ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2-90-41

В.К.Мельников

РОЖДЕНИЕ И УНИЧТОЖЕНИЕ СОЛИТОНОВ В СИСТЕМЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ КОРТЕВЕГА - ДЕ ВРИСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в "Inverse Problems"

1990

В настоящей работе речь идет о свойствах решений следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}(\phi_n \psi_n),$$

$$(L-\lambda_n)\,\phi_n = (L-\lambda_n)\,\psi_n = 0, \quad n = 1, \dots, N, \qquad /1/$$

где L - оператор Шредингера, т.е.

$$L = \partial^2 + u, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad /2/$$

а $\lambda_n = \lambda_n(t)$ - неотрицательные функции времени t, при любом $t \geq 0$ и $m \neq n$ удовлетворяющие условию $\lambda_m \neq \lambda_n$. При этом мы будем предполагать, что $u = u(x,t)$ - вещественная функция x и t, при любом $t \geq 0$ удовлетворяющая требованию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(|x\,u(x,t)| + \sum_{r=0}^{3} \left|\frac{\partial^r u(x,t)}{\partial x^r}\right|\right) dx < \infty, \qquad /3/$$

а функции $\phi_n = \phi_n(x,t)$ и $\psi_n = \psi_n(x,t)$ также принимают только вещественные значения и при любом $t \geq 0$ и $n = 1,\dots,N$ удовлетворяют условиям

$$|\phi_n(x,t)| \to 0, \text{ если } x \to \pm\infty,$$

$$|\psi_n(x,t)| \to \infty, \text{ если } x \to \pm\infty. \qquad /4/$$

В силу /1/ и /2/ отсюда следует, что произведение $\phi_n(x,t) \times \psi_n(x,t)$ при любом $t \geq 0$ и $n = 1,\dots,N$ стремится к конечным пределам, если $x \to \pm\infty$, и, таким образом, в правой части первого уравнения системы /1/ стоит функция, стремящаяся к нулю при $x \to \pm\infty$.

В соответствии с условием /4/ мы будем считать, что точки $\lambda = \lambda_n$ при $\lambda_n > 0$ являются точками дискретного спектра оператора Шредингера L вида /2/, а функции $\phi_n = \phi_n(x,t)$ получаются из нормированных на единицу собственных функций $\Phi_n = \Phi_n(x,t)$ этого оператора, отвечающих собственному значению $\lambda = \lambda_n$, с помощью умножения на не зависящие от x величины c_n. В том случае, когда при некотором $t = t'$ какая-нибудь из функций $\lambda_n(t)$, например $\lambda_{n_0}(t)$, обращается в нуль, мы будем предполагать, что $\phi_{n_0}(x,t') \equiv 0$. Наоборот, функции $\psi_n = \psi_n(x,t)$ при любом $t \geq 0$, таком, что $\lambda_n(t) > 0$, согласно /4/ являются линейно независимыми от $\Phi_n = \Phi_n(x,t)$ решениями уравнения Шредингера. Более того, в случае, когда при некотором $t = t'$ какая-нибудь из функций $\lambda_n(t)$, скажем $\lambda_{n_0}(t)$, обращается в нуль, мы будем предполагать, что решение $\psi_{n_0}(x,t')$ уравнения Шредингера с $\lambda = \lambda_{n_0}(t') = 0$ является функцией, растущей линейно по x при $x \to \pm\infty$. Однако при этом мы будем требовать, чтобы функция $\theta_{n_0} = \theta_{n_0}(x)$ вида

$$\theta_{n_0} = \lim_{t \to t'} [\phi_{n_0}(x,t)\,\psi_{n_0}(x,t)]$$

была ограниченной функцией x при $x \in (-\infty, \infty)$.

На основе сказанного выше величины W_n вида

$$W_n = \phi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n}{\partial x}\psi_n, \quad n = 1, \ldots, N, \qquad /5/$$

являются вещественными функциями t, не равными тождественно нулю, если функции $\phi_n = \phi_n(x,t)$ не равны нулю тождественно. Как будет установлено ниже, справедливо равенство

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = W_n, \quad n = 1, \ldots, N, \qquad /6/$$

показывающее, что при $W_n \neq 0$ точки $\lambda = \lambda_n$ дискретного спектра оператора Шредингера L действительно зависят от времени t. Из этого равенства также следует, что на эволюцию n-го собственного значения оператора Шредингера влияет только одно слагаемое в источнике, а именно слагаемое с тем же самым номером n.

Система /1/ может быть интерпретирована как уравнение Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником. Как и уравнение Кортевега - де Вриса без источника, система /1/ допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера L вида /2/. Однако в отличие от уравнения Кортевега - де Вриса без источника, для которого точки дискретного спектра оператора L являются первыми интегралами /1/, для системы /1/ точки дискретного спектра оператора Шредингера являются функциями времени t, в силу /5/ и /6/ целиком определяемыми заданием самосогласованного источника. При этом в процессе эволюции некоторые из собственных значений могут обращаться в нуль, что естественно приводит к исчезновению /уничтожению/ солитонов, соответствующих этим собственным значениям. Наоборот, в том случае, когда $\lambda_n = 0$ при всех $t \in [0, t_n]$, а при $t > t_n$ имеем $\lambda_n > 0$, метод обратной задачи рассеяния позволяет обнаружить появление /рождение/ при $t > t_n$ в решении $u = u(x,t)$ системы /1/ нового солитона.

