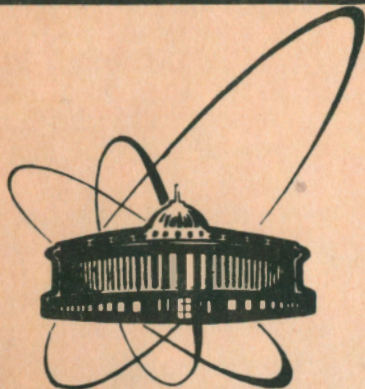


90-30



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Ш 42

P2-90-30

И. А. Шелаев

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА
И ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА.

Заряженная сфера

1990

Введение

В работе^{1/} показано, что если сферическую волну, порождаемую движущимся точечным зарядом в каждой точке его траектории, принять за эквипотенциальную поверхность, то такой модифицированный принцип Гюйгенса приводит к описанию поля точечного заряда, альтернативному запаздывающему потенциалу. Так, известная для запаздывающего потенциала сингулярность на конусе Маха при сверхсветовой скорости сводится к конечному скачку величины потенциала на границе конуса, а сингулярность точечного заряда сохраняется только в той точке пространства, в которой находится заряд в данный момент времени.

Задача о потенциале движущегося заряда конечных размеров позволяет уяснить ряд деталей распределения потенциала, которые остались за рамками рассмотренной задачи^{1/} в силу ее ограниченности точечным зарядом. Для равномерно заряженной движущейся сферы потенциал оказывается конечным при любой скорости движения и описывается кусочно-непрерывными функциями.

Потенциал заряженной сферы, движущейся равномерно и прямолинейно

I. Пусть в точке наблюдения N с координатами (x, y, z, t) требуется найти потенциал $\varphi(x, y, z, t)$, созданный зарядом e сферы радиуса a с поверхностной плотностью заряда σ

$$\sigma = e/4\pi a^2, \quad (1)$$

движущейся равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью v вдоль оси x так, что любая точка сферы с координатами (ξ, η, ζ) в произвольный момент времени t' удовлетворяет уравнению

$$(\xi - vt')^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2. \quad (2)$$

Предположим, что плотность заряда на a -сфере остается постоянной, даже если на сфере появится некоторая разность потен-

циалов, т.е. рассматриваем диэлектрическую сферу.

2. Вокруг точки N построим сферу радиуса λ

$$\lambda = c(t - t') \geq 0, \quad (3)$$

такую, что любая точка на ней удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2. \quad (4)$$

Решив совместно уравнения (2) и (4), найдем множество значений λ таких, что любое λ множества удовлетворяет неравенствам

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2. \quad (5)$$

В этом множестве выберем две λ -сферы с радиусами λ и $\lambda + d\lambda$ и обозначим через $dS(\lambda)$ часть площади α -сферы, которая заключена между двумя выбранными λ -сферами. Находящийся на площадке $dS(\lambda)$ бесконечно малый заряд $\sigma dS(\lambda)$ можно считать точечным, т.к. каждая часть этого заряда создает эквипотенциальные поверхности, приходящие синхронно в точку N , поэтому в соответствии с модифицированным принципом Гюйгенса эта часть заряда e создает в точке N потенциал $d\phi$

$$d\phi = \sigma dS(\lambda) / \lambda.$$

Тогда весь находящийся на поверхности α -сферы заряд e создает в точке N потенциал

$$\phi = \int d\phi = \int_{S_e} \frac{\sigma dS(\lambda)}{\lambda}. \quad (6)$$

Здесь под S_e понимается та часть площади α -сферы, которая покрывается множеством (5) и которую условимся называть видимой площадью α -сферы.

3. Для реализации изложенного выше алгоритма вычисления потенциала заряженной α -сферы найдем прежде всего общие точки α - и λ -сфер. С этой целью выражение в скобке уравнения (2) перепишем с учетом определения (3) как

$$\xi - vt' = \xi - vt + \beta\lambda = \xi_1,$$

где $\beta = v/c$. Тогда первую скобку уравнения (4) запишем как

$$\xi - x = \xi - vt - (x - vt) = \xi_1 - x_1 - \beta\lambda.$$

После такого параллельного переноса начала системы координат уравнения (2) и (4) принимают вид

$$a^2 = \xi_1^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad (7)$$

$$\lambda^2 = (\xi_1 - x_1 - \beta\lambda)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2. \quad (8)$$

Теперь центр α -сферы находится в начале координат, а λ -сферы - в точке с координатами $(x_1 + \beta\lambda, y, z)$, так что расстояние c между ними равно

$$c = \sqrt{(x_1 + \beta\lambda)^2 + y^2 + z^2}. \quad (9)$$

Если координаты (ξ_1, η, ζ) выразить через новые (ξ_2, η_2, ζ_2) с помощью матрицы поворота осей координат

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_1 + \beta\lambda)/c & -\rho/c & 0 \\ y/c & y(x_1 + \beta\lambda)/\rho c & -z/\rho \\ z/c & z(x_1 + \beta\lambda)/\rho c & y/\rho \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$. То подставляя их поочередно в (7) и (8), находим

$$a^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2.$$

$$\lambda^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 + c^2 - 2c\xi_2.$$

Обозначим общие координаты сфер индексом 0 , тогда

$$\xi_{20} = (a^2 + c^2 - \lambda^2)/c/2, \quad (11)$$

$$\eta_{20}^2 + \zeta_{20}^2 = \frac{2a^2c^2 + 2a^2\lambda^2 + 2c^2\lambda^2 - a^4 - c^4 - \lambda^4}{4c^2}. \quad (12)$$

Из двух последних формул следует известный из элементарной геометрии факт, что точки пересечения двух сфер лежат в одной плоскости ($\xi_0 = \text{const}$), где они определяют окружность радиуса, квадрат которого равен $\eta_{20}^2 + \zeta_{20}^2$.

