сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-90-399

Н.А.Черников

ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

1990

Основы тензорной теории гравитации

На передний план теории выступают два тензорных поля: g^{ab} и P^{a}_{mn}. Первое поле называем кометрическим, второе – фоновым. Ограничимся случаем, когда оба эти поля симметричны, т.е. когда

$$g^{ba} = g^{ab}, \qquad P^{a}_{nm} = P^{a}_{mn}. \tag{I}$$

При этом условии остаются в стороне вопросы единой теории поля Эйнштейна.

Будем считать, что определитель матрицы (g^{ab}) не равен нулю, так что существует тензорное поле g_{ab}, обратное кометрическому полю g^{ab}. В таком случае мы располагаем римановой геометрией с метрической формой

$$ds^2 = g_{ab}\, dx^a dx^b \tag{2}$$

и с элементом объема

$$dV = \varepsilon\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^N, \quad где \quad \varepsilon = \sqrt{|g|}. \tag{3}$$

Тензорное поле g_{ab} называем метрическим. Число N –размерность многообразия. Как и в эйнштейновской теории, полагаем $N = 4$.

С помощью исходных тензорных полей введем две аффинные связности: связность Кристоффеля

$$\Gamma^{a}_{mn} = \frac{1}{2} g^{as} (\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}) \tag{4}$$

и фоновую связность

$$\check{\Gamma}^{a}_{mn} = \Gamma^{a}_{mn} + P^{a}_{mn}. \tag{5}$$

Эти связности симметричны, иначе говоря, их тензоры кручения равны нулю. На их тензоры кривизны поначалу никаких ограничений не накладываем. Они равняются

$$R^{a}_{mnb} = \partial_m \Gamma^{a}_{nb} - \partial_n \Gamma^{a}_{mb} + \Gamma^{a}_{ms}\Gamma^{s}_{nb} - \Gamma^{a}_{ns}\Gamma^{s}_{mb}, \tag{6}$$

$$\check{R}^{a}_{mnb} = \partial_m \check{\Gamma}^{a}_{nb} - \partial_n \check{\Gamma}^{a}_{mb} + \check{\Gamma}^{a}_{ms}\check{\Gamma}^{s}_{nb} - \check{\Gamma}^{a}_{ns}\check{\Gamma}^{s}_{mb}. \tag{7}$$

Располагая

Располагая двумя связностями, для каждого тензорного поля T можно составить две ковариантные производные ∇T и $\check{\nabla} T$. Например, для полей (1) они равны

$$\nabla_k g^{ab} = \partial_k g^{ab} + \Gamma^a_{ks} g^{sb} + \Gamma^b_{ks} g^{as},$$

$$\check{\nabla}_k g^{ab} = \partial_k g^{ab} + \check{\Gamma}^a_{ks} g^{sb} + \check{\Gamma}^b_{k} g^{as},$$

$$\nabla_k P^a_{mn} = \partial_k P^a_{mn} + \Gamma^a_{ks} P^s_{mn} - \Gamma^s_{km} P^a_{sn} - \Gamma^s_{kn} P^a_{ms},$$

$$\check{\nabla}_k P^a_{mn} = \partial_k P^a_{mn} + \check{\Gamma}^a_{ks} P^s_{mn} - \check{\Gamma}^s_{km} P^a_{sn} - \check{\Gamma}^s_{kn} P^a_{ms}.$$

Разность двух ковариантных производных является билинейной формой от тензора аффинной деформации

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} \tag{8}$$

и дифференцируемого тензора. Например,

$$\check{\nabla}_k g^{ab} - \nabla_k g^{ab} = P^a_{ks} g^{sb} + P^b_{ks} g^{as}. \tag{9}$$

В частности, для тензора аффинной деформации (8) эта разность является квадратичной формой

$$\check{\nabla}_k P^a_{mn} - \nabla_k P^a_{mn} = P^a_{ks} P^s_{mn} - P^s_{km} P^a_{sn} - P^s_{kn} P^a_{ms}. \tag{10}$$

Вычитая из равенства (7) равенство (6), получаем в двух эквивалентных вариантах:

$$\check{R}^a_{mnb} - R^a_{mnb} = \nabla_m P^a_{nb} - \nabla_n P^a_{mb} - P^a_{mnb}, \tag{11}$$

$$\check{R}^a_{mnb} - R^a_{mnb} = \check{\nabla}_m P^a_{nb} - \check{\nabla}_n P^a_{mb} + P^a_{mnb}, \tag{12}$$

где

$$P^a_{mnb} = P^s_{mb} P^a_{sn} - P^s_{nb} P^a_{sm}, \tag{13}$$

закон изменения тензора кривизны при переходе от одной связности к другой. Из (11) и (12) следует равенство

$$\check{\nabla}_m P_{nb} - \check{\nabla}_n P_{mb} + P^a_{mnb} = \nabla_m P^a_{nb} - \nabla_n P^a_{mb} - P^a_{mnb}, \tag{14}$$

согласованное с равенством (10).