§ 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Применение метода обратной задачи рассеяния для исследования системы /1/ основывается на следующих соображениях, имеющих своим идейным источником работу /2/. Рассмотрим линейную систему уравнений

$$(L + \zeta^2)\, f_0 = 0, \qquad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \phi_n f_0, \qquad n = 1, \dots, N, \tag{7}$$

относительно неизвестных функций $f_0, f_1, \dots, f_N$. Далее, с помощью решения $f_0, f_1, \dots, f_N$ системы /7/ определим величины $g_0, g_1, \dots, g_N$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + A f_0 + \sum_{n=1}^{N} \psi_n f_n,$$

$$g_n = \phi_n \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n}{\partial x} f_0 + (\lambda_n + \zeta^2)\, f_n, \qquad n = 1, \dots, N, \tag{8}$$

где оператор A имеет вид /3/:

$$A = 4\partial^3 + 3(u\partial + \partial \cdot u). \tag{9}$$

Потребуем, наконец, чтобы определенные согласно /2/ и /7/-/9/ величины $g_0, g_1, \dots, g_N$ удовлетворяли соотношениям

$$(L + \zeta^2)\, g_0 = \sum_{n=1}^{N} \psi_n g_n, \qquad \frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \tag{10}$$

В результате несложных вычислений находим, что необходимым и достаточным условием для справедливости соотношений /10/ является выполнение равенств

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}(\phi_n \psi_n),$$
$$(L - \lambda_n)\, \phi_n = (L - \lambda_n)\, \psi_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N, \qquad /11/$$

которые в силу /2/ и /9/ совпадают с уравнениями системы /1/.

Оказывается, что с помощью соотношений /10/ удается определить эволюцию во времени всех данных рассеяния для оператора Шредингера L вида /2/ с потенциалом $u = u(x,t)$, удовлетворяющим системе /1/. Поэтому эти соотношения называются определяющими соотношениями. Они играют ту же самую роль, которую обычно выполняют операторное представление Лакса, условие совместности вспомогательных линейных систем и другие аналогичные объекты. И хотя система /1/ обладает также и операторным представлением типа Лакса, использование соотношений /10/ для нахождения эволюционных уравнений для данных рассеяния оператора Шредингера L оказывается по ряду причин более предпочтительным.

§ 2. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Нахождение эволюционных уравнений для данных рассеяния оператора L вида /2/ начнем со случая, когда все $\lambda_n > 0$, $n = 1, \ldots, N$. С этой целью для произвольного $\zeta \in (-\infty, \infty)$ возьмем пару решений f_0^- и f_0^+ уравнения

$$(L + \zeta^2)\, f_0 = 0, \qquad /12/$$

обладающих соответственно асимптотиками

$$f_0^- \sim \exp(-i\zeta x), \quad \text{если} \quad x \to -\infty,$$
$$f_0^+ \sim \exp(i\zeta x), \quad \text{если} \quad x \to \infty. \qquad /13/$$

При любом вещественном $\zeta \neq 0$ пара решений $f_0^-(x,\zeta)$ и $f_0^-(x,-\zeta) = \overline{f_0^-(x,\zeta)}$ является линейно независимой. Следовательно, при любом вещественном $\zeta \neq 0$ справедливо равенство

$$f_0^+(x,\zeta) = a(\zeta)\, f_0^-(x,-\zeta) + b(\zeta)\, f_0^-(x,\zeta), \qquad /14/$$

где величины $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ не зависят от x. С учетом /13/ и /14/

нетрудно убедиться, что величина $a(\zeta)$ может быть представлена в следующем виде:

$$a(\zeta) = \frac{i}{2\zeta}\{f_0^+(x,\zeta)\frac{\partial f_0^-(x,\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial f_0^+(x,\zeta)}{\partial x} f_0^-(x,\zeta)\}. \qquad /15/$$

Как известно, определенные посредством /12/ и /13/ функции f_0^- и f_0^+ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$. При этом для любого ζ, принадлежащего замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \geq 0$, выполняются соотношения

$$\lim_{x\to-\infty} [f_0^-(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} [f_0^+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = 1. \qquad /16/$$

В соответствии со сказанным выше функция $a(\zeta)$ на основе равенства /15/ допускает аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Согласно /15/ и /16/ отсюда следует, что при любом ζ, принадлежащем верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, справедливы равенства

$$\lim_{x\to\infty} [f_0^-(x,\zeta)\exp(i\zeta x)] = a(\zeta),$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f_0^+(x,\zeta)\exp(-i\zeta x)] = a(\zeta). \qquad /17/$$

Нулям $\zeta = \zeta_n$, $n = 1,\ldots,N$, функции $a(\zeta)$, лежащим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, в силу /15/ и /16/ соответствуют точки дискретного спектра оператора Шредингера L вида /2/, т.е. при $\zeta = \zeta_n$ имеет место равенство

$$f_0^+(x,\zeta_n) = B_n f_0^-(x,\zeta_n), \quad n = 1,\ldots,N, \qquad /18/$$

где величины B_n не зависят от x. Далее, с учетом уравнений /7/ определим функции f_n^- и f_n^+, $n = 1,\ldots,N$, посредством равенств

$$f_n^- = \int_{-\infty}^{x} \phi_n(z) f_0^-(z,\zeta)\,dz,$$

$$f_n^+ = -\int_x^\infty \phi_n(z)\, f_0^+(z,\zeta)\, dz\,. \qquad /19/$$

Нетрудно видеть, что в соответствии с /4/ и /16/ равенства /19/ определяют функции f_n^- и f_n^+ при любом $x \in (-\infty,\infty)$ и любом ζ, принадлежащем замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \geq 0$. Кроме того, при любом ζ, принадлежащем замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \geq 0$, и $n = 1, \ldots, N$ выполняются асимптотики

$$f_n^- \to 0\,, \quad \text{если} \quad x \to -\infty\,,$$

$$f_n^+ \to 0\,, \quad \text{если} \quad x \to \infty\,. \qquad /20/$$

Возьмем теперь найденные выше решения $f_0^-, f_1^-, \ldots, f_N^-$ и $f_0^+, f_1^+, \ldots, f_N^+$ системы /7/ и с их помощью определим величины $g_0^-, g_1^-, \ldots, g_N^-$ и $g_0^+, g_1^+, \ldots, g_N^+$ посредством равенств /8/. Нетрудно видеть, что полученные таким образом величины $g_1^-, \ldots, g_N^-$ и $g_1^+, \ldots, g_N^+$ на основе /4/, /16/ и /20/ при любом ζ, принадлежащем замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \geq 0$, удовлетворяют условиям

$$g_n^- \to 0\,, \quad \text{если} \quad x \to -\infty\,,$$

$$g_n^+ \to 0\,, \quad \text{если} \quad x \to \infty\,.$$

Отсюда в силу /10/ следует, что при любом ζ, принадлежащем замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \geq 0$, и любом $x \in (-\infty,\infty)$ величины $g_1^-, \ldots, g_N^-$ и $g_1^+, \ldots, g_N^+$ равны тождественно нулю, т.е.