4. В числителе выражения (12) нетрудно узнать формулу Герона для площади треугольника со сторонами (a, c, λ) , который назовем треугольником встречи рассматриваемых сфер. Из условия действительности значений общих координат α - и λ -сфер находим, что стороны треугольника встречи должны удовлетворять неравенствам

$$-a + c + \lambda \geq 0, \quad a - c + \lambda \geq 0, \quad a + c - \lambda \geq 0.$$

Эти неравенства при $a = \text{const}$ определяют область существования общих точек α - и λ -сфер, границы которой найдем, обратив эти неравенства в равенства

$$c_m = \lambda_m + a, \quad c_\mu = -\lambda_\mu + a, \quad c_M = \lambda_M - a. \quad (13)$$

На плоскости (λ, c) найденные границы представляют собой прямые, которые совместно с очевидными условиями

$$c > 0, \quad \lambda > 0$$

определяют полуполосу, границы которой назовем соответственно m -, μ - и M -границами. Подставляя в (13) $c(\lambda)$ из (9), получим для λ квадратные уравнения, определяющие граничные λ множества (5). Очевидно, выражения (13) определяют простейшую инцидентность двух сфер, центры которых лежат на одной прямой, а сами сферы касаются друг друга внутренним или внешним образом.

С другой стороны, из (9) на плоскости (λ, c) имеем гиперболу, уравнение которой в сферических координатах

$$x_1 = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

можно записать как

$$c^2 - (\beta \lambda + r \cos \vartheta)^2 = r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (14)$$

Полагая здесь $r = \text{const}$, а ϑ — параметром, получим пучок ϑ -гипербол, представляющих траекторию α -сферы на выбранной плоскости. Пересечение ϑ -гиперболы с границами треугольника встречи определит граничные значения λ из (5).

5. Для общих точек введем сферические координаты

$$\xi_{20} = a \cos \theta, \quad \eta_{20} = a \sin \theta \cos \phi, \quad \zeta_{20} = a \sin \theta \sin \phi, \quad (15)$$

тогда из (11) находим

$$\cos \theta = (a^2 + c^2 - \lambda^2) / (2ac). \quad (16)$$

Отсюда видно, что переменная θ есть противолежащий стороне λ угол треугольника встречи и определяется величиной λ , т.е. $\theta = \theta(\lambda)$, а ϕ — независимая. С учетом этого подставим (15) в (10) и найдем координаты α -сферы

$$\xi_1 = a(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\cos\phi),$$

$$\eta = a(\sin\alpha\cos\phi\cos\theta + \cos\alpha\cos\phi\sin\theta\cos\phi - \sin\phi\sin\theta\sin\phi),$$

$$\zeta = a(\sin\alpha\sin\phi\cos\theta + \cos\alpha\sin\phi\sin\theta\cos\phi + \cos\phi\sin\theta\sin\phi),$$

где

$$\cos\alpha = (x_1 + \beta\lambda)/c, \quad \cos\phi = y/\rho, \quad \sin\phi = z/\rho. \quad (17)$$

Последнее выражение представляет собой параметрическое задание a -сферы в той координатной системе (ξ_1, η, ζ) , в которой она покоится. Параметрами, определяющими любую точку a -сферы, общую с некоторой точкой λ -сферы, являются λ и ϕ , т.к. угол φ зависит только от координат точки N и потому постоянен, а углы α и θ — функции λ . Поэтому коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы a -сферы имеют значения

$$E = a^2 [\cos^2\theta\sin^2\phi + (\theta' + \alpha'\cos\phi)^2],$$

$$F = -a^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi, \quad G = a^2\sin^2\theta.$$

Отсюда находим дифференциальный элемент площади a -сферы

$$dS(\lambda) = \sqrt{EG - F^2} = a^2\sin\theta(\theta' + \alpha'\cos\phi)d\lambda d\phi, \quad (18)$$

где

$$\theta' = d\theta/d\lambda, \quad \alpha' = d\alpha/d\lambda.$$

Обозначим через μ тот угол треугольника встречи, который противоположен стороне a , тогда, дифференцируя выражения (16) и (17) по λ , найдем

$$\theta' = (1 - \beta\cos\alpha\cos\mu)/(c\sin\mu), \quad \alpha' = -\beta\sin\alpha/c.$$

Пользуясь этими выражениями, получаем, что круглая скобка в (18) обращается в нуль, если

$$\cos\phi = (1 - \beta\cos\alpha\cos\mu)/(\beta\sin\alpha\sin\mu), \quad (19)$$

Пусть здесь $\cos\phi = \pm 1$, тогда из последнего выражения найдем, что

$$\cos(\alpha \mp \mu) = 1/\beta.$$

Следовательно, выражение (18) сохраняет знак, если $\beta < 1$.

6. Пусть $\beta < 1$, тогда, пользуясь выражением (18) и полагая, что ϕ изменяется в пределах от 0 до 2π , найдем прежде $dS(\lambda)$

$$dS(\lambda) = 2 \int_0^{\pi} dS = 2\pi a^2 \theta' \sin \theta d\lambda, \quad (20)$$

а затем и видимую площадь S_e α -сферы, полагая, что θ изменяется от нуля до $\theta(\lambda)$,

$$S_e = 2\pi a^2 [1 - \cos \theta(\lambda)] = \pi a [\lambda^2 - (c - a)^2] / c. \quad (21)$$

т.е. получили известную из элементарной геометрии формулу поверхности шарового сегмента.

Вводя нормированную площадь $s = S_e / (2\pi a^2)$, перепишем (21) как

$$\lambda^2 - [c - a(1 - s)]^2 = a^2 s(2 - s).$$

Рассматривая в этом уравнении s как параметр, находим, что на плоскости (λ, c) оно представляет собой уравнение пучка равнобочных s -гипербол, заполняющих полуплоску существования треугольника встречи. При этом на m - и μ -границах $s = 0$, а на n -границе $s = 2$.