Тензор (7) удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\check{R}^a_{mnb} + \check{R}^a_{nmb} = 0, \quad \check{R}^a_{mnb} + \check{R}^a_{bmn} + \check{R}^a_{nbm} = 0. \tag{15}$$

Таким же условиям удовлетворяют тензоры (6) и (13), а также тензоры

$$\nabla_m P^a_{nb} - \nabla_n P^a_{mb} \quad \text{и} \quad \check{\nabla}_m P^a_{nb} - \check{\nabla}_n P^a_{mb}. \tag{16}$$

Наряду с алгебраическими тождествами (15) имеются дифференциальные, а именно:

$$\nabla_k R^a_{mnb} + \nabla_n R^a_{kmb} + \nabla_m R^a_{nkb} = 0, \tag{17}$$

$$\check{\nabla}_k \check{R}^a_{mnb} + \check{\nabla}_n \check{R}^a_{kmb} + \check{\nabla}_m \check{R}^a_{nkb} = 0. \tag{18}$$

Их называют тождествами Бианки – Падова.

С тензорами кривизны (6) и (7) тесно связаны коммутаторы

$$\nabla_{mn} = \nabla_m \nabla_n - \nabla_n \nabla_m \quad \text{и} \quad \check{\nabla}_{mn} = \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n - \check{\nabla}_n \check{\nabla}_m. \tag{19}$$

В применении к любому тензорному полю каждый из них дает билинейную форму от соответствующего тензора кривизны и от дифференцируемого тензора – ту самую билинейную форму, о которой выше шла речь по поводу операции $\check{\nabla}_k - \nabla_k$. Например, аналогично (9) имеем

$$\nabla_{mn} g^{ab} = R^a_{mns} g^{sb} + R^b_{mns} g^{as}, \tag{20}$$

$$\check{\nabla}_{mn} g^{ab} = \check{R}^a_{mns} g^{sb} + \check{R}^b_{mns} g^{as}. \tag{21}$$

В частности, получается квадратичная форма $\nabla_{mn} R^a_{pqb} =$

$$= R^a_{mns} R^s_{pqb} - R^s_{mnp} R^a_{sqb} - R^s_{mnq} R^a_{psb} - R^s_{mnb} R^a_{pqs}.$$

До сих пор по существу мы исходили только из формул (5) и (8), предполагая лишь, что входящие в них аффинные связности симметричны. Теперь же примем во внимание формулу (4), в силу которой следующие

Тензор (7) удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\check{R}^{a}_{mnb} + \check{R}^{a}_{nmb} = 0, \qquad \check{R}^{a}_{mnb} + \check{R}^{a}_{bmn} + \check{R}^{a}_{nbm} = 0. \tag{15}$$

Таким же условиям удовлетворяют тензоры (6) и (13), а также тензоры

$$\nabla_m P^{a}_{nb} - \nabla_n P^{a}_{mb} \quad \text{и} \quad \check{\nabla}_m P^{a}_{nb} - \check{\nabla}_n P^{a}_{mb}. \tag{16}$$

Наряду с алгебраическими тождествами (15) имеются дифференциальные, а именно:

$$\nabla_k R^{a}_{mnb} + \nabla_n R^{a}_{kmb} + \nabla_m R^{a}_{nkb} = 0, \tag{17}$$

$$\check{\nabla}_k \check{R}^{a}_{mnb} + \check{\nabla}_n \check{R}^{a}_{kmb} + \check{\nabla}_m \check{R}^{a}_{nkb} = 0. \tag{18}$$

Их называют тождествами Бианки – Падова.

С тензорами кривизны (6) и (7) тесно связаны коммутаторы

$$\nabla_{mn} = \nabla_m \nabla_n - \nabla_n \nabla_m \quad \text{и} \quad \check{\nabla}_{mn} = \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n - \check{\nabla}_n \check{\nabla}_m. \tag{19}$$

В применении к любому тензорному полю каждый из них дает билинейную форму от соответствующего тензора кривизны и от дифференцируемого тензора – ту самую билинейную форму, о которой выше шла речь по поводу операции $\check{\nabla}_k - \nabla_k$. Например, аналогично (9) имеем

$$\nabla_{mn} g^{ab} = R^{a}_{mns} g^{sb} + R^{b}_{mns} g^{as}, \tag{20}$$

$$\check{\nabla}_{mn} g^{ab} = \check{R}^{a}_{mns} g^{sb} + \check{R}^{b}_{mns} g^{as}. \tag{21}$$

В частности, получается квадратичная форма $\nabla_{mn} R^{a}_{pqb} =$

$$= R^{a}_{mns} R^{s}_{pqb} - R^{s}_{mnp} R^{a}_{sqb} - R^{s}_{mnq} R^{a}_{psb} - R^{s}_{mnb} R^{a}_{pqs}.$$

До сих пор по существу мы исходили только из формул (5) и (8), предполагая лишь, что входящие в них аффинные связности симметричны. Теперь же примем во внимание формулу (4), в силу которой следующие