$$g_1^- = \ldots = g_N^- = g_1^+ = \ldots = g_N^+ \equiv 0\,, \qquad /21/$$

а величины g_0^- и g_0^+ удовлетворяют уравнениям

$$(L + \zeta^2)\, g_0^- = (L + \zeta^2)\, g_0^+ = 0\,. \qquad /22/$$

Согласно /21/ из равенств /8/ следует, что при $n = 1, \ldots, N$ выполняются равенства

$$\lambda_n + \zeta_n^2 = 0\,, \qquad \phi_n = c_n^- f_0^-(x,\zeta_n) = c_n^+ f_0^+(x,\zeta_n)\,, \qquad /23/$$

где величины c_n^- и c_n^+ не зависят от x. С учетом /18/ получаем соотношение $c_n^- = B_n c_n^+$, $n = 1, \ldots, N$. В соответствии с требованием /4/ отсюда следует, что функции ψ_n при $n = 1, \ldots, N$ имеют следующие асимптотики:

$$\psi_n \sim -\frac{iW_n}{2\zeta_n c_n^-}\exp(i\zeta_n x), \text{ если } x \to -\infty,$$

$$\psi_n \sim \frac{iW_n}{2\zeta_n c_n^+}\exp(-i\zeta_n x), \text{ если } x \to \infty, \tag{24}$$

где величины W_n определены посредством равенства /5/. На основе равенств /19/ и /23/ получаем, что при любом ζ, принадлежащем замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \geq 0$, справедливы асимптотики

$$f_n^- \sim \frac{ic_n^-}{\zeta+\zeta_n}\exp[-i(\zeta+\zeta_n)x], \text{ если } x \to -\infty,$$

$$f_n^+ \sim -\frac{ic_n^+}{\zeta+\zeta_n}\exp[i(\zeta+\zeta_n)x], \text{ если } x \to \infty. \tag{25}$$

С учетом условия /3/, равенств /8/, /9/, /22/ и асимптотик /24/, /25/ получаем, что при любом ζ, принадлежащем замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \geq 0$, имеют место равенства

$$g_0^- = (4i\zeta^3 + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\zeta+\zeta_n}\frac{W_n}{2\zeta_n})\, f_0^-(x,\zeta),$$

$$g_0^+ = (-4i\zeta^3 + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\zeta+\zeta_n}\frac{W_n}{2\zeta_n})\, f_0^+(x,\zeta). \tag{26}$$

При любом вещественном $\zeta \neq 0$ определим величину G_0 посредством равенства

$$G_0 = g_0^+(x,\zeta) - a(\zeta)\, g_0^-(x,-\zeta) - b(\zeta)\, g_0^-(x,\zeta). \tag{27}$$

С помощью равенств /14/ и /26/ легко находим, что

$$G_0 = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\zeta+\zeta_n}+\frac{1}{\zeta-\zeta_n}\right)\frac{W_n}{2\zeta_n}\, a(\zeta)\, f_0^-(x,-\zeta) - 8i\,\zeta^3 b(\zeta)\, f_0^-(x,\zeta). \tag{28}$$

С другой стороны, согласно /8/ и /14/ при любом вещественном $\zeta \neq 0$ справедливо равенство

$$g_0^+ = \frac{\partial a(\zeta)}{\partial t} f_0^-(x,-\zeta) + \frac{\partial b(\zeta)}{\partial t} f_0^-(x,\zeta) +$$

$$+ a(\zeta)\, g_0^-(x,-\zeta) + b(\zeta)\, g_0^-(x,\zeta) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N} \psi_n(x)[f_n^+(x,\zeta) - a(\zeta) f_n^-(x,-\zeta) - b(\zeta) f_n^-(x,\zeta)].$$

В силу /14/ и /19/ при любом вещественном $\zeta \neq 0$ выполняется соотношение

$$f_n^+(x,\zeta) - a(\zeta) f_n^-(x,-\zeta) - b(\zeta) f_n^-(x,\zeta) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(z) f_0^+(z,\zeta)\, dz, \quad n=1,\ldots,N. \qquad /29/$$

Поскольку у оператора Шредингера собственные функции дискретного спектра ортогональны к собственным функциям непрерывного спектра, то на основе /23/ получаем, что интеграл, стоящий в правой части равенства /29/, равен нулю при любом $\zeta \in (-\infty,\infty)$. Отсюда следует, что определенная посредством /27/ величина G_0 при любом вещественном $\zeta \neq 0$ может быть представлена в следующем виде:

$$G_0 = \frac{\partial a(\zeta)}{\partial t} f_0^-(x,-\zeta) + \frac{\partial b(\zeta)}{\partial t} f_0^-(x,\zeta).$$