Подставив (18) в (6) и учитывая (1), найдем потенциал α -сферы в виде

$$\Phi = \frac{e}{4\pi} \int \frac{\sin(\theta' + \alpha' \cos \phi)}{\lambda} d\phi d\lambda.$$

Полагая опять, что $\phi = 0 + 2\pi$, и выполняя интегрирование по ϕ и (по частям) по λ , находим с учетом (16)

$$\Phi = \frac{e}{4a} \left[\frac{\lambda^2 - (c - a)^2}{\lambda c} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^2 - (c - a)^2}{\lambda^2 c} d\lambda.$$

Подставляя в последний интеграл $c(\lambda)$ из (9), после элементарного интегрирования найдем следующее общее выражение для потенциала α -сферы

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{e}{4a} \left[\frac{\lambda^2 - a^2}{\lambda c} + \frac{a^2 c}{r^2 \lambda} + \frac{1 - \beta^2}{\beta} \bar{\alpha} + \beta x_1 \frac{r^2 - a^2}{r^3} \bar{r} \right] \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \\ &= \Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\bar{\alpha} = \operatorname{Arsh} \frac{x_1 + \beta \lambda}{\rho} = \ln(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}), \quad \Pi(\bar{\alpha}) = \alpha.$$

$$\bar{\gamma} = \operatorname{Arsh} \frac{r^2 + \beta \lambda x_1}{\beta \lambda \rho} = \ln(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}), \quad \Pi(\bar{\gamma}) = \gamma.$$

Здесь $\Pi(x)$ — угол "параллельности" Лобачевского, α — угол между вектором s и скоростью a -сферы, а $\gamma = \vartheta - \alpha$, поэтому

$$\Pi(\bar{\alpha}) + \Pi(\bar{\gamma}) = \vartheta.$$

Значения $\lambda_1(x_1, y, z)$ и $\lambda_2(x_1, y, z)$ в (22) еще подлежат определению, подстановка же их в (22) даст нам искомое решение.

7. Как и для точечного заряда, вычисление потенциала начнем со случая $\beta < 1$. При $r < a$ весь пучок ϑ -гипербол с ростом λ пересекает вначале μ -границу треугольника встречи, а затем m -границу, как показано на рис. 1. В результате видимой оказывается вся a -сфера. Граничные λ из (5) с учетом (9) находим, подставляя в соответствующее равенство (13) s из (9). В рассматриваемом случае граничные λ имеют следующие значения

$$\lambda_1 = \lambda_\mu = a - c_\mu = \frac{a + \beta x_1 - \sqrt{(x_1 + \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}}{1 - \beta^2},$$

$$\lambda_2 = \lambda_m = c_m + a = \frac{a + \beta x_1 + \sqrt{(x_1 + \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}}{1 - \beta^2},$$

Подстановка их в (21) действительно дает $S_e = 4\pi a^2$, а в (22) — потенциал Φ_{11} внутри a -сферы

$$\Phi_{11} = \frac{e}{2a} \left[1 + \frac{1 - \beta}{\beta} \operatorname{Arth} \beta - \frac{\beta a x_1}{r^2} \left(1 - \frac{a^2 - r^2}{a r} \operatorname{Arth} \frac{r}{a} \right) \right]. \quad (23)$$

Если точка наблюдения находится вне a -сферы, т.е. если $r > a$, то пучок ϑ -гипербол пересекает вначале m -, а затем μ -границу, что легко проследить по рис. 1, поэтому здесь граничные λ имеют значения

$$\lambda_1 = \lambda_m = c_m - a = \frac{\beta x_1 - a + \sqrt{(x_1 - \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}}{1 - \beta^2},$$

$$\lambda_2 = \lambda_M = c_M + a = \frac{\beta x_1 + a + \sqrt{(x_1 + \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}}{1 - \beta^2}$$

Подставляя их в (22), находим потенциал Φ_{12} вне a -сферы

$$\Phi_{12} = \frac{e}{2} \left[\frac{r_1 + r_2 - 2\beta x_1}{2r^2} + \frac{1 - \beta^2}{\beta a} \operatorname{Arth} \frac{2\beta a}{r_1 + r_2} + \beta x_1 \frac{r^2 - a^2}{a r^3} \left(\operatorname{Arth} \frac{2\beta a x_1}{r(r_1 + r_2)} - \operatorname{Arth} \frac{a}{r} \right) \right], \quad (24)$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x_1 + \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 - \beta a)^2 + (1 - \beta^2)\rho^2}. \quad (25)$$

Нетрудно убедиться, что здесь также видна вся a -сфера.

Пусть $\beta > 0$, тогда из (23) и (24) находим соответственно

$$\Phi_{11} > e/a, \quad \Phi_{12} > e/a,$$

т.е. известный в электростатике потенциал заряженной сферы.

Пусть теперь $r > a$ в (23) со стороны $r < a$ и в (24) — со стороны $r > a$, тогда получим

$$\Phi_{11} > \Phi_{12} > \frac{e}{2a} \left(1 + \frac{1 - \beta^2}{\beta} \operatorname{Arth} \beta - \beta \cos \vartheta \right), \quad (26)$$

т.е. определенные в различных областях значений r функции Φ_{11} и Φ_{12} совпадают на границе, разделяющей эти области.

Наконец, пусть $r \gg a$, тогда вычисление соответствующего предела выражения (24) дает для Φ_{12} следующую величину

$$\Phi_{12} = e \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta - \beta \cos \vartheta} / r,$$

т.е. потенциал (3.4) точечного заряда при $\beta < 1$.

Из изложенного видно, что при $\beta < 1$ потенциал движущейся заряженной сферы описывается, как и в электростатике, двумя функциями (23) при $r < a$ и (24) при $r > a$, переходящими одна в другую при $r = a$, а на очень больших по сравнению с радиусом сферы расстояниях ее потенциал стремится к потенциалу точечного заряда. Распределение потенциала a -сферы показано на

рис. 2, где вверху каждого рисунка цифрами указаны максимальный потенциал Φ_m в единицах e/a , число эквипотенциальных уровней $N = \text{trunc}(10\Phi_m)$ и величина β .