производные равны нулю:

$$\nabla_k g_{ab} = 0, \qquad \nabla_k g^{ab} = 0. \tag{22}$$

Благодаря этому из формулы (9) и аналогичной формулы для g_{ab} находим другие производные, а именно:

$$\check{\nabla}_k g^{ab} = P^{a}_{ks} g^{sb} + P^{b}_{ks} g^{as}, \tag{23}$$

$$\check{\nabla}_k g_{ab} = - P^{s}_{ka} g_{sb} - P^{s}_{kb} g_{as}. \tag{24}$$

Благодаря тому же из формулы (20) и аналогичной формулы для g_{ab} находим, что

$$R^{a}_{mns} g^{sb} + R^{b}_{mns} g^{as} = 0, \qquad R^{s}_{mna} g_{sb} + R^{s}_{mnb} g_{as} = 0. \tag{25}$$

Докажем, что тензор

$$R_{mnab} = R^{s}_{mna} g_{sb} \tag{26}$$

обладает следующим свойством:

$$R_{abmn} = R_{mnab}. \tag{27}$$

Действительно, согласно первой из формул (15) и второй из формул (25) имеем

$$R_{mnab} + R_{nmab} = 0, \qquad R_{mnab} + R_{mnba} = 0. \tag{28}$$

Напишем вторую из формул (15) четырежды, циклически переставляя индексы:

1) $R_{mnab} + R_{amnb} + R_{namb} = 0,$ 3) $R_{abmn} + R_{mabn} + R_{bman} = 0,$

2) $R_{bmna} + R_{nbma} + R_{mnba} = 0,$ 4) $R_{nabm} + R_{bnam} + R_{abnm} = 0.$

Вычитая из верхних этих равенств нижние, получаем

1,2) $R_{mnab} - R_{mnba} = R_{bmna} + R_{nbma} - R_{amnb} - R_{namb},$

производные равны нулю:

$$\nabla_\kappa g_{ab} = 0 , \qquad \nabla_\kappa g^{ab} = 0 . \tag{22}$$

Благодаря этому из формулы (9) и аналогичной формулы для g_{ab} находим другие производные, а именно:

$$\check{\nabla}_\kappa g^{ab} = P^{a}_{\kappa s} g^{sb} + P^{b}_{\kappa s} g^{as} , \tag{23}$$

$$\check{\nabla}_\kappa g_{ab} = - P^{s}_{\kappa a} g_{sb} - P^{s}_{\kappa b} g_{as} . \tag{24}$$

Благодаря тому же из формулы (20) и аналогичной формулы для g_{ab} находим, что

$$R^{a}_{mns} g^{sb} + R^{b}_{mns} g^{as} = 0 , \qquad R^{s}_{mna} g_{sb} + R^{s}_{mnb} g_{as} = 0 . \tag{25}$$

Докажем, что тензор

$$R_{mnab} = R^{s}_{mna} g_{sb} \tag{26}$$

обладает следующим свойством:

$$R_{abmn} = R_{mnab} . \tag{27}$$

Действительно, согласно первой из формул (15) и второй из формул (25) имеем

$$R_{mnab} + R_{nmab} = 0 , \qquad R_{mnab} + R_{mnba} = 0 . \tag{28}$$

Напишем вторую из формул (15) четырежды, циклически переставляя индексы:

1) $R_{mnab} + R_{amnb} + R_{namb} = 0$, 3) $R_{abmn} + R_{mabn} + R_{bman} = 0$,

2) $R_{bmna} + R_{nbma} + R_{mnba} = 0$, 4) $R_{nabm} + R_{bnam} + R_{abnm} = 0$.

Вычитая из верхних этих равенств нижние, получаем

1,2) $R_{mnab} - R_{mnba} = R_{bmna} + R_{nbma} - R_{amnb} - R_{namb}$,

3,4) $R_{abmn} - R_{abnm} = R_{nabm} + R_{bnam} - R_{mabn} - R_{bman}$.

Отсюда и из (28) следует (27).

Следующие комбинации заслуживают специальных обозначений:

$$R_{mn} = R^{s}_{smn} , \quad \check{R}_{mn} = \check{R}^{s}_{smn} , \quad P_{mn} = P^{s}_{smn} ,$$

$$\mathcal{P}_{mn} = R^{s}_{mns} , \quad \check{\mathcal{P}}_{mn} = \check{R}^{s}_{mns} ,$$

$$\Phi^{ab}_{\kappa} = (\check{\nabla}_\kappa - P_\kappa) g^{ab} , \quad \Phi^{a} = \Phi^{a\kappa}_{\kappa} = g^{mn} P^{a}_{mn} , \tag{29}$$

$$P_a = P^{n}_{an} , \quad P^a = g^{ab} P_b .$$

Из (13) следует равенство

$$P^{s}_{mns} = 0 , \tag{30}$$

так что согласно (11) или (12)

$$\check{\mathcal{P}}_{mn} - \mathcal{P}_{mn} = \partial_m P_n - \partial_n P_m . \tag{31}$$

Таким же образом из (6) находим, что

$$\mathcal{P}_{mn} = \partial_m \Gamma^{s}_{ns} - \partial_n \Gamma^{s}_{ms} , \tag{32}$$

а из (4) следует, что

$$\Gamma^{s}_{ms} = \frac{1}{2} g^{as} \partial_m g_{as} = \varepsilon^{-1} \partial_m \varepsilon . \tag{33}$$