Сравнивая это равенство с равенством /28/, получаем, что эволюционные уравнения для величин $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ при любом вещественном $\zeta \neq 0$ имеют вид

$$\frac{\partial a(\zeta)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\zeta+\zeta_n} + \frac{1}{\zeta-\zeta_n}\right) \frac{W_n}{2\zeta_n} a(\zeta),$$

$$\frac{\partial b(\zeta)}{\partial t} + 8i\zeta^3 b(\zeta) = 0. \qquad /30/$$

Нетрудно видеть, что эволюционное уравнение для величины $b(\zeta)$ в нашем случае имеет тот же самый вид, что и в случае уравнения Кортевега - де Вриса без источника /1/. Однако уравнение для величины $a(\zeta)$ в рассматриваемом нами случае существенно отличается от соответствующего уравнения в случае уравнения Кортевега - де Вриса без источника. Из первого уравнения системы /30/ следует, что функция $a(\zeta)$ допускает представление

$$a(\zeta) = a_0(\zeta) \prod_{n=1}^{N} \frac{\zeta-\zeta_n}{\zeta+\zeta_n}, \qquad /31/$$

где сомножитель $a_0(\zeta)$ не зависит от t, а величины ζ_n удовлетворяют условиям

$$\frac{d\zeta_n}{dt} + \frac{W_n}{2\zeta_n} = 0, \qquad n = 1, \dots, N. \qquad /32/$$

Очевидно, что в силу /23/ уравнения /6/ и /32/ эквивалентны между собой.

Определим теперь эволюцию во времени нормировочных констант B_n, $n = 1, \dots, N$. С этой целью положим при $n = 1, \dots, N$

$$G_n = g_0^+(x, \zeta_n) - B_n g_0^-(x, \zeta_n). \qquad /33/$$

В соответствии с равенствами /18/ и /26/ имеем

$$G_n = -8i\zeta_n^3 B_n f_0^-(x, \zeta_n). \qquad /34/$$

Далее, дифференцируя равенство /18/ по t, с учетом уравнения /32/ находим, что

$$\frac{\partial f_0^+(x, \zeta_n)}{\partial t} = \frac{\partial B_n}{\partial t} f_0^-(x, \zeta_n) + B_n \frac{\partial f_0^-(x, \zeta_n)}{\partial t} + \frac{W_n}{2\zeta_n} \chi_n(x), \qquad /35/$$

где χ_n равно значению величины χ вида

$$\chi = \frac{\partial}{\partial \zeta} [f_0^+(x, \zeta) - B f_0^-(x, \zeta)] \qquad /36/$$

при $B = B_n$ и $\zeta = \zeta_n$. На основе /8/ и /35/ убеждаемся, что

$$g_0^+(x, \zeta_n) = \frac{\partial B_n}{\partial t} f_0^-(x, \zeta_n) + B_n g_0^-(x, \zeta_n) + \frac{W_n}{2\zeta_n} \chi_n(x) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \psi_m(x) [f_m^+(x, \zeta_n) - B_n f_m^-(x, \zeta_n)]. \qquad /37/$$

Согласно /18/ и /19/ справедливо равенство

$$f_m^+(x, \zeta_n) - B_n f_m^-(x, \zeta_n) = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(z) f_0^+(z, \zeta_n)\, dz. \qquad /38/$$

Так как у оператора Шредингера собственные функции дискретного спектра, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны между собой, то в силу /23/ интеграл в правой части равенства

/38/ равен нулю при $m \neq n$, m, n = 1, ..., N. Следовательно, справедливо равенство

$$\sum_{m=1}^{N} \psi_m(x)\,[\,f_m^+(x,\zeta_n) - B_n f_m^-(x,\zeta_n)\,] =$$

$$= -\psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(z)\, f_0^+(z,\zeta_n)\, dz\,. \qquad /39/$$

С другой стороны, на основе /2 /, /12/ и /18/ получаем, что определенная посредством /36/ величина χ_n удовлетворяет уравнению

$$(L + \zeta_n^2)\, \chi_n = 0\,, \quad n = 1, \ldots, N\,.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\chi_n = \alpha_n \psi_n(x) + \beta_n f_0^+(x,\zeta_n)\,, \qquad /40/$$

где величины α_n и β_n не зависят от x. Из равенства /17/ следует, что величина χ_n обладает следующими асимптотиками:

$$\chi_n \sim a'(\zeta_n)\exp(i\zeta_n x)\,, \quad \text{если} \quad x \to -\infty\,,$$

$$\chi_n \sim -a'(\zeta_n)\, B_n \exp(-i\zeta_n x)\,, \text{если} \quad x \to \infty\,,$$

где

$$a'(\zeta_n) = \frac{\partial a(\zeta)}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_n}\,.$$

В соответствии с асимптотиками /24/ это значит, что входящая в равенство /40/ величина α_n может быть представлена в следующем виде:

$$\alpha_n = -\frac{2\zeta_n c_n^-}{iW_n}\, a'(\zeta_n) = -\frac{2\zeta_n c_n^+}{iW_n}\, B_n a'(\zeta_n)\,. \qquad /41/$$

Воспользуемся теперь хорошо известным равенством

$$a'(\zeta_n) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f_0^-(x,\zeta_n)\, f_0^+(x,\zeta_n)\, dx\,, \quad n = 1, \ldots, N. \qquad /42/$$

С помощью /41/ и /42/ получаем равенство

$$\alpha_n = \frac{2\zeta_n c_n^-}{W_n} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^-(x,\zeta_n)\, f_0^+(x,\zeta_n)\, dx, \quad n=1,\dots,N. \qquad /43/$$

Далее, с учетом /37/ и /39/ убеждаемся в справедливости равенства

$$g_0^+(x,\zeta_n) = \frac{\partial B_n}{\partial t} f_0^-(x,\zeta_n) + B_n g_0^-(x,\zeta_n) + \frac{W_n}{2\zeta_n}\chi_n(x) -$$

$$-\psi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(z)\, f_0^+(z,\zeta_n)\, dz, \quad n=1,\dots,N.$$

Отсюда в силу /18/, /23/, /40/ и /43/ следует равенство

$$g_0^+(x,\zeta_n) = \left(\frac{\partial B_n}{\partial t} + \frac{\beta_n W_n}{2\zeta_n} B_n\right) f_0^-(x,\zeta_n) + B_n g_0^-(x,\zeta_n).$$