Заметим, что согласно выражению (26) потенциал на поверхности движущейся сферы зависит от угла ϑ , и между ее носовой и кормовой точками появляется разность потенциалов величиной $\beta e/a$. Этой разности потенциалов достаточно, чтобы изменить начальное распределение свободных зарядов, но, по предположению, рассматривается диэлектрическая сфера, на которой заряды неподвижны.

В. Перейдем теперь к случаю $\beta = 1$. При $r < a$ все ϑ -гиперболы (14) на плоскости (λ, c) с ростом λ пересекают μ -границу треугольника встречи. Затем произвольная ϑ -гипербола, пересекая ряд s -гипербол, сливается с одной из них, и это слияние имеет место при $\lambda \rightarrow \infty$, т.е. на их общей асимптоте. Поэтому здесь граничные λ имеют значения

$$\lambda_1 = \lambda_\mu = a - c_\mu = (a^2 - r^2)/(a + x_1)/2, \quad \lambda_2 = \infty.$$

Подставив их в (21), найдем видимую площадь α -сферы

$$S_\alpha = 2\pi a(a - x_1),$$

т.е. здесь видимой оказывается часть сферы, и только при $x_1 = -a$ — вся. Подставив эти же значения граничных λ в (22), получим выражение потенциал Φ_{21} внутри α -сферы

$$\Phi_{21} = \frac{e}{2a} \left[1 - \frac{ax_1}{r^2} \left(1 - \frac{a^2 - r^2}{ar} \text{Arth} \frac{r}{a} \right) \right]. \quad (27)$$

При $r > a$ все пространство распадается на три подобласти. Во-первых, при $x_1 > a$ α -сфера не имеет общих с λ -сферой точек, поэтому потенциал Φ_{20} в этой части пространства равен нулю

$$\Phi_{20} = 0. \quad (28)$$

Вторая подобласть определяется неравенствами

$$r > a \quad \text{и} \quad |x_1| < a,$$

и в ней граничные λ имеют значения

$$\lambda_1 = \lambda_m = c_m - a = (r^2 - a^2)/(a - x_1)/2, \quad \lambda_2 = \infty.$$

Значение λ_2 выбрано по тем же соображениям, что и выше в случае $r < a$, и здесь также $S_e = 2\pi a(a - x_1)$. Подстановка этих граничных λ в (22) дает потенциал Φ_{22} в этой области

$$\Phi_{22} = \frac{e}{2r^2} \left\{ a - x_1 \left[1 + \frac{r^2 - a^2}{2ar} \left(\text{Arsh} \frac{2ar}{r^2 - a^2} - \text{Arsh} \frac{2x_1 r}{\rho^2} \right) \right] \right\}. \quad (29)$$

Третья подобласть пространства вне a -сферы определяется условиями

$$r > a \quad \text{и} \quad x_1 < -a,$$

где для граничных λ имеем

$$\lambda_1 = \lambda_m = c_m - a = (r^2 - a^2)/(a - x_1)/2,$$

$$\lambda_2 = \lambda_M = c_M + a = (a^2 - r^2)/(a + x_1)/2.$$

Здесь ϑ -гиперболы после пересечения m -границы проходят всю область существования треугольника встречи и покидают ее через M -границу при конечном значении λ_2 , так что здесь видимой оказывается вся a -сфера, а потенциал Φ_{23} равен

$$\Phi_{23} = - \frac{ex_1}{r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{ar} \frac{a}{r} \text{Arth} \right). \quad (30)$$

Таким образом, потенциал a -сферы при $\beta = 1$ описывается уже четырьмя функциями - (27)-(30). Заметим, что если $x_1 = a$, то при $r = a$ потенциал Φ_{21} внутри a -сферы (27) принимает в этой точке значение нуль, т.е. равен Φ_{20} . Если же $r > a$, но $x_1 = a$, то потенциал Φ_{22} на этой границе также равен Φ_{20} . Пусть в (27) и (29) $r \gg a$, тогда найдем

$$\Phi_{21} = \Phi_{22} = e(1 - \cos \vartheta)/a^2,$$

т.е. и на этой границе потенциал непрерывен. Наконец, если в (29) и (30) положить $x_1 = -a$, то на этой границе получим

$$\Phi_{22} = \Phi_{23} = \frac{ea}{r^2} \left(1 + \frac{r - a}{ar} \frac{a}{r} \text{Arth} \right).$$

Последнее выражение при $r = a$ принимает значение e/a , и такое же значение получим из (27) при $x_1 = -a$.

Не представляет особого труда вычислить следующие пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 1} \bar{\Phi}_{11} &= \bar{\Phi}_{21}, \\ \lim_{\beta \rightarrow 1} \bar{\Phi}_{12} &= \bar{\Phi}_{22}, \quad \text{если } |x_1| < a, \\ \lim_{\beta \rightarrow 1} \bar{\Phi}_{12} &= \bar{\Phi}_{23}, \quad \text{если } x_1 < -a, \\ \lim_{\beta \rightarrow 1} \bar{\Phi}_{12} &= \bar{\Phi}_{20} = 0, \quad \text{если } x_1 > a. \end{aligned}$$

из которых следует, что описывающие потенциал функции при $\beta \leq 1$ кусочно-непрерывны в реальном пространстве и по такой "координате", как относительная скорость α -сферы.

Пусть в (30) $r \gg a$, тогда находим

$$\bar{\Phi}_{23} = -2\epsilon \cos \vartheta / r,$$

т.е. потенциал (3.12) точечного заряда при $\beta = 1^{1/}$.

При $\beta = 1$ и $r > a$ наблюдаем зарождение конуса Маха, который здесь имеет вид двух плоскостей, ортогональных скорости α -сферы и касающихся ее в носовой и кормовой точках. Именно вырожденность конуса при $\beta = 1$ позволяет сравнительно просто вычислить здесь видимую площадь α -сферы, а с ней и потенциал.

