$\psi_1^+ = -\int_x^\infty \exp[\,-i\zeta(x-z)]\,\bar{u}(z)\,\phi_1^+(z,\zeta)\,dz \qquad (32)$$

и аналогичная связь между ϕ_2^+ и ψ_2^+:

$$\phi_2^+ = \int_x^\infty \exp[\,i\zeta(x-z)]\,u(z)\,\psi_2^+(z,\zeta)\,dz,$$
$$\psi_2^+ = \exp(-i\zeta x) - \int_x^\infty \exp[\,-i\zeta(x-z)]\,\bar{u}(z)\,\phi_2^+(z,\zeta)\,dz. \qquad (33)$$

При любом $\zeta \in (-\infty,\infty)$ для решения уравнений (30) - (33) применим метод последовательных приближений. Получаемые таким образом решения уравнения (26) обладают рядом замечательных свойств. Для описания этих свойств положим

$$\phi_1^-(x,\zeta) = \hat{\phi}_1^-(x,\zeta)\exp(i\zeta x), \quad \psi_1^-(x,\zeta) = \hat{\psi}_1^-(x,\zeta)\exp(i\zeta x),$$
$$\phi_2^+(x,\zeta) = \hat{\phi}_2^+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x), \quad \psi_2^+(x,\zeta) = \hat{\psi}_2^+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x). \qquad (34)$$

Подставляя эти выражения в равенства (30) и (33), получаем следующие интегральные уравнения:

$$\hat{\phi}_1^-(x,\zeta) = 1 - \int_{-\infty}^x u(z)\,\hat{\psi}_1^-(z,\zeta)\,dz,$$
$$\hat{\psi}_1^-(x,\zeta) = \int_{-\infty}^x \exp[\,-2i\zeta(x-z)]\,\bar{u}(z)\,\hat{\phi}_1^-(z,\zeta)\,dz,$$
$$\hat{\phi}_2^+(x,\zeta) = \int_x^\infty \exp[\,2i\zeta(x-z)]\,u(z)\,\hat{\psi}_2^+(z,\zeta)\,dz, \qquad (35)$$
$$\hat{\psi}_2^+(x,\zeta) = 1 - \int_x^\infty \bar{u}(z)\,\hat{\phi}_2^+(z,\zeta)\,dz.$$

Из этих уравнений следует, что функции $\hat{\phi}_1^-$, $\hat{\psi}_1^-$ и $\hat{\phi}_2^+$, $\hat{\psi}_2^+$ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$. Кроме того, в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \le 0$ справедливы асимптотики

$$\hat{\phi}_1^-(x,\zeta) \to 1, \quad \hat{\psi}_1^-(x,\zeta) \to 0, \quad \text{если} \quad x \to -\infty,$$
$$\hat{\phi}_2^+(x,\zeta) \to 0, \quad \hat{\psi}_2^+(x,\zeta) \to 1, \quad \text{если} \quad x \to \infty. \qquad (36)$$

В силу (34) это значит, что в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \le 0$ имеют место равенства

$$\lim_{x\to-\infty} [\phi_1^-(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = \lim_{x\to\infty} [\psi_2^+(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = 1, \tag{37}$$
$$\lim_{x\to-\infty} [\psi_1^-(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = \lim_{x\to\infty} [\phi_2^+(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = 0.$$

Таким образом, при любом ζ, принадлежащем нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$, решение ϕ_1^-, ψ_1^- экспоненциально убывает при $x\to-\infty$, а решение ϕ_2^+, ψ_2^+ экспоненциально убывает при $x\to\infty$. Далее, положим

$$\begin{gathered}\phi_2^-(x,\zeta) = \hat\phi_2^-(x,\zeta)\exp(-i\zeta x), \quad \psi_2^-(x,\zeta) = \hat\psi_2^-(x,\zeta)\exp(-i\zeta x),\\ \phi_1^+(x,\zeta) = \hat\phi_1^+(x,\zeta)\exp(i\zeta x), \quad \psi_1^+(x,\zeta) = \hat\psi_1^+(x,\zeta)\exp(i\zeta x).\end{gathered} \tag{38}$$

После подстановки этих выражений в равенства (31) и (32) получим следующие интегральные уравнения:

$$\begin{aligned}
\hat\phi_2^-(x,\zeta) &= -\int_{-\infty}^{x} \exp[2i\zeta(x-z)]\, u(z)\, \hat\psi_2^-(z,\zeta)\, dz,\\
\hat\psi_2^-(x,\zeta) &= 1 + \int_{-\infty}^{x} \bar u(z)\, \hat\phi_2^-(z,\zeta)\, dz,\\
\hat\phi_1^+(x,\zeta) &= 1 + \int_{x}^{\infty} u(z)\, \hat\psi_1^+(z,\zeta)\, dz,\\
\hat\psi_1^+(x,\zeta) &= -\int_{x}^{\infty} \exp[-2i\zeta(x-z)]\, \bar u(z)\, \hat\phi_1^+(z,\zeta)\, dz.
\end{aligned} \tag{39}$$

Из этих уравнений следует, что функции $\hat\phi_2^-$, $\hat\psi_2^-$ и $\hat\phi_1^+$, $\hat\psi_1^+$ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Более того, в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \ge 0$ имеют место асимптотики

$$\begin{gathered}\hat\phi_2^-(x,\zeta)\to 0, \quad \hat\psi_2^-(x,\zeta)\to 1, \text{ если } x\to-\infty,\\ \hat\phi_1^+(x,\zeta)\to 1, \quad \hat\psi_1^+(x,\zeta)\to 0, \text{ если } x\to\infty.\end{gathered} \tag{40}$$

С учетом (38) это значит, что в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \ge 0$ справедливы равенства

$$\lim_{x\to-\infty}[\phi_2^-(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = \lim_{x\to\infty}[\psi_1^+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}[\psi_2^-(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = \lim_{x\to\infty}[\phi_1^+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = 1. \qquad (41)$$

Таким образом, при любом ζ, принадлежащем верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$, решение ϕ_2^-, ψ_2^- экспоненциально убывает при $x\to-\infty$, а решение ϕ_1^+, ψ_1^+ экспоненциально убывает при $x\to\infty$.

При любом $\zeta\in(-\infty,\infty)$ выполняется равенство

$$f_0^+(x,\zeta) = f_0^-(x,\zeta)\,S(\zeta), \qquad (42)$$

где элементы $S_{\alpha\beta}(\zeta)$ матрицы $S(\zeta)$ не зависят от x, $\alpha,\beta = 1,2$. С помощью (27), (29) и (42) легко находим, что при любом $\zeta\in(-\infty,\infty)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}
S_{11}(\zeta) &= \phi_1^+(x,\zeta)\,\psi_2^-(x,\zeta) - \psi_1^+(x,\zeta)\,\phi_2^-(x,\zeta),\\
S_{12}(\zeta) &= \phi_2^+(x,\zeta)\,\psi_2^-(x,\zeta) - \psi_2^+(x,\zeta)\,\phi_2^-(x,\zeta),\\
S_{21}(\zeta) &= \psi_1^+(x,\zeta)\,\phi_1^-(x,\zeta) - \phi_1^+(x,\zeta)\,\psi_1^-(x,\zeta),\\
S_{22}(\zeta) &= \psi_2^+(x,\zeta)\,\phi_1^-(x,\zeta) - \phi_2^+(x,\zeta)\,\psi_1^-(x,\zeta).
\end{aligned} \qquad (43)$$

В соответствии со сказанным выше из этих равенств следует, что функция $S_{11}(\zeta)$ допускает аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$, а функция $S_{22}(\zeta)$ допускает аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta<0$. Нулям $\zeta=\zeta_n$ функции $S_{11}(\zeta)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ соответствуют точки дискретного спектра оператора L, так как согласно (43) при $\zeta=\zeta_n$ справедливы равенства

$$\phi_1^+(x,\zeta_n) = B_n\,\phi_2^-(x,\zeta_n), \quad \psi_1^+(x,\zeta_n) = B_n\psi_2^-(x,\zeta_n), \qquad (44)$$

где величины B_n не зависят от x. Аналогичным образом нулям $\zeta=\hat\zeta_n$ функции $S_{22}(\zeta)$ в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta<0$ также соответствуют точки дискретного спектра оператора L, поскольку на основе (43) при $\zeta=\hat\zeta_n$ выполняются равенства

$$\phi_2^+(x,\hat\zeta_n) = \hat B_n\phi_1^-(x,\hat\zeta_n), \quad \psi_2^+(x,\hat\zeta_n) = \hat B_n\psi_1^-(x,\hat\zeta_n), \qquad (45)$$

где величины $\hat B_n$ также не зависят от x.