Таким образом, определенная посредством /33/ величина G_n при $n = 1, \dots, N$ допускает представление

$$G_n = \left(\frac{\partial B_n}{\partial t} + \frac{\beta_n W_n}{2\zeta_n} B_n\right) f_0^-(x,\zeta_n).$$

Сравнивая это равенство с равенством /34/, получаем эволюционное уравнение для нормировочных констант B_n в следующем виде:

$$\frac{\partial B_n}{\partial t} + \left(8i\zeta_n^3 + \frac{\beta_n W_n}{2\zeta_n}\right) B_n = 0, \quad n=1,\dots,N. \qquad /44/$$

При $\beta_n \equiv 0$ это уравнение совпадает с аналогичным уравнением для случая уравнения Кортевега - де Вриса без источника. Наоборот, при $\beta_n \not\equiv 0$ и $W_n \not\equiv 0$ это уравнение сходно по виду с соответствующим уравнением для случая уравнения Кортевега - де Вриса при совсем ином выборе самосогласованного источника/2/. Из уравнения /44/ следует, что на эволюцию величины B_n влияет только то слагаемое в правой части первого уравнения системы /1/, которое имеет тот же самый номер n, и никак не влияют другие слагаемые. Более того, если мы представим функцию $\psi_n(x)$ в виде линейной комбинации линейно независимых функций $f_0^+(x,\zeta_n)$ и $\chi_n(x)$, то из уравнения /44/ следует, что на эволюцию нормировочных констант B_n влияет только та часть функции $\psi_n(x)$, которая пропорциональна $f_0^+(x,\zeta_n)$, и никак не влияет слагаемое, пропорциональное функции $\chi_n(x)$, $n = 1, \dots, N$.

Совокупность уравнений /30/ и /44/ полностью определяет эволюцию во времени всех данных рассеяния для оператора L вида /2/ во все неособые моменты времени, т.е. такие моменты времени, при которых все $\lambda_n > 0$, $n = 1, \ldots, N$. Для таких моментов времени проблема получения решения системы /1/ сводится к решению интегрального уравнения Гельфанда - Левитана [4]:

$$K(x,y) + F(x+y) + \int_{-\infty}^{x} K(x,z)\, F(z+y)\, dz = 0, \qquad /45/$$

где ядро $F = F(\omega)$ имеет вид [5]:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) \exp(-i\zeta\omega)\, d\zeta -$$

$$- i \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{a'(\zeta_n)} \exp(-i\zeta_n \omega), \qquad R(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)}. \qquad /46/$$

§ 3. ДАННЫЕ РАССЕЯНИЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В ОСОБЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Посмотрим теперь, что произойдет с данными рассеяния оператора L в момент времени $t = t'$, такой, что $\lambda_n(t) = 0$ при $t = t'$ и некотором $n = n_0$, $1 \le n_0 \le N$. При этом мы будем считать, что $\lambda_{n_0}(t) > 0$ при всех t, достаточно близких к t' и таких, что $t < t'$. Кроме того, ради простоты предположим, что при всех t, достаточно близких к t', выполняется неравенство $\lambda_n(t) > 0$ для любого $n \ne n_0$. Отметим прежде всего, что при $n = n_0$ интеграл в правой части равенства /29/ равен нулю и при $t = t'$, поскольку мы предположили с самого начала, что в рассматриваемой сейчас ситуации выполняется условие $\phi_{n_0}(x,t') \equiv 0$. Таким образом, мы видим, что система уравнений /30/ справедлива и при $t = t'$. Далее, из первого уравнения системы /30/ следует, что при любом $\zeta \ne 0$, принадлежащем замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \ge 0$, функция $a(\zeta)$ будет иметь конечный предел при $t \to t' - 0$, если отношение $W_{n_0}(t)/\zeta_{n_0}(t)$ в точке $t = t'$ имеет интегрируемую особенность, т.е. в некоторой окрестности точки $t = t'$ при $t < t'$ имеет место асимптотика

$$\frac{W_{n_0}(t)}{\zeta_{n_0}(t)} \sim c\,(t' - t)^{\gamma}, \quad \text{где} \quad \gamma > -1, \text{ а } c \ne 0. \qquad /47/$$

В силу /32/ это условие означает, что в некоторой окрестности точки $t = t'$ при $t < t'$ выполняются асимптотики

$$\zeta_{n_0}(t) \sim \frac{c}{1+\gamma}(t'-t)^{1+\gamma},$$

$$W_{n_0}(t) \sim \frac{c^2}{1+\gamma}(t'-t)^{1+2\gamma}. \qquad /48/$$

Отсюда следует, что при выполнении условия /47/ равенство /31/ справедливо и при $t = t'$. Значит, соотношение

$$a'(\zeta_n) = \frac{a_0(\zeta_n)}{2\zeta_n} \prod_{m \neq n} \frac{\zeta_n - \zeta_m}{\zeta_n + \zeta_m}, \quad n = 1, \ldots, N, \qquad /49/$$

имеет место при любом $t \in [t'-\delta, t']$, где $\delta > 0$. С учетом того, что при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ справедливо неравенство $|a_0(\zeta)| \geq 1$, из соотношения /49/ на основе /48/ получаем, что

$$\lim_{t \to t'-0} \left[\frac{1}{a'(\zeta_{n_0})} \right] = 0. \qquad /50/$$

Наконец, из уравнения /44/ согласно /47/ следует, что если функция $\beta_{n_0}(t)$ ограничена в окрестности точки $t = t'$, то величина $B_{n_0}(t)$ ограничена при $t \to t' - 0$. Суммируя все сказанное выше, мы видим, что в рассматриваемой нами ситуации определенное посредством /46/ ядро $F = F(\omega)$ интегрального уравнения /45/ не имеет особенностей при $t = t'$. Более того, в соответствии с равенством /50/ при $t = t'$ во втором слагаемом в правой части равенства /46/ отсутствует член с номером $n = n_0$, что свидетельствует об исчезновении соответствующего солитона. Наоборот, если $\lambda_{n_0}(t) = 0$ при $t = t'$, а при всех t, достаточно близких к t' и таких, что $t > t'$, выполняется неравенство $\lambda_{n_0}(t) > 0$, то в этом случае мы имеем появление при $t > t'$ дополнительного солитона.