9. Перейдем теперь к вычислению потенциала при $\beta > 1$, для чего рассмотрим диаграммы встречи α - и λ -сфер в этом случае. Из рис. 1 видно, что если $\beta a > r > a$, то относительно инцидентности ϑ -гипербол с областью существования треугольника встречи (ОСТВ) можно различить следующие пять случаев:

- a - подмножество пучка ϑ -гипербол проходит вне ОСТВ,
 - b - одна из ϑ -гипербол касается m -границы треугольника,
 - c - подмножество пучка ϑ -гипербол с ростом λ входит в ОСТВ через m -границу и покидает ее через ту же границу,
 - d - ϑ -гипербола пересекает m -границу ОСТВ, касается n -границы и покидает ОСТВ через m -границу,
 - e - подмножество ϑ -гипербол пересекает m - и n -границы ОСТВ в одном направлении, а затем те же границы - в обратном.
- Если же $r > \beta a$, то к случаям a, b и c следует добавить еще два:
- f - ϑ -гипербола пересекает m -границу ОСТВ, касается n -границы и покидает ОСТВ через m -границу,
 - g - подмножество ϑ -гипербол пересекает m -границу ОСТВ, затем покидает ее через n -границу и с дальнейшим ростом λ про-

ходит через ОСТВ в обратном направлении.

Очевидно, что в случае a создаваемые зарядом a -сферы возмущения вообще не приходят в точку наблюдения N , поэтому здесь потенциал Φ_{30} можем положить равным нулю

$$\Phi_{30} = 0. \quad (31)$$

В случае b следует считать, что граничные λ_1 и λ_2 совпадают и определяются равенством

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_m = c_m - a.$$

Подставляя сюда c из (9) вместо c_m , получим квадратное уравнение для λ , которое будет иметь единственный корень, если радикал r_2 из (25) равен нулю, т.е. если

$$(x_1 - \beta a)^2 = (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2). \quad (32)$$

При этом граничное значение λ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (a - \beta x_1) / (\beta^2 - 1)$$

удовлетворяет условию (3), когда

$$\beta x_1 \leq a. \quad (33)$$

Уравнение (32) совместно с условием (33) определяет часть конуса, касающегося a -сферы по окружности $x_1 = a/\beta$ и имеющего при вершине угол ϑ такой, что $\sin \vartheta = 1/\beta$. Этот конус назовем внешней границей конуса Маха. Очевидно, что в силу равенства пределов интегрирования на этой границе интеграл (22) равен нулю. Если потенциал в этой части конуса Маха обозначить как Φ_{32} , то на внешней границе конуса имеем

$$\Phi_{32} = \Phi_{30} = 0.$$

В случае d соответствующее квадратное уравнение для λ_μ имеет совпадающие корни, если выполняется равенство

$$(x_1 + \beta a)^2 = (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2), \quad (34)$$

а значение λ_μ удовлетворяет условию (3), если

$$\beta x_1 \leq -a.$$

Два последних выражения определяют конус с вершиной в точке $(-\beta a, 0, 0)$ и тем же углом раствора, что и (32), опирающийся

на α -сферу по окружности радиуса $\alpha\sqrt{\beta^2 - 1/\beta}$.

Ю. Остановимся теперь на двух последних достаточно простых случаях. В случае f касание M -границы означает, что здесь λ_M однозначно определяется соответствующим квадратным уравнением, из которого получаем выражение (34). В этом случае $r > a$, поэтому $\lambda_M > 0$, если $x_1 < 0$. Если в конусе (32) потенциал отличен от нуля только в части отрицательной (считая от вершины) полости, то в конусе (34) это имеет место во всей отрицательной полости и в той части положительной, которая опирается на α -сферу по окружности $x_1 = -a/\beta$. Условимся называть отрицательную полость конуса (34) основным конусом Маха, ее поверхность - внутренней границей, а опирающуюся на α -сферу часть положительной полости - обращенным конусом. Оставшуюся часть пространства, ограниченного внешней и внутренней границами, границей обращенного конуса и частью α -сферы, - пограничным конусом Маха.

В случае g имеется две пары граничных $\lambda = (\lambda_{1M}, \lambda_{1m})$ и $(\lambda_{2M}, \lambda_{2m})$. При этом для каждой пары видимой оказывается вся α -сфера, однако если сохранить направление изменения λ , то согласно (21) S_{\pm} для первой пары равно $4\pi a^2$, а для другой - $(-4\pi a^2)$. Поэтому здесь для вычисления интеграла (22) следует изменить порядок пределов для второй пары граничных λ , т.е. для потенциала Φ_{34} в этой области находим формулу

$$\Phi_{34} = \Phi(\lambda_{1M}) - \Phi(\lambda_{1m}) - \Phi(\lambda_{2M}) + \Phi(\lambda_{2m})$$

Пользуясь выражениями (9) и (13), определяем соответствующие граничные λ , а затем из последнего выражения и с учетом (22) находим потенциал в основном конусе

$$\Phi_{34} = -\frac{\beta e x_1}{r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{ar} \operatorname{Arth} \frac{a}{r} \right) \quad (35)$$

* Если в последнем выражении положить $r \gg a$, то найдем

$$\Phi_{34} = -2\beta e x_1 / r^2 = -2\beta e \cos \theta / r$$

т.е. потенциал точечного заряда (3.12) при $\beta > 1/1$.

Для случая f можно получить аналитическое выражение для потенциала, если в (35) подставить координаты границы основ-

ного конуса (34).