Поэтому

$$\mathcal{P}_{mn} = 0 , \qquad \check{\mathcal{P}}_{mn} = \partial_m P_n - \partial_n P_m . \tag{34}$$

Согласно (15) имеем

$$R_{mn} = R_{nm} , \qquad \check{\mathcal{P}}_{mn} + \check{R}_{mn} - \check{R}_{nm} = 0 . \tag{35}$$

Применяя коммутатор

$$(\check{\nabla}_n - P_m)(\check{\nabla}_n - P_n) - (\check{\nabla}_n - P_n)(\check{\nabla}_m - P_m) \tag{36}$$

к тензору g^{ab}, согласно (20) и (34) получаем

$$\check{R}^{a}_{mns}\, g^{sb} + \check{R}^{b}_{mns}\, g^{sa} = (\check{\nabla}_m - P_m)\,\Phi^{ab}_{n} - (\check{\nabla}_n - P_n)\,\Phi^{ab}_{m} + \check{\Omega}_{mn}\, g^{ab}. \tag{37}$$

Наконец, так как тензор (I3) удовлетворяет условиям симметрии (I5) и его след (30) равен нулю, то свернутый тензор

$$P_{mn} = P^{a}_{mb}\, P^{b}_{an} - P_s\, P^{s}_{mn} = P_{nm} \tag{38}$$

симметричен. Впрочем, в его симметричности можно убедиться непосредственно. Этот тензор очень важен: через него выражается действие гравитационного поля. Последнее выбираем в виде интеграла

$$\mathcal{E} = \int \mathcal{L}\, dV\,, \tag{39}$$

где dV - элемент объема (3),

$$\mathcal{L} = g^{mn} P_{mn}\,. \tag{40}$$

Вариации интегралов типа (39) находим с помощью теоремы Гаусса:

$$\int \nabla_a F^a\, dV = \oint F^a g_{ab}\, d\Sigma^b. \tag{4I}$$

Согласно (II)

$$\mathcal{L} = S + \nabla_a\,(\Phi^a - P^a)\,, \tag{42}$$

где

$$S = g^{mn} S_{mn}\,, \quad S_{mn} = R_{mn} - \tfrac{1}{2}(\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm})\,. \tag{43}$$

Применяя теорему (4I) и пренебрегая вариациями на границе интегрирования, отсюда находим

$$\delta\,\mathcal{E} = \delta \int S\, dV = \int (S_{mn} - \tfrac{1}{2} S\, g_{mn})\,\delta g^{mn}\, dV. \tag{44}$$

Добавляя к (39) действие источников, приходим к уравнению

$$S_{mn} - \tfrac{1}{2} S\, g_{mn} = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\, T_{mn}. \tag{45}$$

При выводе формулы (44) учтена вариация объема (3):

$$\delta\, dV = -\tfrac{1}{2}\,(g_{mn}\,\delta g^{mn})\, dV. \tag{46}$$

При гладких отображениях области интегрирования, не затрагивающих ее границы, интегралы

$$\mathcal{H} = \int g^{ab} R_{ab}\, dV \quad \text{и} \quad \mathcal{K} = \int g^{ab} \check{R}_{ab}\, dV \tag{47}$$

не меняются. Вариация первого из них равна

$$\delta\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\int (R_{mn} + R_{nm} - R_{ab}\, g^{ab} g_{mn})\,\delta g^{mn}\, dV\,. \tag{48}$$

Подставляя сюда производную Ли от кометрического тензора, равную

$$\delta g^{mn} = \xi^s \partial_s g^{mn} - g^{sn}\partial_s \xi^m - g^{ms}\partial_s \xi^n = - g^{sn}\nabla_s \xi^m - g^{ms}\nabla_s \xi^n, \tag{49}$$

и применяя теорему (4I), получаем

$$\delta\mathcal{H} = \int \xi^m \nabla_s\, g^{sn}(R_{mn} + R_{nm} - R_{ab}\, g^{ab} g_{mn})\, dV. \tag{50}$$

Эта вариация должна быть равна нулю. Поэтому

$$\nabla_s\, g^{sn}(R_{mn} + R_{nm} - R_{ab}\, g^{ab} g_{mn}) = 0\,. \tag{5I}$$

Что касается второго из интегралов (47), то его полная вариация равна

$$\delta\mathcal{K} = \tfrac{1}{2}\int (\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm} - \check{R}_{ab}\, g^{ab} g_{mn})\,\delta g^{mn}\, dV - \int \Theta^{mn}_{a}\,\delta\check{\Gamma}^{a}_{mn}\, dV\,, \tag{52}$$

где

$$\Theta_a^{mn} = \Phi_a^{mn} - \frac{1}{2}(\Phi^m \delta_a^n + \Phi^n \delta_a^m). \tag{53}$$

(При выводе формулы (44) фоновая связность не варьировалась !). Чтобы вывести формулу (52) , надо доказать равенство

$$\int g^{ab}\,\delta \check{R}_{ab}\, dV = -\int \Theta_a^{mn}\,\delta \check{\Gamma}^a_{mn}\, dV. \tag{54}$$