§ 4. N - СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ /1/

Как нетрудно убедиться, система /1/ имеет односолитонное решение вида

$$u = \frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2(\mu x - f)}, \quad \phi = \frac{c}{\operatorname{ch}(\mu x - f)},$$

$$\psi = \frac{W}{2\mu c}\left[\operatorname{sh}(\mu x - f) + \frac{\mu x - g}{\operatorname{ch}(\mu x - f)} \right], \qquad /51/$$

где μ, f, g, c и W - произвольные вещественные функции t, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{W}{2\mu}, \qquad \frac{df}{dt} = 4\mu^3 + \frac{W}{2\mu^2} g. \qquad /52/$$

Отсюда следует, что

$$\mu^2(t) = \mu^2(0) + \int_0^t W(\tau)\, d\tau, \qquad /53/$$

и, таким образом, солитон /48/ существует при всех значениях $t \geq 0$, при которых правая часть равенства /53/ положительна. Это значит, что, задавая произвольно функции g и W, мы можем с помощью соотношений /52/ определить функции μ и f при всех значениях $t \geq 0$, при которых имеет смысл равенство /53/. В частности, при произвольном выборе функции W соотношениям /52/ удовлетворяют определенная посредством /53/ функция μ и функции f и g вида

$$f(t) = g(t) = c_0 \mu(t) + 4\mu(t) \int_0^t \mu^2(\tau)\, d\tau,$$

где величина c_0 не зависит от t. Наконец, полагая

$$g = f + \mu^2 g_0,$$

легко находим, что

$$f(t) = c_0 \mu(t) + \mu(t) \int_0^t \left[4\mu^2(\tau) + \frac{W(\tau)}{2\mu(\tau)} g_0(\tau) \right] d\tau.$$

В общем случае N-солитонное решение системы /1/ описывает взаимодействие N солитонов указанного выше вида. Для получения этого решения с учетом соотношения /42/ положим в равенстве /46/

$$R = 0, \quad \zeta_n = i\mu_n, \quad -i\frac{B_n}{a'(\zeta_n)} = F_n^2, \quad n = 1, \dots, N. \qquad /54/$$

Далее, пусть

$$K = \sum_{n=1}^{N} F_n K_n(x) \exp(\mu_n y). \qquad /55/$$

Подставляя это равенство в уравнение /45/, немедленно получаем линейную алгебраическую систему уравнений для нахождения функций K_n, т.е.

$$K_m + F_m \exp(\mu_m x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{F_m F_n}{\mu_m + \mu_n} \exp[(\mu_m + \mu_n) x] K_n = 0. \qquad /56/$$

Пусть h - вектор-столбец с N компонентами

$$h_n = F_n \exp(\mu_n x), \quad n = 1, \ldots, N, \qquad /57/$$

а H - квадратная матрица порядка N с элементами

$$H_{m,n} = \frac{F_m F_n}{\mu_m + \mu_n} \exp[(\mu_m + \mu_n) x], \quad m, n = 1, \ldots, N. \qquad /58/$$

Пусть, далее, e_m - вектор-строка с N компонентами $\epsilon_{m,n} = \delta_{m,n}$, $m, n = 1, \ldots, N$. Тогда в силу /56/ справедливо равенство

$$K_m = \frac{1}{\det(I + H)} \det \begin{vmatrix} 0 & e_m \\ h & I + H \end{vmatrix}, \quad m = 1, \ldots, N, \qquad /59/$$

где I - единичная матрица порядка N. Далее, с помощью /57/-/59/ в соответствии с хорошо известным равенством

$$u = -2 \frac{dK(x,x)}{dx}$$

убеждаемся в справедливости соотношения

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D, \qquad /60/$$

где

$$D = \det(I + H). \qquad /61/$$

Таким образом, оказывается, что выражение для функции $u = u(x,t)$ в нашем случае имеет тот же самый вид, что и в случае уравнения Кортевега - де Вриса без источника /8/. Однако в нашем случае величины μ_n являются в известной мере произвольными функциями времени t, а зависимость величин F_n от времени в нашем случае имеет более сложный характер по сравнению со случаем уравнения Кортевега - де Вриса без источника.

Как известно, определенное посредством /13/ решение f_0^- уравнения /12/ допускает представление

$$f_0^-(x,\zeta) = \exp(-i\zeta x) + \int_{-\infty}^{x} K(x,y)\exp(-i\zeta y)\,dy,$$

из которого согласно /55/ следует равенство

$$f_0^-(x,\zeta) = \exp(-i\zeta x) + \sum_{m=1}^{N} \frac{F_m K_m}{\mu_m - i\zeta}\exp[(\mu_m - i\zeta)x]. \qquad /62/$$

Таким образом, на основании /54/ и /56/ получаем, что

$$f_0^-(x,\zeta_n) = -\frac{K_n}{F_n}, \quad n=1,\ldots,N, \qquad /63/$$

т.е. с учетом /23/ имеем равенство

$$\phi_n = -\frac{c_n^-}{F_n}K_n, \quad n=1,\ldots,N. \qquad /64/$$

Далее, в силу /14/, /54/ и /62/ получаем равенство

$$f_0^+(x,\zeta) = a(\zeta)\Big[1 + \sum_{m=1}^{N}\frac{F_m K_m}{\mu_m + i\zeta}\exp(\mu_m x)\Big]\exp(i\zeta x), \qquad /65/$$

где

$$a(\zeta) = \prod_{m=1}^{N}\frac{\zeta - i\mu_m}{\zeta + i\mu_m}. \qquad /66/$$

Из равенств /65/ и /66/ следует, что

$$f_0^+(x,\zeta_n) = -i\,a'(\zeta_n)\,F_n K_n, \quad n=1,\ldots,N,$$

т.е. согласно /54/ справедливо равенство

$$f_0^+(x,\zeta_n) = -\frac{B_n}{F_n}K_n, \quad n=1,\ldots,N, \qquad /67/$$

что находится в полном соответствии с равенствами /18/ и /63/.