II. Прежде чем обратиться к случаю с и другим, присоединим к уравнениям (7), (8) еще и уравнение огибающего λ -сферы конуса. Последнее найдем дифференцированием уравнения (8) по λ частным образом, в результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= \alpha^2, \\ (\xi_1 - x_1 - \beta\lambda)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 &= \lambda^2, \\ \beta(\xi_1 - x_1 - \beta\lambda) &= -\lambda. \end{aligned} \quad (36)$$

Из двух последних уравнений находим уравнение огибающего конуса

$$(\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = (\beta^2 - 1)\lambda^2/\beta^2,$$

на котором произвольную точку зададим как

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + \frac{\beta^2 - 1}{\beta}\lambda, \\ \eta &= y + \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}\lambda \cos\psi, \quad \zeta = z + \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}\lambda \sin\psi. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь ψ — угол, отсчитываемый на окружности, по которой огибающий конус касается λ -сферы. Подставив (37) в первое уравнение системы (36), найдем угол ψ

$$y \cos\psi + z \sin\psi = \beta \frac{\alpha^2 - r^2 - \lambda(\beta^2 - 1)(\lambda + 2x_1/\beta)}{2\lambda\sqrt{\beta^2 - 1}}. \quad (38)$$

Перепишем левую часть этого выражения

$$y \cos\psi + z \sin\psi = \rho \cos(\psi - \theta)$$

и положим $\cos(\psi - \theta) = \pm 1$. Тогда из (38) получаем квадратное уравнение

$$(\beta^2 - 1)\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{\beta^2 - 1}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}x_1 \pm \frac{\rho}{\beta}\right) + r^2 - \alpha^2 = 0, \quad (39)$$

которое определяет еще один набор граничных λ , а именно таких, что если λ находится между ними, то система (36) имеет общую точку. Геометрически множество действительных общих

точек системы (36) образует границу, по которой огибающий конус пересекает α -сферу так, что видимой оказывается лишь ее часть, находящаяся внутри огибающего λ -сферы конуса.

В правую часть преобразования (10) подставим координаты общих точек α - и λ -сферы из (15), а в левую - из (37), получим следующую систему уравнений

$$\frac{x_1}{a} + \frac{\beta^2 - 1}{\beta a} \lambda = \frac{x_1 + \beta \lambda}{c} \cos \theta - \frac{\rho}{c} \sin \theta \cos \phi,$$

$$\frac{y}{a} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta a} \lambda \cos \psi = \frac{y}{c} \cos \theta + \frac{y x_1 + \beta \lambda}{\rho c} \sin \theta \cos \phi - \frac{z}{\rho} \sin \theta \sin \phi,$$

$$\frac{z}{a} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta a} \lambda \sin \psi = \frac{z}{c} \cos \theta + \frac{z x_1 + \beta \lambda}{\rho c} \sin \theta \cos \phi + \frac{y}{\rho} \sin \theta \sin \phi.$$

Умножив второе уравнение этой системы на y , а третье - на z и сложив, сведем ее с учетом выражения (38) к двум

$$\frac{x_1 + \beta \lambda}{c} \cos \theta - \frac{\rho}{c} \sin \theta \cos \phi = \left(x_1 + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \lambda \right) / a,$$

$$\frac{\rho}{c} \cos \theta + \frac{x_1 + \beta \lambda}{c} \sin \theta \cos \phi = \frac{a^2 + \rho^2 - x_1^2 - \lambda(\beta^2 - 1)(\lambda + 2x_1/\beta)}{2a\rho}.$$

Обозначив общий угол системы (36) через ϕ_b , находим для него следующее выражение

$$\beta a \rho \sin \theta \cos \phi_b = \lambda c \left[1 - \beta \frac{(x_1 + \beta \lambda)(c^2 + \lambda^2 - a^2)}{2\lambda c^2} \right].$$

Это выражение легко преобразуется к виду (19), поэтому приходим к заключению, что граничное значение угла ϕ_b соответствует обращению в нуль элемента площади dS из (18).

12. Вернемся теперь к случаю с. В этом случае граничные λ из (5) определяются выражением ($\lambda_{1,2} = \lambda_{1m,2m}$)

$$(\beta^2 - 1)\lambda_{1m,2m} = a - \beta x_1 \mp \sqrt{(a - \beta x_1)^2 - (\beta^2 - 1)(r^2 - a^2)}.$$

Внутри интервала $[\lambda_{1m}, \lambda_{2m}]$ из уравнения (39) определяем еще один l -интервал $[\lambda_{1l}, \lambda_{2l}]$, соответствующий знаку "-" уравнения (39), корни которого суть

$$\rho \sqrt{\beta^2 - 1} \lambda_{1,2l} = x_1 \sqrt{\beta^2 - 1} + \rho \mp \sqrt{\beta^2 \alpha^2 - (x_1 + \rho \sqrt{\beta^2 - 1})^2}.$$

Можно показать, что для значений λ , удовлетворяющих условию (3), выполняется следующее неравенство

$$\lambda_{1m} < \lambda_{1l} < \lambda_{2l} < \lambda_{2m}.$$

При этом весь интервал разбивается на два подынтервала:

$$A = [\lambda_{1m}, \lambda_{2l}] \quad \text{и} \quad B = [\lambda_{1l}, \lambda_{2m}],$$

такие, что в первом видимая часть α -сферы увеличивается с ростом λ , а во втором — уменьшается.

Когда значения переменной λ находятся внутри l -интервала, шаровые сегменты с углами θ и $\theta + d\theta$ пересекаются в пределах α -сферы, образуя на ней два "сферических" двуугольника, стороны которых в общем случае не являются дугами большого круга. Точка пересечения шаровых сегментов имеет определенные выше сферические координаты $\theta(\lambda)$ и $\phi_0(\lambda)$. Интегрируя удвоенный (в силу симметрии) элемент dS из (18) по ϕ в пределах от 0 до ϕ_0 , получим элемент $dS_1(\lambda)$ площади первого двуугольника

$$dS_1(\lambda) = \int_0^{\phi_0} dS = 2\alpha^2 (\phi_0 - \tan \phi_0) \sin \theta d\theta.$$

Интегрируя dS по ϕ в пределах от ϕ_0 до π , получим элемент $dS_2(\lambda)$ площади второго двуугольника

$$dS_2(\lambda) = 2\alpha^2 [\pi - \phi_0 + \tan \phi_0] \sin \theta d\theta.$$

Здесь все величины справа зависят только от λ . Нетрудно заметить, что $dS_1(\lambda) + dS_2(\lambda) = dS(\lambda)$, что следует из простых геометрических соображений, если $dS_1(\lambda)$ считать отрицательным. Здесь элемент $dS(\lambda)$ определен в (20).