В силу (26), (27) и (29) при любом вещественном ζ имеют место равенства

$$\phi_2^-(x,\zeta) = -\bar\psi_1^-(x,\zeta), \quad \psi_2^-(x,\zeta) = \bar\phi_1^-(x,\zeta),$$

$$\phi_2^+(x,\zeta) = -\bar{\psi}_1^+(x,\zeta), \quad \psi_2^+(x,\zeta) = \bar{\phi}_1^+(x,\zeta).$$

С учетом (43) отсюда следует, что при любом вещественном ζ справедливы равенства

$$S_{11}(\zeta) = \phi_1^+(x,\zeta)\,\bar{\phi}_1^-(x,\zeta) + \psi_1^+(x,\zeta)\,\bar{\psi}_1^-(x,\zeta),$$

$$S_{22}(\zeta) = \bar{\phi}_1^+(x,\zeta)\,\phi_1^-(x,\zeta) + \bar{\psi}_1^+(x,\zeta)\,\psi_1^-(x,\zeta),$$

$$S_{12}(\zeta) = \bar{\phi}_1^+(x,\zeta)\,\bar{\psi}_1^-(x,\zeta) - \bar{\psi}_1^+(x,\zeta)\,\bar{\phi}_1^-(x,\zeta),$$

$$S_{21}(\zeta) = -\phi_1^+(x,\zeta)\,\psi_1^-(x,\zeta) + \psi_1^+(x,\zeta)\,\phi_1^-(x,\zeta),$$

т.е. при любом вещественном ζ выполняются соотношения

$$S_{22}(\zeta) = \bar{S}_{11}(\zeta), \quad S_{21}(\zeta) = -\bar{S}_{12}(\zeta). \tag{46}$$

Таким образом, согласно (27) и (42) при любом вещественном ζ имеет место равенство

$$\det S(\zeta) = |S_{11}(\zeta)|^2 + |S_{12}(\zeta)|^2 = 1.$$

Далее, при любом ζ, принадлежащем верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, в силу (26), (27) и (29) справедливы равенства

$$\begin{gathered}\bar{\phi}_2^-(x,\zeta) = -\psi_1^-(x,\bar{\zeta}), \quad \bar{\psi}_2^-(x,\zeta) = \phi_1^-(x,\bar{\zeta}),\\ \phi_2^+(x,\bar{\zeta}) = -\bar{\psi}_1^+(x,\zeta), \quad \psi_2^+(x,\bar{\zeta}) = \bar{\phi}_1^+(x,\zeta).\end{gathered} \tag{47}$$

На основе этих равенств с учетом (43) получаем, что

$$\bar{S}_{11}(\zeta) = \phi_1^-(x,\bar{\zeta})\,\psi_2^+(x,\bar{\zeta}) - \psi_1^-(x,\bar{\zeta})\,\phi_2^+(x,\bar{\zeta}).$$

Сравнивая это равенство с вытекающим из (43) равенством

$$S_{22}(\bar{\zeta}) = \phi_1^-(x,\bar{\zeta})\,\psi_2^+(x,\bar{\zeta}) - \psi_1^-(x,\bar{\zeta})\,\phi_2^+(x,\bar{\zeta}),$$

убеждаемся, что при любом ζ, принадлежащем верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, выполняется соотношение

$$\bar{S}_{11}(\zeta) = S_{22}(\bar{\zeta}), \quad \mathrm{Im}\,\zeta > 0. \tag{48}$$

Отсюда, в частности, следует, что каждому нулю $\zeta = \zeta_n$ функции $S_{11}(\zeta)$, лежащему в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, соответствует лежащий в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$ нуль $\zeta = \hat{\zeta}_n$ функции $S_{22}(\zeta)$, такой, что $\hat{\zeta}_n = \bar{\zeta}_n$. Далее, в соответствии с равенствами (44), (45) и (47) находим, что между величинами B_n и $\hat{B}_n$ имеется связь: $\hat{B}_n = -\bar{B}_n$.

С помощью интегральных уравнений (35) легко убеждаемся, что при любом ζ, принадлежащем нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$, имеют место асимптотики

$$\hat{\psi}_1^-(x,\zeta) \to 0, \text{ если } x \to \infty,$$
$$\hat{\phi}_2^+(x,\zeta) \to 0, \text{ если } x \to -\infty.$$

В силу (34), (36) и (43) отсюда следует, что при любом ζ, принадлежащем нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$, справедливы асимптотики

$$\hat{\phi}_1^-(x,\zeta) \to S_{22}(\zeta), \text{ если } x \to \infty,$$
$$\hat{\psi}_2^+(x,\zeta) \to S_{22}(\zeta), \text{ если } x \to -\infty.$$

Таким образом, на основе (34) получаем, что при любом ζ, принадлежащем нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$, выполняются равенства

$$\lim_{x\to\infty} [\phi_1^-(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = \lim_{x\to-\infty} [\psi_2^+(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = S_{22}(\zeta),$$
$$\lim_{x\to\infty} [\psi_1^-(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = \lim_{x\to-\infty} [\phi_2^+(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = 0. \tag{49}$$

Аналогичным образом с помощью интегральных уравнений (39) получаем, что при любом ζ, принадлежащем верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, имеют место асимптотики

$$\hat{\phi}_2^-(x,\zeta) \to 0, \text{ если } x \to \infty,$$
$$\hat{\psi}_1^+(x,\zeta) \to 0, \text{ если } x \to -\infty.$$

С учетом (38), (40) и (43) отсюда следует, что при любом ζ, принадлежащем верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, справедливы асимптотики

$$\hat{\psi}_2^-(x,\zeta) \to S_{11}(\zeta), \text{ если } x \to \infty,$$
$$\hat{\phi}_1^+(x,\zeta) \to S_{11}(\zeta), \text{ если } x \to -\infty.$$

Таким образом, в соответствии с (38) находим, что при любом ζ, принадлежащем верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, выполняются равенства

$$\lim_{x\to\infty}[\phi_2^-(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = \lim_{x\to-\infty}[\psi_1^+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty}[\psi_2^-(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = \lim_{x\to-\infty}[\phi_1^+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = S_{11}(\zeta). \tag{50}$$

§ 3. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ S-МАТРИЦЫ В СЛУЧАЕ ИСТОЧНИКА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УСЛОВИЯМ (5)

Теперь мы в состоянии приступить к получению эволюционных уравнений для данных рассеяния оператора L вида (6), (7) с потенциалом $u = u(x,t)$, удовлетворяющим системе (1)-(3). Однако, чтобы избежать при этом излишне громоздких формул, нахождение этих уравнений осуществим отдельно сначала для случая источника, удовлетворяющего условиям (5), а затем в случае источника, удовлетворяющего условиям (8).