Из равенства /62/ следует, что

$$\frac{\partial f_0^-(x,\zeta)}{\partial\zeta} = -ixf_0^-(x,\zeta) + i\sum_{m=1}^{N}\frac{F_m K_m}{(\mu_m - i\zeta)^2}\exp[(\mu_m - i\zeta)x],$$

а с помощью равенства /65/ находим, что

$$\frac{\partial f_0^+(x,\zeta)}{\partial\zeta} = ixf_0^+(x,\zeta) + a'(\zeta)\,f_0^-(x,-\zeta) -$$

$$-ia(\zeta)\sum_{m=1}^{N}\frac{F_m K_m}{(\mu_m + i\zeta)^2}\exp[(\mu_m + i\zeta)x]\,.$$

Таким образом, при $n = 1,\ldots,N$ справедливы равенства

$$\left.\frac{\partial f_0^-(x,\zeta)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_n} = -ixf_0^-(x,\zeta_n) +$$

$$+i\sum_{m=1}^{N}\frac{F_m K_m}{(\mu_m + \mu_n)^2}\exp[(\mu_m + \mu_n)x],$$

$$\left.\frac{\partial f_0^+(x,\zeta)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_n} = ixf_0^+(x,\zeta_n) +$$

$$+a'(\zeta_n)\Big[1 + \sum_{m\neq n}\frac{F_m K_m}{\mu_m - \mu_n}\exp(\mu_m x)\Big]\exp(-\mu_n x)\,.$$

С учетом /67/ отсюда следуют равенства

$$\left.\frac{\partial f_0^-(x,\zeta)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_n} = -ixf_0^-(x,\zeta_n) -$$

$$-i\sum_{m=1}^{N}\frac{F_m^2}{B_m}\frac{f_0^+(x,\zeta_m)}{(\mu_m + \mu_n)^2}\exp[(\mu_m + \mu_n)x],$$

$$\left.\frac{\partial f_0^+(x,\zeta)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_n} = ixf_0^+(x,\zeta_n) + \qquad /68/$$

$$+a'(\zeta_n)\Big[1 - \sum_{m\neq n}\frac{F_m^2}{B_m}\frac{f_0^+(x,\zeta_m)}{\mu_m - \mu_n}\exp(\mu_m x)\Big]\exp(-\mu_n x)\,.$$

На основе этих равенств немедленно получаем, что

$$\frac{\partial f_0^-(x,\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_n}\to 0, \quad \text{если } x\to-\infty,$$

$$\frac{\partial f_0^+(x,\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_n}\to 0, \quad \text{если } x\to\infty,$$

$$\exp(\mu_n x)\,\frac{\partial f_0^+(x,\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_n}\to a'(\zeta_n), \quad \text{если } x\to-\infty.$$

Возьмем теперь функцию

$$G_n(\zeta)=\frac{1}{a(\zeta)}\,\frac{1}{(\mu_n-i\zeta)^2}, \qquad n=1,\ldots,N,$$

и проинтегрируем ее по ζ вдоль окружности C_R радиуса $R > \max(\mu_1,\ldots,\mu_N)$ с центром в точке $\zeta = 0$. Согласно /66/ в результате получим равенство

$$-a'(\zeta_n)=\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{a'(\zeta_m)}\,\frac{1}{(\mu_m+\mu_n)^2}.$$

В соответствии с этим равенством на основе /54/ и /68/ находим, что

$$\exp(-\mu_n x)\,\frac{\partial f_0^-(x,\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_n}\to a'(\zeta_n), \quad \text{если } x\to\infty.$$

Таким образом, функции χ_n вида

$$\chi_n=\frac{\partial f_0^+(x,\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_n}-B_n\,\frac{\partial f_0^-(x,\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_n}=$$

$$=2ixf_0^+(x,\zeta_n)+iB_n\sum_{m=1}^{N}\frac{F_m^2}{B_m}\,\frac{f_0^+(x,\zeta_m)}{(\mu_m+\mu_n)^2}\exp[(\mu_m+\mu_n)x]+ \qquad /69/$$

$$+a'(\zeta_n)[1-\sum_{m\neq n}\frac{F_m^2}{B_m}\,\frac{f_0^+(x,\zeta_m)}{\mu_m-\mu_n}\exp(\mu_m x)]\exp(-\mu_n x)$$

согласно сказанному выше являются линейно не зависимыми от $f_0^+(x,\zeta_n)$ решениями уравнения Шредингера /12/ при $\zeta^2=-\lambda_n$, $n = 1, \ldots, N$. Более того, справедливо равенство

$$f_0^+(x,\zeta_n)\ \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - \frac{\partial f_0^+(x,\zeta\ )}{\partial x}\chi_n = -2\mu_n B_n a'(\zeta_n)\ .$$

Значит, справедливо равенство

$$\psi_n = U_n \chi_n(x) + V_n f_0^+(x,\zeta_n)\ , \qquad /70/$$

где

$$U_n = -\frac{1}{a'(\zeta_n)}\ \frac{W_n}{2\mu_n c_n^-}\ , \qquad /71/$$

а V_n - произвольные непрерывные функции t , принимающие только вещественные значения. Очевидно, что равенства /60/, /64/ и /69/-/71/ определяют полностью интересующее нас N-солитонное решение системы /1/.