Согласно (I2) имеем

$$\delta \check{R}^a_{mnb} = \check{\nabla}_m\, \delta\check{\Gamma}^a_{nb} - \check{\nabla}_n\, \delta \check{\Gamma}^a_{mb}. \tag{55}$$

Поэтому

$$g^{ab}\,\delta\check{R}_{ab} = g^{ab}\,\check{\nabla}_m\,\delta\check{\Gamma}^m_{ab} - g^{ab}\,\check{\nabla}_a\,\delta\check{\Gamma}^m_{mb}. \tag{56}$$

Теперь заметим, что для любого векторного поля F^m

$$\nabla_m F^m = (\check{\nabla}_m - P_m) F^m. \tag{57}$$

Полагая $F^m = g^{ab}\delta\check{\Gamma}^m_{ab}$, по теореме (4I) мы можем отбросить интеграл по dV от скаляра

$$(\check{\nabla}_m - P_m)(g^{ab}\delta\check{\Gamma}^m_{ab}) = \Phi^{ab}_m\,\delta\check{\Gamma}^m_{ab} + g^{ab}\,\check{\nabla}_m\,\delta\check{\Gamma}^m_{ab}. \tag{58}$$

По той же причине мы можем отбросить интеграл по dV и от скаляра

$$(\check{\nabla}_a - P_a)(g^{ab}\delta\check{\Gamma}^m_{mb}) = \Phi^b\,\delta\check{\Gamma}^m_{mb} + g^{ab}\,\check{\nabla}_a\,\delta\check{\Gamma}^m_{mb}. \tag{59}$$

Отсюда уже легко получается формула (54). Как частный случай, при $P^a_{mn} = 0$ из (54) получаем

$$\int g^{ab}\,\delta R_{ab}\, dV = 0. \tag{60}$$

Выведя формулу (52), подставим в нее производную Ли (49) и производную Ли от фоновой связности, равную

$$\delta\check{\Gamma}^a_{mn} =$$
$$\partial_m\partial_n\xi^a + \xi^s\partial_s\check{\Gamma}^a_{mn} + \check{\Gamma}^a_{sn}\,\partial_m\xi^a + \check{\Gamma}^a_{ms}\,\partial_n\xi^s - \check{\Gamma}^s_{mn}\,\partial_s\xi^a =$$
$$= \check{\nabla}_m\check{\nabla}_n\xi^a + \xi^s \check{R}^a_{smn}. \tag{61}$$

В результате получим

$$\delta\mathcal{K} = \int \xi^m \nabla_s\, g^{sn}(\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm} - \check{R}_{ab}\, g^{ab} g_{mn})\, dV -$$
$$-\int \Theta_a^{mn}(\check{\nabla}_m\check{\nabla}_n\xi^a + \xi^s\check{R}^a_{smn})\, dV. \tag{62}$$

Применяя формулу (57) к векторному полю

$$F^m = \Theta_a^{mn}\,\check{\nabla}_n\xi^a - \xi^a(\check{\nabla}_n - P_n)\Theta_a^{mn},$$

находим

$$\nabla_m F^m = \Theta_a^{mn}\,\check{\nabla}_m\check{\nabla}_n\xi^a - \xi^a(\check{\nabla}_m - P_m)(\check{\nabla}_n - P_n)\Theta_a^{mn}.$$

Следовательно, по теореме (4I)

$$\int \Theta_a^{mn}\,\check{\nabla}_m\check{\nabla}_n\xi^a dV = \int \xi^a(\check{\nabla}_m - P_m)(\check{\nabla}_n - P_n)\Theta_a^{mn}\, dV.$$

Подставляя этот результат в (62), приходим к тождеству

$$\nabla_b\, g^{bn}(\check{R}_{an} + \check{R}_{na} - \check{R}_{rs}\, g^{rs} g_{an}) =$$
$$= (\check{\nabla}_m - P_m)(\check{\nabla}_n - P_n)\Theta_a^{mn} + \Theta_s^{mn}\check{R}^s_{amn}. \tag{63}$$

Считая, что действие источников не зависит от выбора фоновой связности, как и в теории Эйнштейна, имеем

$$\nabla_b\, g^{bn}\, T_{an} = 0. \tag{64}$$

Поэтому в силу тождеств (5I) и (63) из уравнения (45) получаем следствие:

$$(\check{\nabla}_m - P_m)(\check{\nabla}_n - P_n)\Theta_a^{mn} + \Theta_s^{mn}\check{R}^s_{amn} = 0. \tag{65}$$

Изложение тензорной теории гравитации закончим написанием тождества

$$2 g^{am} S_{mb} - S\delta^a_b - \mathcal{E}^a_b = (\check{\nabla}_n - P_n)[U^{an}_b + \delta^n_b \Phi^a - \Phi^{na}_b], \qquad (66)$$

где

$$\mathcal{E}^a_b = \Phi^{mn}_b (P^a_{mn} - P_m \delta^a_n) - \mathcal{L}\delta^a_b, \qquad (67)$$

$$U^{an}_b = g^{ns} P^a_{bs} - g^{as} P^n_{bs} + \delta^a_b (\Phi^n - P^n) - \delta^n_b (\Phi^a - P^a). \qquad (68)$$

Это тождество нетрудно доказать непосредственно.