Итак, возьмем произвольным образом N точек $\zeta = \zeta_n$, $n=1,\ldots,N$, лежащих в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$, и в соответствии с равенствами (22) положим при $n = 1,\ldots,N$

$$\Phi_n^- = \begin{vmatrix}\phi_n^-(x)\\ \psi_n^-(x)\end{vmatrix} = \alpha_n^- \begin{vmatrix}\phi_1^+(x,\zeta_n)\\ \psi_1^+(x,\zeta_n)\end{vmatrix},$$
$$\Psi_n^- = \begin{vmatrix}q_n^-(x)\\ p_n^-(x)\end{vmatrix} = \beta_n^- \begin{vmatrix}\psi_2^-(x,\zeta_n)\\ \phi_2^-(x,\zeta_n)\end{vmatrix}, \tag{51}$$

$$\Phi_n^+ = \begin{vmatrix}\phi_n^+(x)\\ \psi_n^+(x)\end{vmatrix} = \alpha_n^+ \begin{vmatrix}\phi_2^-(x,\zeta_n)\\ \psi_2^-(x,\zeta_n)\end{vmatrix}, \tag{52}$$
$$\Psi_n^+ = \begin{vmatrix}q_n^+(x)\\ p_n^+(x)\end{vmatrix} = \beta_n^+ \begin{vmatrix}\psi_1^+(x,\zeta_n)\\ \phi_1^+(x,\zeta_n)\end{vmatrix},$$

где величины α_n^-, β_n^- и α_n^+, β_n^+ не зависят от x. Далее, с учетом (23) и (47) положим при $n = 1, \ldots, N$

$$\Phi_{N+n}^- = \begin{vmatrix}\bar\psi_n^-(x)\\ -\bar\phi_n^-(x)\end{vmatrix} = \bar\alpha_n^- \begin{vmatrix}\bar\psi_1^+(x,\zeta_n)\\ -\bar\phi_1^+(x,\zeta_n)\end{vmatrix} = -\bar\alpha_n^- \begin{vmatrix}\phi_2^+(x,\bar\zeta_n)\\ \psi_2^+(x,\bar\zeta_n)\end{vmatrix},$$
$$\Psi_{N+n}^- = \begin{vmatrix}\bar p_n^-(x)\\ -\bar q_n^-(x)\end{vmatrix} = \bar\beta_n^- \begin{vmatrix}\bar\phi_2^-(x,\zeta_n)\\ -\bar\psi_2^-(x,\zeta_n)\end{vmatrix} = -\bar\beta_n^- \begin{vmatrix}\psi_1^-(x,\bar\zeta_n)\\ \phi_1^-(x,\bar\zeta_n)\end{vmatrix}, \tag{53}$$

$$
\Phi^+_{N+n} = \begin{vmatrix} \bar\psi^+_n(x) \\ -\bar\phi^+_n(x) \end{vmatrix} = \bar a^+_n \begin{vmatrix} \bar\psi^-_2(x,\zeta_n) \\ -\bar\phi^-_2(x,\zeta_n) \end{vmatrix} = \bar a^+_n \begin{vmatrix} \phi^-_1(x,\bar\zeta_n) \\ \psi^-_1(x,\bar\zeta_n) \end{vmatrix},
$$

$$
\Psi^+_{N+n} = \begin{vmatrix} \bar p^+_n(x) \\ -\bar q^+_n(x) \end{vmatrix} = \bar\beta^+_n \begin{vmatrix} \bar\phi^+_1(x,\zeta_n) \\ -\bar\psi^+_1(x,\zeta_n) \end{vmatrix} = \bar\beta^+_n \begin{vmatrix} \psi^+_2(x,\bar\zeta_n) \\ \phi^+_2(x,\bar\zeta_n) \end{vmatrix}. \tag{54}
$$

Согласно (25) и (51)-(54) величины

$$
\gamma^- = \sum_{n=1}^{N} (\phi^-_n p^-_n - \bar\psi^-_n \bar q^-_n); \qquad \gamma^+ = \sum_{n=1}^{N} (\phi^+_n p^+_n - \bar\psi^+_n \bar q^+_n)
$$

могут быть представлены в следующем виде:

$$
\gamma^- = \sum_{n=1}^{N} [\, c^-_n \phi^+_1(x,\zeta_n)\, \phi^-_2(x,\zeta_n) + \bar c^-_n \phi^-_1(x,\bar\zeta_n)\, \phi^+_2(x,\bar\zeta_n)],
$$

$$
\gamma^+ = \sum_{n=1}^{N} [\, c^+_n \phi^+_1(x,\zeta_n)\, \phi^-_2(x,\zeta_n) + \bar c^+_n \phi^-_1(x,\bar\zeta_n)\, \phi^+_2(x,\bar\zeta_n)],
$$

где $c^-_n = \alpha^-_n \beta^-_n$ и $c^+_n = \alpha^+_n \beta^+_n$, $n = 1, \ldots, N$. В силу (37), (41), (49) и (50) отсюда следует, что $|\gamma^-(x)| + |\gamma^+(x)| \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Кроме того, если $c^-_n = c^+_n = c_n$ при $n = 1, \ldots, N$, то имеем тождественно $\gamma^-(x) \equiv \gamma^+(x)$. Это значит, что имеющиеся у нас в данный момент две возможности для получения определяющих соотношений для системы (1)-(3) в итоге приведут к одному и тому же результату, если мы всюду в дальнейшем не будем нарушать условие $c^-_n = c^+_n = c_n$, $n = 1, \ldots, N$. С учетом этого замечания положим при $n = 1, \ldots, 2N$

$$
f^-_n = \int_{-\infty}^{x} \tilde\Psi^-_n(z)\, f^-_0(z,\zeta)\, dz,
$$

$$
f^+_n = -\int_{x}^{\infty} \tilde\Psi^+_n(z)\, f^+_0(z,\zeta)\, dz. \tag{55}
$$

Из этих равенств следует, что f^-_n и f^+_n при $n = 1, \ldots, 2N$ являются векторами-строками соответственно с двумя компонентами $f^-_{n,1}$, $f^-_{n,2}$ и $f^+_{n,1}$, $f^+_{n,2}$ каждый. Очевидно, что в силу (37) и (41) компоненты $f^-_{n,1}$ и $f^+_{n,2}$ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$, а компоненты $f^-_{n,2}$

и $f_{n,1}^{+}$ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, $n = 1, \dots, 2N$.

Наконец, в соответствии с равенствами (15) положим

$$g_0^- = \frac{\partial f_0^-}{\partial t} + A f_0^- + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n^- f_n^-, \tag{56}$$

$$g_n^- = \tilde{\Psi}_n^- \Lambda f_0^- - i(\zeta - \zeta_n) f_n^-, \quad n = 1, \dots, 2N,$$

$$g_0^+ = \frac{\partial f_0^+}{\partial t} + A f_0^+ + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n^+ f_n^+, \tag{57}$$

$$g_n^+ = \tilde{\Psi}_n^+ \Lambda f_0^+ - i(\zeta - \zeta_n) f_n^+, \quad n = 1, \dots, 2N.$$

При этом мы, конечно, подразумеваем, что при $n = 1, \dots, N$ выполняется соотношение $\zeta_{N+n} = \bar{\zeta}_n$. На основе (37), (41) и (55) нетрудно убедиться, что первый столбец матрицы g_0^- и последний столбец матрицы g_0^+ допускает аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$, а последний столбец матрицы g_0^- и первый столбец матрицы g_0^+ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Кроме того, нетрудно видеть, что g_n^- и g_n^+ при $n = 1, \dots, 2N$ являются векторами-строками соответственно с двумя компонентами $g_{n,1}^-$, $g_{n,2}^-$ и $g_{n,1}^+$, $g_{n,2}^+$ каждый. При этом согласно (37), (41) и (55) компоненты $g_{n,1}^-$ и $g_{n,2}^+$ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$, а компоненты $g_{n,2}^-$ и $g_{n,1}^+$ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, $n = 1, \dots, 2N$. На основе равенств (41) и (51)-(54) при $n = 1, \dots, 2N$ имеют место асимптотики

$$\|\Psi_n^-(x)\| \to 0, \text{ если } x \to -\infty,$$
$$\|\Psi_n^+(x)\| \to 0, \text{ если } x \to \infty.$$

Отсюда в силу (55)-(57) следует, что при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ и $n = 1, \dots, 2N$ справедливы асимптотики

$$\|f_n^-(x,\zeta)\| + \|g_n^-(x,\zeta)\| \to 0, \quad \text{если } x \to -\infty,$$
$$\|f_n^+(x,\zeta)\| + \|g_n^+(x,\zeta)\| \to 0, \quad \text{если } x \to \infty.$$