В том случае, когда $\mu_n(t) = 0$ при $t = t'$ и некотором $n = n_0$, а при $n \neq n_0$ имеем $\mu_n(t') > 0$, из равенств /50/, /54/ и /58/ следует, что при $t = t'$ все элементы n_0-й строки и n_0-го столбца матрицы H равны нулю, кроме элемента H_{n_0, n_0}, стоящего на пересечении n_0-й строки и n_0-го столбца. В силу /66/ справедливо равенство

$$H_{n_0, n_0} = (-1)^{N-1}\ B_{n_0}\ (t') \geq 0\ ,$$

и, таким образом, элемент H_{n_0, n_0} не зависит от x. Далее, на основе /61/ имеем

$$D = (1 + H_{n_0, n_0})\ D_0\ ,$$

где D_0 - определитель матрицы, получающейся из матрицы $I + H$ после вычеркивания элементов n_0-й строки и n_0-го столбца. Из этого равенства следует, что получаемая с помощью /60/ функция $u = u(x,t)$ в момент времени $t = t'$ описывает $(N-1)$-солитонное решение. Если мы теперь предположим, что $\mu_{n_0}(t) = 0$ при всех $t \leq t'$ и $\mu_{n_0}(t) > 0$ при $t > t'$, то в этом случае наше решение описывает процесс рождения дополнительного солитона. Наоборот, если $\mu_{n_0}(t) > 0$ при всех $t < t'$ и $\mu_{n_0}(t) \equiv 0$ при $t \geq t'$, то в этом случае наше решение описывает процесс уничтожения одного из солитонов. В соответствии с предположением, что $\lambda_m \neq \lambda_n$ при любом $t \geq 0$ и $m \neq n$, m, $n = 1, \ldots, N$, очевидно, что рождающийся и уничтожаемый солитоны соответствуют наименьшему собственному значению оператора Шредингера.

Это значит, что исследование процессов рождения и уничтожения солитонов, соответствующих другим собственным значениям опера- тора Шредингера, требует изучения поведения решения системы /1/ в случае, когда разность $\lambda_m(t)-\lambda_n(t)$ может обращаться в нуль при некотором $t=t'$ и $m \neq n$. Несмотря на очевидную важность этой проблемы, в настоящей работе она осталась вне поля зрения.

В заключении необходимо отметить, что в недавних рабо- тах /7,8/ указана схема интегрирования уравнения Кортевега - де Вриса с источником при ином выборе решений уравнения Шре- дингера, образующих этот источник. Таким образом, упомянутые выше работы вместе с настоящей работой содержат схемы интегри- рования уравнения Кортевега - де Вриса с источником при любом выборе решений уравнения Шредингера, которые образуют источник, стремящийся достаточно быстро к нулю при $x \to \pm\infty$. Однако при ука- занном ранее выборе источника дискретный спектр оператора Шре- дингера не зависел от времени. И только в рассматриваемом здесь случае точки дискретного спектра оператора Шредингера являют- ся функциями времени. Причина этого явления, как было обнару- жено в работе /9/, кроется в том, что выбиравшийся ранее источ- ник был ортогонален к квадратам всех собственных функций дис- кретного спектра оператора Шредингера. И только рассматривае- мый в этой работе выбор источника не удовлетворяет этому требо- ванию.

Действительно, возьмем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + (u-\lambda_n)\,\Phi_n = 0$$

для нормированных собственных функций оператора Шредингера и продифференцируем его по t. В результате получим равенство

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} + (u-\lambda_n)\,\Psi_n = \left(\frac{d\lambda_n}{dt} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Phi_n ,$$

где $\Psi_n = \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial t}$, $n = 1,\ldots,N$. Отсюда следует, что

$$\frac{d\lambda_n}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^2(x)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx . \qquad /72/$$

Далее, на основе равенств

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^2(x)\, dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} [A, L]\, \Phi_n^2(x)\, dx = 0$$

с учетом уравнения /11/ соотношение /72/ принимает вид

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = 2 \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^2(x) \frac{\partial}{\partial x} [\, \phi_m(x)\, \psi_m(x)]\, dx.$$

Нетрудно убедиться, что при $m \neq n$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^2(x) \frac{\partial}{\partial x} [\, \phi_m(x)\, \psi_m(x)]\, dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Таким образом, имеем соотношение

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^2(x) \frac{\partial}{\partial x} [\, \phi_n(x)\, \psi_n(x)]\, dx. \qquad /73/$$

В силу /4/ выполняется равенство $\phi_n(x) = c_n \Phi_n(x)$, где величины c_n не зависят от x. С помощью этого равенства соотношение /73/ может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\, \Phi_n^2(x)\, \phi_n(x)\, \psi_n(x)]\, dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^2(x) [\, \phi_n(x) \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n(x)}{\partial x} \psi_n(x)]\, dx.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства, очевидно, равно нулю, а второе слагаемое согласно выбранной ранее нормировке функций Φ_n и в соответствии с /5/ равно W_n, т.е. имеем

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = W_n, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

в полном соответствии с равенством /6/. Таким образом, величина W_n определяет значение скалярного произведения квадрата нормированной собственной функции Φ_n оператора Шредингера и выражения, образующего источник.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C.S. et al. - Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, No.19, p.1095.
2. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-88-668, Дубна, 1988.
3. Lax P.D. - Comm. Pure Appl. Math., 1968, v.21, No.5, p.467.
4. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. - Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, т.15, № 4, с.309.
5. Фаддеев Л.Д. - Труды Матем. ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР, 1964, т.73, с.314.
6. Gardner C.S. et al. - Comm.Pure Appl. Math., 1974, v.27, No.1, p.97.
7. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-418, Дубна, 1989.
8. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-781, Дубна, 1989.
9. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-675, Дубна, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 января 1990 года.