При вычислении потенциала Φ'_{32} в A -интервале имеем

$$\Phi'_{32} = \sigma \left(\int_{\lambda_{1m}}^{\lambda_{2l}} \frac{dS_1(\lambda)}{\lambda} + \int_{\lambda_{1l}}^{\lambda_{2m}} \frac{dS_2(\lambda)}{\lambda} \right).$$

Аналогично в B -интервале находим Φ'_{32}

$$\Phi'_{32} = \sigma \left(\int_{\lambda_{21}}^{\lambda_{2m}} \frac{dS(\lambda)}{\lambda} + \int_{\lambda_{11}}^{\lambda_{21}} \frac{dS_1(\lambda)}{\lambda} \right).$$

При вычислении суммарного потенциала последнее выражение следует брать с обратным знаком по той же причине, что и в п. IO, поэтому окончательно для потенциала в пограничном конусе (случай с) имеем

$$\Phi_{32} = \Phi'_{32} - \Phi''_{32} = \Phi(\lambda_{11}) + \Phi(\lambda_{21}) + I - \frac{e}{2a} \left[1 - \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \operatorname{Arcth} \beta + \frac{\beta a x_1}{r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{ar} \operatorname{Arth} \right) \frac{a}{r} \right], \quad (40)$$

где

$$I = - \int_{\lambda_{11}}^{\lambda_{21}} \frac{e^{\lambda} \pi/2 - \phi_b + \operatorname{tg} \phi_b}{\lambda} \sin \theta d\theta.$$

Здесь λ_{11} и λ_{21} приведены выше, $\Phi(\lambda_{11})$ и $\Phi(\lambda_{21})$ вычисляются по формуле (22), а интеграл I — численным интегрированием (на-пример, на ПК).

13. Случай е соответствует потенциалу в точке, находящейся в обращенном конусе, где реализуются оба знака уравнения (39). Для знака "+" его корни $\lambda_{1h, 2h}$ имеют вид

$$\beta \sqrt{\beta^2 - 1} \lambda_{1h, 2h} = -x_1 \sqrt{\beta^2 - 1} - \rho \mp \sqrt{\beta^2 a^2 - (\rho \sqrt{\beta^2 - 1} - x_1)^2}.$$

Величины $\lambda_{11, 21}$ определены выше, для граничных же λ помимо $\lambda_{1m, 2m}$ имеем еще, очевидно, и $\lambda_{1\mu, 2\mu}$

$$(\beta^2 - 1) \lambda_{1\mu, 2\mu} = -a - \beta x_1 \mp \sqrt{(a + \beta x_1)^2 - (\beta^2 - 1)(r^2 - a^2)}.$$

В результате этого формула для потенциала Φ_{33} в этой области усложняется, но существо ее вывода то же, что и в предыдущем пункте. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$\Phi_{33} = \Phi(\lambda_{11}) + \Phi(\lambda_{21}) + \Phi(\lambda_{1h}) + \Phi(\lambda_{2h}) + I(\lambda_{11}, \lambda_{1h}) + \frac{\beta e x_1}{r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{ar} \operatorname{Arth} \right) \frac{a}{r} + I(\lambda_{2h}, \lambda_{21}). \quad (41)$$

Здесь I — такие же интегралы, как и в (40), с указанными в скобках пределами, а $\Phi(\lambda)$ определено в (22).

Случай d соответствует предельному значению потенциала (41) при $\lambda_{1\mu} = \lambda_{2\mu}$. На этом закончим рассмотрение случая $r > a$.

14. При $r < a$ весь пучок ϑ -гипербол с ростом λ входит в область существования треугольника встречи через μ -границу, когда площадь α -сферы равна 0, и покидает ее через π -границу, когда площадь α -сферы также нуль, что нетрудно установить по рис. 1. Анализ показывает, что в этом случае граничные λ суть $\lambda_{2\mu}$ и $\lambda_{2\pi}$, для которых формулы приведены выше. Помимо этого, дополнительный интервал образуют величины λ_{2l} и λ_{2h} , так что потенциал Φ_{31} внутри сферы имеет вид

$$\Phi_{31} = \Phi(\lambda_{2l}) + \Phi(\lambda_{2h}) - \Phi(\lambda_{2\mu}) - \Phi(\lambda_{2\pi}) + I(\lambda_{2h}, \lambda_{2l}). \quad (42)$$

Обозначения здесь понятны из предыдущего.

Таким образом, для описания потенциала при $\beta > 1$ во всем пространстве потребовалось уже 5 функций соответственно для 5 различных областей — (31), (35), (40), (41) и (42). Лишь часть этих функций интегрируется в явном виде, поэтому аналитически не удалось показать их непрерывность, но это можно установить по кривым рис. 2.

15. Отметим характерные особенности полученного распределения потенциала заряженной сферы. Прежде всего это ограниченность величины потенциала при любой скорости. Далее, замкнутость эквипотенциальных поверхностей сохраняется при любой скорости, хотя сами поверхности значительно "деформируются", особенно вблизи сферы. Излом эквипотенциальных поверхностей при $\beta < 1$ наблюдается только на сфере, и здесь производная потенциала по пространственной координате испытывает разрыв. Практически такое же положение имеет место и в электростатике, и оно связано с заданием бесконечно тонкого слоя заряда на поверхности сферы. При $\beta > 1$ наблюдается два таких излома. Характерный для точечного заряда скачок значения потенциала на границе конуса Маха исчезает для заряженной сферы, и ее потенциал плавно возрастает от нуля на границе до конечного значения внутри конуса. Наконец, при любой скорости движения

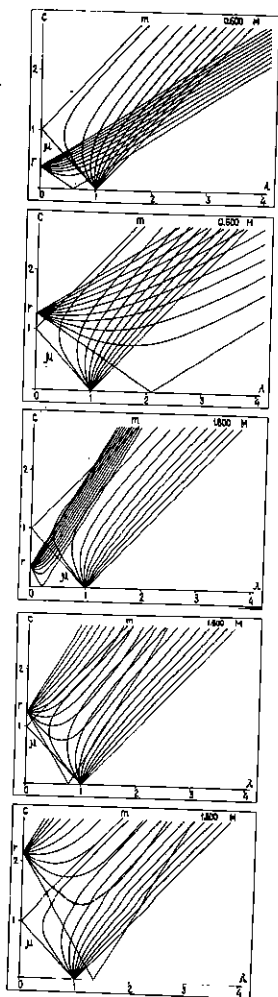


Рис. 1. ОСТВ α - и λ - сфер на плоскости (c, λ) и множества β - и γ - гипербол для различных значений β и γ .