Таким образом, с учетом тождеств $\dfrac{\partial g_n^-}{\partial x} = \dfrac{\partial g_n^+}{\partial x} \equiv 0$, $n = 1, \dots, 2N$, получаем, что при $x, \zeta \in (-\infty, \infty)$ выполняются тождества

$$g_n^-(x,\zeta) = g_n^+(x,\zeta) \equiv 0, \quad n = 1, \ldots, 2N. \tag{58}$$

Это значит, что в соответствии с соотношениями (16) матрицы g_0^- и g_0^+ при любом вещественном ζ удовлетворяют уравнениям

$$(L - i\zeta)\, g_0^- = (L - i\zeta)\, g_0^+ = 0. \tag{59}$$

Согласно (4), (11) и (51)-(57) отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} g_0^-(x,\zeta) &= f_0^-(x,\zeta)\,(2i\zeta^2\Lambda + C_0^-)\,, \\ g_0^+(x,\zeta) &= f_0^+(x,\zeta)\,(2i\zeta^2\Lambda + C_0^+)\,, \end{aligned} \tag{60}$$

где.

$$\begin{aligned} C_0^- &= \operatorname{diag}\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{S_{11}(\zeta_n)}{i(\zeta-\zeta_n)} c_n^-, \; - \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{22}(\bar\zeta_n)}{i(\zeta-\bar\zeta_n)} \bar c_n^- \Big)\,, \\ C_0^+ &= \operatorname{diag}\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{S_{22}(\bar\zeta_n)}{i(\zeta-\bar\zeta_n)} \bar c_n^+, \; - \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{11}(\zeta_n)}{i(\zeta-\zeta_n)} c_n^+ \Big)\,. \end{aligned} \tag{61}$$

Рассмотрим теперь матрицу G_0 вида

$$G_0 = g_0^+(x,\zeta) - g_0^-(x,\zeta)\, S(\zeta)\,. \tag{62}$$

На основе (42) и (60) получаем, что

$$G_0 = f_0^-(x,\zeta)\,\{-2i\zeta^2[\Lambda, S(\zeta)] - C_0^- S(\zeta) + S(\zeta)\, C_0^+\}. \tag{63}$$

С другой стороны, в силу (42), (56) и (57) выполняется равенство

$$\begin{aligned} g_0^+(x,\zeta) &= g_0^-(x,\zeta)\, S(\zeta) + f_0^-(x,\zeta)\, \frac{\partial S(\zeta)}{\partial t} + \\ &+ \sum_{n=1}^{N} [\, \Phi_n^+(x)\, f_n^+(x,\zeta) - \Phi_n^-(x)\, f_n^-(x,\zeta)\, S(\zeta)]\,. \end{aligned} \tag{64}$$

С помощью равенств (37), (41), (42), (50), (51), (53) и (55) нетрудно убедиться, что при любом $\zeta \in (-\infty,\infty)$, $n = 1, \ldots, N$ и $x \to \infty$ справедливы асимптотики

$$\Phi_n^-(x)\, f_n^-(x,\zeta)\, S(\zeta) \sim P c_n^- \frac{S_{11}(\zeta_n)}{i(\zeta-\zeta_n)} \exp(i\zeta x)\,,$$

$$\Phi^{-}_{N+n}(x)\, f^{-}_{N+n}(x,\zeta)\, S(\zeta) \sim Q\bar{c}^{-}_{n}\frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{i(\zeta-\bar{\zeta}_n)}\exp(-i\zeta x),$$

где $P=\mathrm{diag}(1,\ 0)$ и $Q=\mathrm{diag}(0,\ -1)$. Далее, с учетом равенств (37), (41), (42), (50), (52), (54) и (55) убеждаемся, что при любом $\zeta\in(-\infty,\infty)$, $n=1,\ldots,N$ и $x\to\infty$ имеют место асимптотики

$$\Phi^{+}_{n}(x)\, f^{+}_{n}(x,\zeta) \sim Q c^{+}_{n}\frac{S_{11}(\zeta_n)}{i(\zeta-\zeta_n)}\exp(-i\zeta x),$$

$$\Phi^{+}_{N+n}(x)\, f^{+}_{N+n}(x,\zeta) \sim P\,\bar{c}^{+}_{n}\frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{i(\zeta-\bar{\zeta}_n)}\exp(i\zeta x).$$

Согласно (59), (61) и (64) отсюда следует равенство

$$\sum_{n=1}^{2N}[\Phi^{+}_{n}(x)\, f^{+}_{n}(x,\zeta)-\Phi^{-}_{n}(x)\, f^{-}_{n}(x,\zeta)\, S(\zeta)]=$$

$$=f^{+}_{0}(x,\zeta)(C^{+}_{0}-C^{-}_{0})=f^{-}_{0}(x,\zeta)\, S(\zeta)\,(C^{+}_{0}-C^{-}_{0}).$$

На основе этого равенства соотношение (64) принимает вид

$$g^{+}_{0}(x,\zeta)=g^{-}_{0}(x,\zeta)\, S(\zeta)+f^{-}_{0}(x,\zeta)\,[\,\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t}+S(\zeta)(C^{+}_{0}-C^{-}_{0})].$$

Отсюда следует, что определенная посредством (62) величина G_0 допускает представление

$$G_0=f^{-}_{0}(x,\zeta)[\,\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t}+S(\zeta)\,(C^{+}_{0}-C^{-}_{0})].$$

Сравнивая это равенство с равенством (63), немедленно получаем, что эволюционное уравнение для S-матрицы имеет вид

$$\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t}+[\,2i\zeta^{2}\Lambda+C^{-}_{0}\,,S(\zeta)]=0,$$

т.е.

$$\frac{\partial S_{11}(\zeta)}{\partial t}=\frac{\partial S_{22}(\zeta)}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial S_{12}(\zeta)}{\partial t}+\{4i\zeta^{2}-i\sum_{n=1}^{N}(\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\zeta-\zeta_n}c^{-}_{n}+\frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\zeta-\bar{\zeta}_n}\bar{c}^{-}_{n})\}S_{12}(\zeta)=0, \quad (65)$$

$$\frac{\partial S_{21}(\zeta)}{\partial t}-\{4i\zeta^{2}-i\sum_{n=1}^{N}(\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\zeta-\zeta_n}c^{-}_{n}+\frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\zeta-\bar{\zeta}_n}\bar{c}^{-}_{n})\}S_{21}(\zeta)=0.$$

Нетрудно видеть, что в силу этих уравнений диагональные элементы S-матрицы не зависят от времени t. Это значит, что в случае источника, удовлетворяющего условиям (5), точки дискретного спектра оператора L вида (6), (7) также не зависят от времени, если потенциал $u = u(x,t)$ удовлетворяет системе (1)-(3). Далее, с учетом (48) получаем, что соотношения (46) будут выполняться при любых $\zeta \in (-\infty,\infty)$ и $t > 0$, если они справедливы при любом $\zeta \in (-\infty,\infty)$ и $t = 0$. Наконец, если точки $\zeta = \zeta_n$ являются точками дискретного спектра оператора L, т.е. $S_{11}(\zeta_n) = S_{22}(\bar{\zeta}_n) = 0$, $n = 1,\dots, N$, то уравнения для элементов $S_{12}(\zeta)$ и $S_{21}(\zeta)$ принимают вид

$$\frac{\partial S_{12}(\zeta)}{\partial t} + 4i\zeta^2 S_{12}(\zeta) = \frac{\partial S_{21}(\zeta)}{\partial t} - 4i\zeta^2 S_{21}(\zeta) = 0,$$

т.е. в этом случае эволюционные уравнения для элементов S-матрицы совпадают с теми, которые имеют место в случае нелинейного уравнения Шредингера без источника /1/.