Данное изложение основано на статьях автора /I-4/. Обзор предыдущих работ см. в /I/.

Комментарии

Ничего не говорилось выше ни о степени гладкости, ни о степени сложности топологической структуры дифференцируемого многообразия. Так вот, известно, что симметричную аффинную связность можно задать на как угодно сложном, но достаточно гладком многообразии. Действительно, на таком многообразии существует положительно определенное симметричное поле $\check{g}_{ab}$ (теорема Уитни), а значит, и связность Кристоффеля

$$\check{\Gamma}^a_{mn} = \frac{1}{2}\check{g}^{as}(\partial_m \check{g}_{sn} + \partial_n \check{g}_{sm} - \partial_s \check{g}_{mn}). \qquad (69)$$

Хуже обстоит дело с метрикой (2). Подобно метрике Пуанкаре - Минковского, она должна быть метрикой нормального гиперболического типа, а потому рассматриваемое многообразие должно допускать поле направлений /5,6/.

Связность $\check{\Gamma}^a$ называется эквиаффинной /7,8/, если всюду на многообразии

$$\check{Q}_{mn} = \check{R}^s_{mns} = 0. \qquad (70)$$

В таком случае свернутый тензор кривизны

$$\check{R}_{mn} = \check{R}^s_{smn} \qquad (71)$$

симметричен, ибо

$$\check{R}_{nm} - \check{R}_{mn} = \check{Q}_{mn}. \qquad (72)$$

Эквиаффинную связность можно задать на любом достаточно гладком многообразии, поскольку на таком многообразии можно задать даже кристоффелеву связность (69).

Связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ назовем полупримитивной, если ее тензор кривизны удовлетворяет условию

$$\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm} = 0. \qquad (73)$$

В этом случае

$$S_{mn} = R_{mn}, \qquad (74)$$

уравнение (45) совпадает с уравнением Эйнштейна, а условие (65) удовлетворяется автоматически. Несмотря на это до теории Эйнштейна еще далеко.

Связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ назовем примитивной, если её тензор кривизны равен нулю:

$$\check{R}^a_{mnb} = 0. \qquad (75)$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений относительно $\check{\Gamma}^a_{mn}$ находится следующим образом. Пусть

$$\tilde{x}^a = f^a(x^1, \dots, x^N), \quad a \in \{1, \dots, N\}, - \qquad (76)$$

некоторая система скалярных функций с якобианом

$$|\partial f^a / \partial x^b| \neq 0. \qquad (77)$$

В таком случае решение системы (75) удовлетворяет следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{\partial f^a}{\partial x^s} \check{\Gamma}^s_{mn} = \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^m \partial x^n} \quad , \quad a \in \{1,\dots,N\} . \tag{78}$$

Систему функций (76) можно выбрать за новую координатную карту. В этой карте все коэффициенты фоновой связности равны нулю.

Если в карте (76) задать фоновую метрику с постоянными компонентами M_{ab}, то в карте x ее компоненты будут равны

$$\check{g}_{ab} = M_{kl} \frac{\partial f^k}{\partial x^a} \frac{\partial f^l}{\partial x^b} . \tag{79}$$

Компоненты же фоновой кометрики в карте x будут равны

$$\check{g}^{as} = M^{pq} \frac{\partial x^a}{\partial f^p} \frac{\partial x^s}{\partial f^q} , \tag{80}$$

причем $M^{pk} M_{kl} = \delta^p_l$. Мы можем вычислить компоненты фоновой связности по формуле Кристоффеля (69). Дифференцируя (79), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \check{g}_{ab} = M_{kl} \left\{ \frac{\partial f^l}{\partial x^b} \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^m \partial x^a} + \frac{\partial f^k}{\partial x^a} \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^m \partial x^b} \right\} .$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} (\partial_m \check{g}_{sn} + \partial_n \check{g}_{sm} - \partial_s \check{g}_{mn}) = M_{kl} \frac{\partial f^k}{\partial x^s} \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^m \partial x^n} . \tag{81}$$

Умножая это на (80), находим компоненты фоновой связности

$$\check{\Gamma}^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial f^l} \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^m \partial x^n} . \tag{82}$$

Очевидно, они удовлетворяют системе алгебраических уравнений (78). Замечательно, что в случае метрики (79) числа M_{ab} из формулы Кристоффеля (69) выпадают.

Выпадают они и из условий

$$\Phi^a = g^{mn} P^a_{mn} = 0 , \tag{83}$$

означающих, что координаты (76) являются гармоническими относительно метрики (2), поскольку в данном случае

$$\Phi^a = g^{mn} \left\{ \frac{\partial x^a}{\partial f^l} \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^m \partial x^n} - \Gamma^a_{mn} \right\} = \frac{\partial x^a}{\partial f^s} \Box f^s , \tag{84}$$

где $\Box f$ – дифференциальный параметр Бельтрами второго рода /9/.