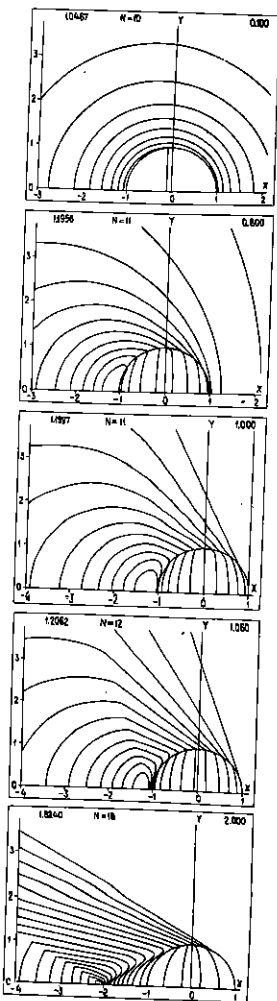


Рис. 2. Эквипотенциальные кривые движущейся равномерно и прямолинейно заряженной сферы для различных значений β .

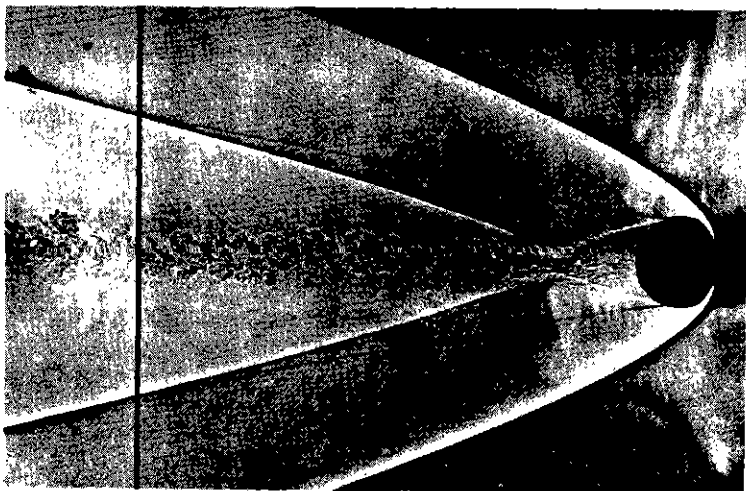


Рис. 3. Фотография сверхзвукового шара ¹²⁷, движущегося в атмосферном воздухе со скоростью 4,01 М.

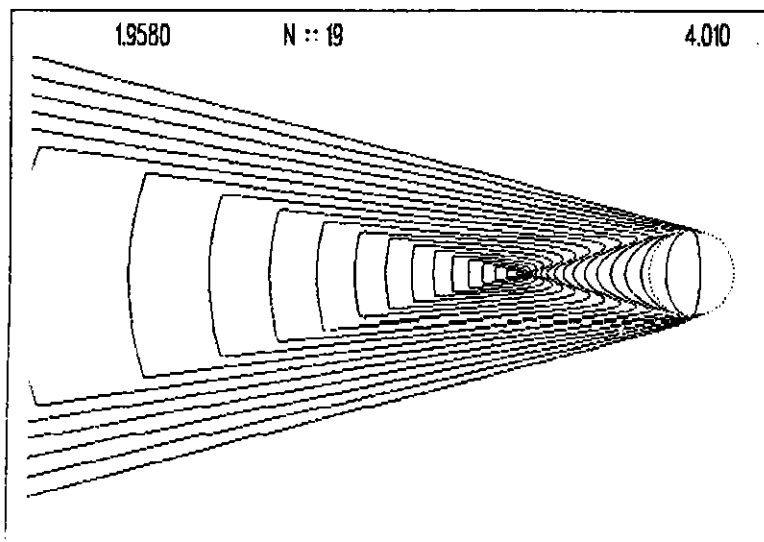


Рис. 4. Экипотенциальные кривые заряженной сферы с $\beta = 4,01$, вычисленные на основе модифицированного принципа Гюйгенса.

заряженной сферы ее потенциал на расстояниях, значительно превосходящих радиус сферы, приближается к потенциалу точечного источника, движущегося с той же скоростью.

На рис. 3 показана фотография шара^{/2/}, летящего в атмосферном воздухе со скоростью 4.01 M . Сравнивая ее с рис. 4, находим что такая относительно простая математическая модель потенциала, которая следует из модифицированного принципа Гюйгенса, качественно довольно близко описывает характерные черты этого физического явления.

Заключение

Из изложенного здесь и в^{/1/} видно, что расширение принципа Гюйгенса понятием потенциала придает ему количественный характер и позволяет получить кусочно-непрерывное описание волнового поля движущегося с произвольной скоростью точечного источника, равно как и сферического, а значит и источника любой другой формы. При этом потенциал источника конечных размеров остается при любой скорости движения ограниченным по величине. Кусочная непрерывность (по β) полученного описания следует из нелинейности дифференциального уравнения (2.15)^{/1/} для потенциала точечного заряда, в силу которой это уравнение в общем случае не сохраняет свою форму для суммы потенциалов при $\beta > 1$.

Литература

1. Шелаев И.А. Принцип Гюйгенса и поле движущегося заряда. Точечный заряд. Сообщение ОИЯИ, Р2-90-27, Дубна, 1990.
2. Альбом течений жидкости и газа. Под редакцией М.Ван-Дайка. М.: Мир, 1986, с.168.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 января 1990 года.