§ 4. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НОРМИРОВОЧНЫХ КОНСТАНТ В СЛУЧАЕ ИСТОЧНИКА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УСЛОВИЯМ (5)

Пусть σ_r^- и σ_r^+ - векторы-столбцы, образованные соответственно элементами r-го столбца матриц f_0^- и f_0^+ вида (29), $r = 1,2$. Пусть, далее, τ_r^- и τ_r^+ - векторы-столбцы, образованные соответственно элементами r-го столбца матриц g_0^- и g_0^+ вида (56) и (57), $r = 1, 2$. Пусть, наконец, $\zeta = \zeta'_m$ - нули функции $S_{11}(\zeta)$, лежащие в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, $m = 1,\dots, m_0$. В соответствии с равенствами (44) и (45) положим при $m = 1,\dots, m_0$

$$\begin{aligned} G_m &= \tau_1^+(x, \zeta'_m) - B_m \tau_2^-(x, \zeta'_m), \\ \hat{G}_m &= \tau_2^+(x, \bar{\zeta}'_m) - \hat{B}_m \tau_1^-(x, \bar{\zeta}'_m). \end{aligned} \qquad (66)$$

Согласно равенствам (60) и (61) имеем

$$\tau_1^+(x,\zeta'_m) = \Big(2i\zeta'^2_m - i\sum_{n=1}^{N} \frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\zeta'_m - \bar{\zeta}_n}\bar{c}_n^+\Big)\,\sigma_1^+(x,\zeta'_m),$$

$$\tau_2^-(x,\zeta'_m) = -\Big(2i\zeta'^2_m - i\sum_{n=1}^{N} \frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\zeta'_m - \bar{\zeta}_n}\bar{c}_n^-\Big)\,\sigma_2^-(x,\zeta'_m),$$

$$\tau_2^+(x,\bar\zeta'_m) = -(2i\bar\zeta'^2_m - i\sum_{n=1}^{N}\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\bar\zeta'_m - \zeta_n} c_n^+)\,\sigma_2^+(x,\bar\zeta'_m),$$

$$\tau_1^-(x,\bar\zeta'_m) = (2i\bar\zeta'^2_m - i\sum_{n=1}^{N}\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\bar\zeta'_m - \zeta_n} c_n^-)\,\sigma_1^-(x,\bar\zeta'_m).$$

С учетом равенств (44) и (45) отсюда следует, что определенные посредством (66) величины G_m и $\hat G_m$ могут быть записаны в следующем виде:

$$G_m = (4i\zeta'^2_m - 2i\sum_{n=1}^{N}\frac{S_{22}(\bar\zeta_n)}{\zeta'_m - \bar\zeta_n}\bar c_n)\,B_m\sigma_2^-(x,\zeta'_m),$$

$$\hat G_m = -(4i\bar\zeta'^2_m - 2i\sum_{n=1}^{N}\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\bar\zeta'_m - \zeta_n}c_n)\,\hat B_m\sigma_1^-(x,\bar\zeta'_m), \tag{67}$$

где $c_n = c_n^- = c_n^+$, $n = 1,\ldots,N$.

С другой стороны, в силу (44) и (45) справедливы равенства

$$\frac{\partial\sigma_1^+(x,\zeta'_m)}{\partial t} = B_m\frac{\partial\sigma_2^-(x,\zeta'_m)}{\partial t} + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\zeta'_m),$$

$$\frac{\partial\sigma_2^+(x,\bar\zeta'_m)}{\partial t} = \hat B_m\frac{\partial\sigma_1^-(x,\bar\zeta'_m)}{\partial t} + \frac{\partial\hat B_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\bar\zeta'_m).$$

С помощью этих равенств на основе (44), (45) и (55)-(57) находим, что

$$\tau_1^+(x,\zeta'_m) = B_m\tau_2^-(x,\zeta'_m) - \sum_{n=1}^{2N}[\Phi_n^-(x)\int_{-\infty}^{x}\tilde\Psi_n^-(z)\,\sigma_2^-(z,\zeta'_m)\,dz + \Phi_n^+(x)\int_{x}^{\infty}\tilde\Psi_n^+(z)\,\sigma_2^-(z,\zeta'_m)\,dz]\,B_m + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\zeta'_m),$$

$$\tau_2^+(x,\bar\zeta'_m) = \hat B_m\tau_1^-(x,\bar\zeta'_m) - \sum_{n=1}^{2N}[\Phi_n^-(x)\int_{-\infty}^{x}\tilde\Psi_n^-(z)\,\sigma_1^-(z,\bar\zeta'_m)\,dz + \Phi_n^+(x)\int_{x}^{\infty}\tilde\Psi_n^+(z)\,\sigma_1^-(z,\bar\zeta'_m)\,dz]\,\hat B_m + \frac{\partial\hat B_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\bar\zeta'_m). \tag{68}$$

Согласно (51)-(54) при $m = 1,\ldots,m_0$ и $n = 1,\ldots,2N$ выполняются равенства

$$i(\zeta'_m-\zeta_n)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Psi}_n^-(z)\,\sigma_2^-(z,\zeta'_m)\,dz=\tilde{\Psi}_n^-(x)\,\Lambda\sigma_2^-(x,\zeta'_m),$$

$$i(\zeta'_m-\zeta_n)\int_{x}^{\infty}\tilde{\Psi}_n^+(z)\,\sigma_2^-(z,\zeta'_m)\,dz=-\tilde{\Psi}_n^+(x)\,\Lambda\sigma_2^-(x,\zeta'_m),$$

$$i(\bar{\zeta}'_m-\zeta_n)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Psi}_n^-(z)\,\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}'_m)\,dz=\tilde{\Psi}_n^-(x)\,\Lambda\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}'_m),$$

$$i(\bar{\zeta}'_m-\zeta_n)\int_{x}^{\infty}\tilde{\Psi}_n^+(z)\,\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}'_m)\,dz=-\tilde{\Psi}_n^+(x)\,\Lambda\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}'_m).$$

При этом мы, конечно, подразумеваем, что $\zeta_{N+n}=\bar{\zeta}_n$, $n=1,\ldots,N$. Далее, в соответствии с (43) и (51)-(54) при $n=1,\ldots,N$ имеют место равенства

$$\Phi_n^-(x)\,\tilde{\Psi}_n^-(x)-\Phi_n^+(x)\,\tilde{\Psi}_n^+(x)=c_n S_{11}(\zeta_n)\,\Lambda,$$

$$\Phi_{N+n}^-(x)\,\tilde{\Psi}_{N+n}^-(x)-\Phi_{N+n}^+(x)\,\tilde{\Psi}_{N+n}^+(x)=-\bar{c}_n S_{22}(\bar{\zeta}_n)\,\Lambda.$$

С учетом этих равенств соотношения (68) принимают вид

$$r_1^+(x,\zeta'_m)=B_m r_2^-(x,\zeta'_m)+\frac{\partial B_m}{\partial t}\,\sigma_2^-(x,\zeta'_m)+$$

$$+i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\zeta'_m-\zeta_n}\,c_n-\frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\zeta'_m-\bar{\zeta}_n}\,\bar{c}_n\right)B_m\sigma_2^-(x,\zeta'_m),$$

$$r_2^+(x,\bar{\zeta}'_m)=\hat{B}_m r_1^-(x,\bar{\zeta}'_m)+\frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t}\,\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}'_m)+$$

$$+i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\bar{\zeta}'_m-\zeta_n}\,c_n-\frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\bar{\zeta}'_m-\bar{\zeta}_n}\,\bar{c}_n\right)\hat{B}_m\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}'_m).$$

Отсюда следует, что определенные посредством (66) величины G_m и $\hat{G}_m$ допускают представление

$$G_m=\left\{\frac{\partial B_m}{\partial t}+i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\zeta'_m-\zeta_n}\,c_n-\frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\zeta'_m-\bar{\zeta}_n}\,\bar{c}_n\right)B_m\right\}\sigma_2^-(x,\zeta'_m),$$

$$\hat{G}_m = \{ \frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t} + i \sum_{n=1}^{N} (\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\bar{\zeta}'_m - \zeta_n} c_n - \frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\bar{\zeta}'_m - \bar{\zeta}_n} \bar{c}_n) \hat{B}_m \} \sigma_1^-(x, \bar{\zeta}'_m).$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (67), немедленно получаем, что эволюционные уравнения для нормировочных констант B_m и $\hat{B}_m$ имеют вид