Условиям (83) большое значение придает А.А. Логунов /10/, рассматривая их как обязательное уравнение для метрики (2).

Весьма интересна его идея о ненулевой массе покоя гравитона.

Полагая, что всюду на многообразии

$$\check{\Gamma}^a_{mn} = 0 , \tag{85}$$

мы приходим к теории гравитации Эйнштейна. При этом выражение для тензора (67) переходит в выражение для псевдотензора энергии гравитационного поля. Теорию гравитации Эйнштейна считают принципиально нелокальной /11/, упуская из виду необходимость введения в теорию фоновой связности.

В теории Эйнштейна локализация энергии зависит от выбора координатной системы. Странное дело, не правда ли? Ведь теория-то возникла из желания сформулировать законы природы независимо от выбора координат! Действительно, читаем:

> "Согласно теории относительности законы природы необходимо формулировать независимо от какого-либо конкретного выбора координат, так как системе координат ничто реально существующее не соответствует: о простоте гипотетического закона можно судить только по его общековариантной формулировке" /12/.

Введение фоновой связности (хотя бы и в примитивном виде) придает теории гравитации Эйнштейна желательную общековариантную форму. В простейшем варианте получается так, что гравитационное поле оказывается заданным в четырехмерном аффинном мире.

А.А. Логунов /10/ задает гравитационное поле в мире Пуанкаре – Минковского. Можно, однако, задавать гравитационное поле и в мире постоянной ненулевой кривизны. В таком случае фоновая связность представляется в виде (69), где метрический тензор $\check{g}_{ab}$ имеет сигнатуру $(1,-1,-1,-1)$, и ее тензор кривизны равен

$$\check{R}^a_{mnb} = K (\check{g}_{mb} \delta^a_n - \check{g}_{nb} \delta^a_m) , \tag{86}$$

где $K = const$ – мировая кривизна. В первую очередь заслуживает внимания мир Лобачевского с метрикой /13/

$$(ch^2\frac{r}{k})c^2dt^2 - dr^2 - (k^2 sh^2\frac{r}{k})(d\theta + \sin^2\theta)d\varphi^2 \tag{87}$$

и мир де Ситтера с метрикой /I4/

$$\frac{R^2}{\cos^2\theta}\left[d\theta^2 - \sin^2\xi\, d\xi^2 - \cos^2\xi\, d\eta^2 - d\zeta^2\right]. \tag{88}$$

В первом случае $K = -k^{-2}$, во втором случае $K = R^{-2}$. Метрика (87) задана на простом многообразии, а метрика (88) – на непростом. Поэтому метрика (87) ближе к метрике Пуанкаре – Минковского, чем метрика (88). Зато введение фоновой метрики (88) позволяет построить теорию гравитации в условиях, при которых эйнштейновская теория гравитации недействительна. Равным образом в этих условиях недействительна и логуновская теория гравитации. Как эйнштейновский, так и логуновский подходы к теории гравитации допустимы только на клиффордовых многообразиях /3,I5/, к числу которых гиперболоид де Ситтера не относится. Напротив, вышеизложенный тензорный подход с непримитивной фоновой связностью без кручения дает возможность построить теорию гравитации на любом многообразии, в том числе, конечно, и на гиперболоиде де Ситтера.

В обзоре работ П.А. Широкова, составленном Б.Л. Лаптевым, читаем: "В работе [II] (1925) впервые выделен и частично исследован весьма важный класс пространств, так называемые симметрические пространства, характеризуемые обращением в нуль ковариантной производной тензора кривизны. В последующие годы важность этого класса пространств была подтверждена исследованиями многих геометров. Крупнейший французский математик Э. Картан пришел к этим же пространствам, развивая теорию полупростых групп, в которой они играют существенную роль. В работах последних лет самого П.А. Широкова симметрические пространства подверглись всестороннему изучению, причем рассматривался случай и знаконеопределенной метрики, связанный со значительными трудностями " [I6, с. I2].

Результаты работ Э. Картана по теории симметрических пространств представлены в сборнике его статей /I7/.

Подчиним и мы фоновую связность условию

$$\check{\nabla}_k \check{R}^{\,a}_{mnb} = 0 . \tag{89}$$

Понятно, что этому условию удовлетворяет связность (69), если ее тензор кривизны равен (86).

Обратимся к тождеству (63). В работе /I8/ оно было доказано непосредственно. Попутно там для ковектора

$$\theta_a = (\check{\nabla}_m - P_m)(\check{\nabla}_n - P_n)\,\theta_a^{\ mn} + \dot{\theta}_s^{\ mn}\check{R}^{\,s}_{amn} \tag{90}$$

было найдено выражение

$$\theta_a = (\check{\nabla}_m - P_m)\left[g^{ms}(\check{R}_{sa} + \check{R}_{as})\right] - g^{ns}\check{\nabla}_a\check{R}_{ns} . \tag{91}$$

Значит, не только при условии (89), но и при более слабом условии

$$\check{\nabla}_k(\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm}) = 0 \tag{92}$$