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} - \{4i\zeta_m'^2 - i \sum_{n=1}^{N} (\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\zeta'_m - \zeta_n} c_n + \frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\zeta'_m - \bar{\zeta}_n} \bar{c}_n)\} B_m = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t} + \{ 4i\bar{\zeta}_m'^2 - i \sum_{n=1}^{N} (\frac{S_{11}(\zeta_n)}{\bar{\zeta}'_m - \zeta_n} c_n + \frac{S_{22}(\bar{\zeta}_n)}{\bar{\zeta}'_m - \bar{\zeta}_n} \bar{c}_n)\} \hat{B}_m = 0. \quad (69)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (65) для элементов S-матрицы, нетрудно убедиться, что эволюционное уравнение для величин B_m получается из уравнения для $S_{21}(\zeta)$, если в нем положить $\zeta = \zeta'_m$, а эволюционное уравнение для величин $\hat{B}_m$ получается из уравнения для $S_{12}(\zeta)$, если в нем положить $\zeta = \bar{\zeta}'_m$, $m = 1, \ldots, m_0$. Далее, из уравнений (69) следует, что если величины B_m и $\hat{B}_m$ при $t = 0$ удовлетворяют соотношению $\hat{B}_m = -\bar{B}_m$, то это соотношение будет выполняться при всех $t > 0$. Наконец, при $m_0 = N$ в уравнениях (69) можно положить $\zeta_n = \zeta'_n + \delta_n$, $n = 1, \ldots, N$, и перейти к пределу при $\delta_n \to 0$. В результате получим уравнения

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} - [4i\zeta_m'^2 + ic_m S'_{11}(\zeta'_m)] B_m = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t} + [4i\bar{\zeta}_m'^2 + i\bar{c}_m S'_{22}(\bar{\zeta}'_m)] \hat{B}_m = 0.$$

Система уравнений (65) и (69) описывает эволюцию во времени всех данных рассеяния, необходимых для решения обратной задачи рассеяния для оператора L вида (6), (7). Таким образом, в случае источника, удовлетворяющего условиям (5), решение задачи Коши для системы (1)-(3) сведено к решению прямой и обратной задач рассеяния для оператора L вида (6), (7).

§ 5. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ S-МАТРИЦЫ В СЛУЧАЕ ИСТОЧНИКА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УСЛОВИЯМ (8)

Рассмотрим теперь другой способ выбора решений линейной системы (2), (3), образующих источник в правой части уравнения (1). Пусть $\zeta=\zeta_n$ - нули функции $s_{11}(\zeta)$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$, $n=1,\dots,N$. В соответствии с равенствами (22) и (23) положим при $n=1,\dots,N$

$$\Phi_n=\begin{vmatrix}\phi_n(x)\\ \psi_n(x)\end{vmatrix},\quad \Psi_n=\begin{vmatrix}q_n(x)\\ p_n(x)\end{vmatrix}=c_n\begin{vmatrix}\psi_1^+(x,\zeta_n)\\ \phi_1^+(x,\zeta_n)\end{vmatrix},$$

$$\Phi_{N+n}=\begin{vmatrix}\bar\psi_n(x)\\ -\bar\phi_n(x)\end{vmatrix},\ \Psi_{N+n}=\begin{vmatrix}\bar p_n(x)\\ -\bar q_n(x)\end{vmatrix}=\bar c_n\begin{vmatrix}\bar\phi_1^+(x,\zeta_n)\\ -\bar\psi_1^+(x,\zeta_n)\end{vmatrix}=\bar c_n\begin{vmatrix}\psi_2^+(x,\bar\zeta_n)\\ \phi_2^+(x,\bar\zeta_n)\end{vmatrix},\tag{70}$$

где величины c_n не зависят от x, а решение $\phi_n(x)$, $\psi_n(x)$ уравнений (2) удовлетворяет условию

$$\phi_n(x)\,\psi_1^+(x,\zeta_n)-\psi_n(x)\,\phi_1^+(x,\zeta_n)\equiv 1,\quad n=1,\dots,N.\tag{71}$$

На основе (41) и (44) из этого равенства следует, что решение $\phi_n(x),\psi_n(x)$ уравнений (2) обладает асимптотиками

$$B_n\phi_n(x)\exp(-i\zeta_n x)\to 1,\quad \psi_n(x)\exp(-i\zeta_n x)\to 0,\ \text{если}\ x\to-\infty,$$
$$\phi_n(x)\exp(i\zeta_n x)\to 0,\quad \psi_n(x)\exp(i\zeta_n x)\to -1,\ \text{если}\ x\to\infty.\tag{72}$$

Согласно (70) определенная посредством (25) величина γ допускает представление

$$\gamma=\sum_{n=1}^{N}[\,c_n\phi_n(x)\,\phi_1^+(x,\zeta_n)-\bar c_n\bar\psi_n(x)\,\bar\psi_1^+(x,\zeta_n)].$$

В силу (41), (44) и (72) отсюда следует, что $\gamma(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$.

Положим теперь при $n=1,\dots,2N$

$$f_n^-=\int_{-\infty}^{x}\tilde\Psi_n(z)\,f_0^-(z,\zeta)\,dz,\qquad f_n^+=-\int_{x}^{\infty}\tilde\Psi_n(z)\,f_0^+(z,\zeta)\,dz.\tag{73}$$

Далее, положим

$$g_0^-=\frac{\partial f_0^-}{\partial t}+Af_0^-+\sum_{n=1}^{2N}\Phi_n f_n^-,$$

$$g_n^-=\tilde\Psi_n\Lambda f_0^--i(\zeta-\zeta_n)\,f_n^-,\quad n=1,\dots,2N,$$

$$g_0^+ = \frac{\partial f_0^+}{\partial t} + A f_0^+ + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n f_n^+ ,$$

$$g_n^+ = \bar{\Psi}_n \Lambda f_0^+ - i(\zeta - \zeta_n) f_n^+ , \quad n = 1, \ldots, 2N, \tag{74}$$

где $\zeta_{N+n} = \bar{\zeta}_n$, $n = 1, \ldots, N$. Нетрудно видеть, что определенные с помощью равенств (73) и (74) величины обладают свойствами, сходными с теми, которые были обнаружены ранее у определенных посредством (55)-(57) величин. Действительно, с учетом (44) и (70) получаем, что при $n = 1, \ldots, 2N$ справедливы асимптотики

$$\| \Psi_n (x) \| \to 0, \quad \text{если} \quad x \to \pm\infty.$$

На этой основе следует, что определенные с помощью (74) величины удовлетворяют равенствам (58) и (59). Далее, в силу (4), (11), (59), (70) и (72)-(74) получаем, что имеют место равенства

$$g_0^-(x,\zeta) = f_0^-(x,\zeta)(2i\zeta^2\Lambda + C^-),$$

$$g_0^+(x,\zeta) = f_0^+(x,\zeta)(2i\zeta^2\Lambda + C^+), \tag{75}$$

где

$$C^- = \mathrm{diag}\left(-\sum_{n=1}^{N} \frac{ic_n}{\zeta - \zeta_n} , \sum_{n=1}^{N} \frac{i\bar{c}_n}{\zeta - \bar{\zeta}_n}\right),$$

$$C^+ = \mathrm{diag}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{i\bar{c}_n}{\zeta - \bar{\zeta}_n}, -\sum_{n=1}^{N} \frac{ic_n}{\zeta - \zeta_n}\right). \tag{76}$$

Рассмотрим теперь матрицу G_0 вида

$$G_0 = g_0^+(x,\zeta) - g_0^-(x,\zeta)\, S(\zeta). \tag{77}$$

С учетом (42) и (75) находим, что

$$G_0 = f_0^-(x,\zeta) \{-2i\zeta^2 [\Lambda, S(\zeta)] - C^- S(\zeta) + S(\zeta)\, C^+ \}. \tag{78}$$

С другой стороны, согласно (42) и (74) справедливо равенство

$$g_0^+(x,\zeta) = g_0^-(x,\zeta)\, S(\zeta) + f_0^-(x,\zeta) \frac{\partial S(\zeta)}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n(x) [f_n^+(x,\zeta) - f_n^-(x,\zeta)\, S(\zeta)]. \tag{79}$$

С помощью равенств (42) и (73) нетрудно убедиться, что при любом $\zeta\in(-\infty,\infty)$ и $n=1, \ldots, 2N$ выполняется равенство

$$f_n^+(x,\zeta) - f_n^-(x,\zeta)\, S(\zeta) = -\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\, f_0^+(z,\zeta)\, dz.$$

В силу (70) правая часть этого равенства равна нулю при любом $\zeta\in(-\infty,\infty)$ и $n=1, \ldots, 2N$. С учетом этого факта равенство (79) принимает вид

$$g_0^+(x,\zeta) = g_0^-(x,\zeta)\, S(\zeta) + f_0^-(x,\zeta)\, \frac{\partial S(\zeta)}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что определенная посредством (77) величина G_0 допускает представление

$$G_0 = f_0^-(x,\zeta)\, \frac{\partial S(\zeta)}{\partial t}.$$

Сравнивая это выражение с выражением (78), немедленно получаем эволюционное уравнение для S-матрицы

$$\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t} + 2i\zeta^2[\Lambda, S(\zeta)] + C^- S(\zeta) - S(\zeta)\, C^+ = 0,$$

т.е. согласно (76) имеем при $\zeta\in(-\infty,\infty)$

$$\frac{\partial S_{11}(\zeta)}{\partial t} - i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\zeta-\zeta_n} + \frac{\bar{c}_n}{\zeta-\bar{\zeta}_n}\right) S_{11}(\zeta) = 0,$$

$$\frac{\partial S_{12}(\zeta)}{\partial t} + 4i\zeta^2 S_{12}(\zeta) = \frac{\partial S_{21}(\zeta)}{\partial t} - 4i\zeta^2 S_{21}(\zeta) = 0, \qquad (80)$$

$$\frac{\partial S_{22}(\zeta)}{\partial t} + i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\zeta-\zeta_n} + \frac{\bar{c}_n}{\zeta-\bar{\zeta}_n}\right) S_{22}(\zeta) = 0.$$

Отсюда следует, что функции $S_{11}(\zeta)$ и $S_{22}(\zeta)$ допускают представление

$$S_{11}(\zeta) = S_1(\zeta)\prod_{n=1}^{N}\frac{\zeta-\zeta_n}{\zeta-\bar{\zeta}_n}, \quad S_{22}(\zeta) = S_2(\zeta)\prod_{n=1}^{N}\frac{\zeta-\bar{\zeta}_n}{\zeta-\zeta_n},$$

где величины $S_1(\zeta)$ и $S_2(\zeta)$ не зависят от времени, а точки $\zeta = \zeta_n$ дискретного спектра удовлетворяют условию

$$\frac{d\zeta_n}{dt} + ic_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N. \qquad (81)$$

В силу (8), (10), (70) и (71) уравнения (9) и (81) эквивалентны друг другу.

§ 6. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НОРМИРОВОЧНЫХ КОНСТАНТ В СЛУЧАЕ ИСТОЧНИКА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УСЛОВИЯМ (8)

Пусть σ_r^- и σ_r^+ - векторы-столбцы, образованные соответственно элементами r-го столбца матриц f_0^- и f_0^+ вида (29), $r = 1, 2$. Пусть, далее, τ_r^- и τ_r^+ - векторы-столбцы, образованные соответственно элементами r-го столбца матриц g_0^- и g_0^+ вида (74), $r=1,2$. Пусть, наконец, $\zeta = \zeta_m$ - нули функции $S_{11}(\zeta)$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, $m = 1, \ldots, N$. В соответствии с равенствами (44) и (45) положим при $m = 1, \ldots, N$

$$G_m = \tau_1^+(x,\zeta_m) - B_m \tau_2^-(x,\zeta_m),$$
$$\hat{G}_m = \tau_2^+(x,\bar{\zeta}_m) - \hat{B}_m \tau_1^-(x,\bar{\zeta}_m). \tag{82}$$

Согласно равенствам (75) и (76) имеем

$$\tau_1^+(x,\zeta_m) = (2i\zeta_m^2 + i\sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{c}_n}{\zeta_m - \bar{\zeta}_n})\,\sigma_1^+(x,\zeta_m),$$

$$\tau_2^-(x,\zeta_m) = -(2i\zeta_m^2 - i\sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{c}_n}{\zeta_m - \bar{\zeta}_n})\,\sigma_2^-(x,\zeta_m),$$

$$\tau_2^+(x,\bar{\zeta}_m) = -(2i\bar{\zeta}_m^2 + i\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\bar{\zeta}_m - \zeta_n})\,\sigma_2^+(x,\bar{\zeta}_m),$$

$$\tau_1^-(x,\bar{\zeta}_m) = (2i\bar{\zeta}_m^2 - i\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\bar{\zeta}_m - \zeta_n})\,\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}_m).$$

С учетом равенств (44) и (45) отсюда следует, что определенные посредством (82) величины G_m и $\hat{G}_m$ могут быть записаны в следующем виде:

$$G_m = 4i\zeta_m^2 B_m \sigma_2^-(x,\zeta_m),$$
$$\hat{G}_m = -4i\bar{\zeta}_m^2 \hat{B}_m \sigma_1^-(x,\bar{\zeta}_m). \tag{83}$$

С другой стороны, в силу (44), (45) и (81) справедливы равенства

$$\frac{\partial\sigma_1^+(x,\zeta_m)}{\partial t} = B_m \frac{\partial\sigma_2^-(x,\zeta_m)}{\partial t} + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\zeta_m) + ic_m\chi_m(x),$$

$$\frac{\partial\sigma_2^+(x,\bar{\zeta}_m)}{\partial t} = \hat{B}_m \frac{\partial\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}_m)}{\partial t} + \frac{\partial\hat{B}_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}_m) - i\bar{c}_m\hat{\chi}_m(x),$$

где

$$\chi_m(x) = \frac{\partial}{\partial\zeta}[\sigma_1^+(x,\zeta) - B_m\sigma_2^-(x,\zeta)]|_{\zeta=\zeta_m},$$
$$\hat{\chi}_m(x) = \frac{\partial}{\partial\zeta}[\sigma_2^+(x,\zeta) - \hat{B}_m\sigma_1^-(x,\zeta)]|_{\zeta=\bar{\zeta}_m}. \tag{84}$$

С помощью этих равенств на основе (44), (45), (73) и (74) находим, что имеют место соотношения

$$r_1^+(x,\zeta_m) = B_m r_2^-(x,\zeta_m) + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\zeta_m) + ic_m\chi_m(x) -$$
$$- B_m \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\,\sigma_2^-(z,\zeta_m)\,dz,$$
$$r_2^+(x,\bar{\zeta}_m) = \hat{B}_m r_1^-(x,\bar{\zeta}_m) + \frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}_m) - i\bar{c}_m\hat{\chi}_m(x) - \tag{85}$$
$$- \hat{B}_m \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\,\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}_m)\,dz.$$

Согласно (70) при $m = 1, \ldots, N$ выполняются равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\,\sigma_2^-(z,\zeta_m)\,dz = 0, \quad \text{если} \quad n \neq m,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\,\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}_m)\,dz = 0, \quad \text{если} \quad n \neq N+m.$$

Кроме того, в соответствии с (43) и (70) при $m = 1,\ldots,N$ справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_m(z)\,\sigma_2^-(z,\zeta_m)\,dz = ic_m S'_{11}(\zeta_m),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_{N+m}(z)\,\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}_m)\,dz = -i\bar{c}_m S'_{22}(\bar{\zeta}_m).$$