ковектор (90) равняется

$$\theta_a = (\check{R}_{as} + \check{R}_{sa})\Phi^s . \tag{93}$$

Таким образом, при условии (92) следствие (65) принимает простой вид:

$$(\check{R}_{as} + \check{R}_{sa})\Phi^s = 0 . \tag{94}$$

В случае (86)

$$\check{R}_{as} + \check{R}_{sa} = 2(1-N)K\check{g}_{as} \tag{95}$$

и следствие (94) означает

$$K\check{g}_{as}\Phi^s = 0 . \tag{96}$$

Следовательно, если $K \neq 0$, то следствие (96) означает, что должны выполняться условия

$$\Phi^a = g^{mn}P_{mn}^{\ \ a} = 0. \tag{97}$$

Таким образом, в обоих случаях (87) и (88) условия (97) обязательны.

Метрика (87) в пределе $k \to \infty$ переходит в метрику

$$c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{98}$$

условия (97) переходят в условия (83), а связность (89) переходит в связность (82), где функции f^ℓ равны

$$f^0 = t\ , \quad f^1 = r\sin\theta\cos\varphi\ , \quad f^2 = r\sin\theta\sin\varphi\ , \quad f^3 = r\cos\theta. \tag{99}$$

Согласно (83) и (84) эти функции должны удовлетворять уравнению

$$\Box f = 0\ , \tag{100}$$

где $\Box f$ -дифференциальный параметр Бельтрами для метрики (2), описывающей гравитационное поле.

Литература

1. Черников Н.А. Необходимый объект в ОТО - тензор аффинной деформации. Труды первого ежегодного семинара ЛТФ "Гравитационная энергия и гравитационные волны". ОИЯИ,Р2-89-138, Дубна, 1989, с. 12-23.
2. Черников Н.А. Геометрическая теория гравитации. Труды рабочего совещания по разработке и созданию излучателя и детектора гравитационных волн. ОИЯИ,Д4-89-221, Дубна, 1989, с. 13-17.
3. Черников Н.А. Проблема энергии в ОТО и тензорный анализ. Сообщение ОИЯИ Р2-89-182, Дубна, 1989.
4. Черников Н.А. Тензор, потерянный в ОТО. Сообщение ОИЯИ Р2-89-224, Дубна, 1989.
5. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИЛ, 1960, с. 21-23.
6. Черников Н.А. Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле. ДАН СССР, 1962, т. 114, № 1, с. 92.
7. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л.: Гостехиздат, 1950, с. 154-156.
8. Черников Н.А. Необходимый объект в ОТО - фоновая связность. Препринт ОИЯИ Р2-88-778, Дубна, 1988.
9. Черников Н.А. Два тождества для дифференциального параметра Бельтрами второго рода. Сообщение ОИЯИ Р2-86-487, Дубна, 1986.
10. Логунов А.А. Основы релятивистской теории гравитации. Ядерная физика, т. 51, вып. 2, 1990, с. 599-605.
11. Фаддеев Л.Д. Проблема энергии в теории тяготения. УФН, 1982, т. 136, вып. 3, с. 436.
12. Эйнштейн А. Замечание к работе Франца Селети "К космологической системе" (1922). Собр. науч. трудов, т. 2. М.: Наука, 1966, с. 113.

13. Черников Н.А. Трудные вопросы теории относительности. ЭЧАЯ, 1987, т. 18, вып. 5, с. 1011.
14. Шавохина Н.С. Задача Коши для уравнения Дирака в пространстве де Ситтера и антикоммутатор. ТМФ, 1972, т. 10, № 3, с. 415.
15. Черников Н.А. Псевдотензор энергии - импульса как функционал фоновой связности. В сб.: Труды 8-го Международного совещания по проблемам квантовой теории поля . ОИЯИ,Д2-87-798, Дубна, 1987, с. 54-61.
16. Широков П.А. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966.
17. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М. : ИЛ, 1949, 384 с.
18. Черников Н.А. Вариационный метод Гильберта и тензор Папапетру. Сообщение ОИЯИ Р2-87-490, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июня 1990 года.

Черников Н.А. Р2-90-399

Эйнштейновская теория гравитации с точки зрения тензорного анализа

В эйнштейновской теории гравитации с самого начала был потерян один нужный геометрический объект – фоновая связность. Эта оплошность, бросив тень на тензорный анализ, породила псевдотензорную субкультуру, венцом которой явился псевдотензор энергии гравитационного поля. Введение фоновой связности позволило построить тензорную теорию гравитации без нелокализуемых физических объектов. Излагаемая здесь теория гравитации содержит эйнштейновскую как частный случай.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1990

Перевод Г.Г.Сандуковской

Chernikov N.A. P2-90-399

Einstein's Theory of Gravity from the Point of View of Tensor Analysis

In Einstein's theory of gravity an important geometrical object, the background connection, was lost from the outset. This carelessness, having put tensor analysis in a bad light, generated a pseudotensor subculture that was crowned with "pseudotensor energy" of the gravitational field. Introduction of the background connection allowed the construction of the tensor gravity theory without nonlocalizable physical objects. Einstein's gravity theory enters into the expounded gravity theory as a particular case.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1990