С учетом этих равенств соотношения (85) принимают вид

$$r_1^+(x,\zeta_m) = B_m r_2^-(x,\zeta_m) + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\zeta_m) +$$
$$+ ic_m[\chi_m(x) - B_m S'_{11}(\zeta_m)\Phi_m(x)],$$

$$r_2^+(x,\bar\zeta_m) = \hat B_m r_1^-(x,\bar\zeta_m) + \frac{\partial \hat B_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\bar\zeta_m) -$$

$$- i\bar c_m [\hat\chi_m(x) - \hat B_m S'_{22}(\bar\zeta_m)\Phi_{N+m}(x)].$$

Определенные посредством (84) величины $\chi_m(x)$ и $\hat\chi_m(x)$ в силу (47), (70) и (71) допускают представление

$$\chi_m(x) = a_m\Phi_m(x) + b_m\sigma_1^+(x,\zeta_m),$$

$$\hat\chi_m(x) = \hat a_m\Phi_{N+m}(x) + \hat b_m\sigma_2^+(x,\bar\zeta_m),$$

где величины a_m, b_m и $\hat a_m, \hat b_m$ не зависят от x. С помощью (47), (49), (50), (72) и (84) легко находим, что

$$a_m = B_m S'_{11}(\zeta_m), \quad \hat a_m = \hat B_m S'_{22}(\bar\zeta_m),$$

а b_m и $\hat b_m$ - произвольные величины, удовлетворяющие условию $\hat b_m = \bar b_m$, $m = 1, \ldots, N$. Отсюда следует, что определенные посредством (82) величины G_m и $\hat G_m$ могут быть представлены в виде

$$G_m = \left(\frac{\partial B_m}{\partial t} + i b_m c_m B_m\right)\sigma_2^-(x,\zeta_m),$$

$$\hat G_m = \left(\frac{\partial \hat B_m}{\partial t} - i\hat b_m \bar c_m \hat B_m\right)\sigma_1^-(x,\bar\zeta_m).$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (83), получаем, что эволюционные уравнения для нормировочных констант B_m и $\hat B_m$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B_m}{\partial t} - i(4\zeta_m^2 - b_m c_m) B_m = 0, \\ &\frac{\partial \hat B}{\partial t} + i(4\bar\zeta_m^2 - \hat b_m \bar c_m)\hat B_m = 0. \end{aligned} \tag{86}$$

На основе равенства $\hat b_m = \bar b_m$ система уравнений (86) обладает инвариантным многообразием $\hat B_m = -\bar B_m$.

Таким образом, в случае источника, удовлетворяющего условиям (8), система уравнений (80) и (86) описывает эволюцию во времени всех данных рассеяния для оператора L вида (6),(7) с потенциалом $u = u(x,t)$, удовлетворяющим системе (1)-(3). Это значит, что для решения задачи Коши для системы (1)-(3) мы можем и в этом случае воспользоваться методом обратной задачи рассеяния для оператора L вида (6), (7).

В заключение отметим, что в случае источника, удовлетворяющего условиям (5), система (1)-(3) имеет односолитонное решение вида

$$u = a\,\frac{\exp[\,2i\bar{\zeta}_0(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu(x-f)]}\,,$$

$$\phi_n = -\frac{i}{2}\,a\,\beta_n\,\frac{\exp[\,-i\,(\,\zeta_n - 2\bar{\zeta}_0\,)(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu\,(x-f)]}\,, \qquad (87)$$

$$\psi_n = \frac{1+\alpha_n\,\exp[\,4\mu\,(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu\,(x-f)]}\,\exp[\,-i\zeta_n\,(x-f)]\,,$$

$$p_n = c_n\,\frac{\alpha_n + \exp[\,4\mu\,(x-f)\,]}{1+\exp[\,4\mu\,(x-f)]}\,\exp[\,i\zeta_n\,(x-f)]\,,$$

$$q_n = -\frac{i}{2}\,\bar{a}\,\beta_n c_n\,\frac{\exp[\,i\,(\zeta_n - 2\zeta_0\,)\,(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu\,(x-f)]}\,,$$

где c_n и ζ_n – произвольные комплекснозначные функции времени, удовлетворяющие единственному условию $\operatorname{Im}\zeta_n > 0$, $n = 1,\ldots,N$, величина ζ_0 не зависит от времени и имеет вид $\zeta_0 = i\mu + \nu$, $\mu > 0$, $\nu \in (-\infty,\infty)$, а величины α_n и β_n определяются равенствами

$$\alpha_n = \frac{\zeta_n - \zeta_0}{\zeta_n - \bar{\zeta}_0}\,, \qquad \beta_n = \frac{1}{\zeta_n - \bar{\zeta}_0}\,, \qquad n = 1,\ldots,N.$$

При этом величины a и f являются функциями времени, удовлетворяющими уравнениям

$$\frac{i}{a}\,\frac{da}{dt} + 4\,(\mu^2 + \nu^2) = F + \frac{\nu}{\mu}\,G\,, \qquad 2\mu\,(\frac{df}{dt} - 4\nu\,) + G = 0\,, \qquad (88)$$

где F и G равны соответственно вещественной и мнимой частям величины H вида

$$H = \sum_{n=1}^{N}\,(\alpha_n\,\beta_n\,c_n + \bar{\beta}_n\,\bar{c}_n)\,.$$

Кроме того, величина a удовлетворяет условию $|a| = 4\mu$, которое, очевидно, не противоречит уравнениям (88). Нетрудно видеть, что, выбирая соответствующим образом величины c_n и ζ_n, $n = 1, \ldots, N$, мы можем добиться, чтобы движение солитона (87) носило любой наперед заданный характер. Однако абсолютная величина амплитуды a при этом будет сохраняться во времени. Как показывает детальный анализ, в этом случае многосолитонное решение системы (1)-(3), описывающее взаимодействие нескольких солитонов вида (87), может иметь нетривиальную динамику. В частности, оно может описывать процессы распада и слияния солитонов, захват солитонов в колебательный режим движения, образование связанного состояния из нескольких солитонов.

Далее, в случае источника, удовлетворяющего условиям (8), односолитонное решение системы (1)-(3) имеет вид

$$
\begin{aligned}
u &= a\,\frac{\exp[\,2i\bar{\zeta}(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu(x-f)]}\,,\\
\phi &= 2i\mu W\,\frac{\exp[\,4\mu(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu(x-f)]}\exp[\,i\zeta(x-f)]\,,\\
\psi &= c\,\frac{\exp[\,-i\zeta(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu(x-f)]}\,,\\
p &= \frac{i}{c}\{[\,\frac{1}{2\mu}-2(x-f)]\,\phi+iW\,\frac{\exp[\,i\zeta(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu(x-f)]}\}\,,\\
q &= -\frac{i}{c}\{[\,\frac{1}{2\mu}+2(x-f)]\,\psi+\frac{c}{2\mu}\,\frac{\exp[\,4\mu(x-f)]}{1+\exp[\,4\mu(x-f)]}\exp[\,-i\zeta(x-f)]\}\,,
\end{aligned}
\tag{89}
$$

где W - произвольная комплекснозначная функция времени, величина ζ имеет вид $\zeta = i\mu+\nu$, $\mu \geq 0$, $\nu \in (-\infty,\infty)$, а величина c определяется из соотношения $iac = 8\mu^2 W$. При этом величины ζ, f и a удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\zeta}{dt} = iW, \qquad \frac{df}{dt} = 4\nu,\\
&\frac{da}{dt} = [\,4i(\mu^2+\nu^2)+\frac{1}{2\mu}(W+\bar{W})]\,a\,.
\end{aligned}
\tag{90}
$$

Кроме того, величина a удовлетворяет условию $|a| = 4\mu$, которое, как нетрудно убедиться, не противоречит уравнениям (90). В силу равенства $\nu = \mathrm{Re}\,\zeta$ при подходящем выборе функции W мы можем добиться, чтобы движение солитона (89) имело любой наперед заданный характер. Однако, если в момент времени $t = t'$ точка ζ попадает на вещественную ось, т.е. величина μ обращается в нуль, то величина a также обращается в нуль. Таким образом, получаем, что $u(x,t') \equiv 0$, т.е. в момент времени $t = t'$ полученный нами солитон исчезает. В том случае, когда при $t > t'$ величина ζ покидает вещественную ось, рассматриваемый нами солитон появляется вновь. Получаемое с помощью метода обратной задачи рассеяния многосолитонное решение системы (1)-(3) в этом случае описывает взаимодействие нескольких солитонов вида (89). Оно имеет весьма богатую динамику. Для того, чтобы исследовать взаимодействие друг с другом солитонов вида (87) и (89), необходимо в уравнении (1) взять источник, образованный решениями системы (2), (3), часть из которых удовлетворяет условиям (5), а остальные удовлетворяют условиям (8). При этом надо иметь в виду, что аддитивному характеру композиции источника соответствует мультипликативный характер композиции данных рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. - ЖЭТФ, 1971, т.61, вып.1, с.118.
2. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-88-668, Дубна, 1988.
3. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-88-728, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1990 года.