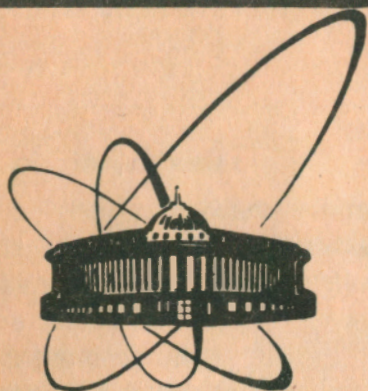


90-27



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Ш 42

P2-90-27

И. А. Шелаев

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА
И ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА.
Точечный заряд

1990

Введение

Наряду с общепринятым описанием поля движущегося заряда запаздывающими потенциалами в ряде работ¹⁻³ содержится также описание поля на основе принципа Гюйгенса. Эти два варианта описания одного и того же объекта приводят к различным результатам, однако их количественное сравнение затрудняется тем, что формулировка принципа Гюйгенса ограничена такими понятиями как волны, возмущения и пр., имеющими в основном качественный характер. Расширение принципа Гюйгенса понятием потенциала устраняет эту трудность и позволяет получить два сравнимых варианта описания.

Опираясь на такой модифицированный принцип Гюйгенса, для потенциала произвольно движущегося точечного источника волнового поля любой природы (электромагнитной, звуковой или иной) получено уравнение Д'Аламбера с ненулевой правой частью, что может служить объяснением причины указанного различия. В то же время правая часть полученного уравнения при определенных допущениях может быть принята равной нулю, поэтому оба упомянутых выше варианта описания имеют и некоторые общие черты.

Действительно, для звукового источника, движущегося равномерно и прямолинейно со сверхзвуковой скоростью, запаздывающий потенциал дает ту же величину угла раствора конуса Маха, что получается на основе принципа Гюйгенса, но если в первом случае потенциал на поверхности конуса сингулярен, то во втором сингулярность потенциала при любой скорости сохраняется только в той точке пространства, которая в рассматриваемый момент времени занята источником, на границе же конуса Маха потенциал имеет скачок конечной величины.

I. Запаздывающий потенциал и принцип Гюйгенса

I. I. Для полноты изложения напомним вкратце состояние

теории поля движущегося заряда. Из электродинамики Максвелла следует, что потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ точечного заряда e удовлетворяет волновому уравнению или уравнению Д'Аламбера

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} \equiv \square \Phi = 0. \quad (1.1)$$

Решением этого уравнения является так называемый запаздывающий потенциал или потенциал Лиенара - Вихерта

$$\Phi = \frac{e}{r' \left[1 - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}'}{r' c} \right]}, \quad (1.2)$$

где c - скорость света, \mathbf{v}' - вектор скорости заряда и \mathbf{r}' - радиус-вектор расстояния от заряда до точки, в которой вычисляется потенциал. В этом выражении все величины со штрихом берутся в запаздывающий момент времени t'

$$t' = t - r' / c. \quad (1.3)$$

В частном случае заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью v вдоль оси x , момент времени t' определяется из уравнения

$$c^2 (t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2. \quad (1.4)$$

Обозначив $\beta = v/c$, нетрудно найти, что при $\beta < 1$

$$\Phi = e / \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}, \quad (1.5)$$

откуда приходят к преобразованиям Лоренца, составляющим фундамент специальной теории относительности^{/4/}.

1.2. Помимо электромагнитных волн уравнение (1.1) описывает другие волновые явления, например, звуковые волны или волны на поверхности жидкости^{/5/}. При рассмотрении последних следует под c в (1.1) понимать скорость распространения волн соответствующей природы.

Задача о звуковом потенциале движущегося источника звука рассмотрена в^{/2/}, где показано, что действительно "...полу-

ченные здесь результаты для звукового поля движущегося источника во многих отношениях сходны с известными результатами Лиенара - Вихерта для электромагнитного поля движущегося точечного заряда (электрона)^{/6/}. Это замечание относится к случаю $\beta < 1$, для которого звуковой потенциал получается в виде, тождественном выражению (1.5).

Для сверхзвуковых точечных источников потенциал приводится в виде^{/7/}

$$\Phi = \frac{A_0}{R} \left\{ \exp[i\omega(t - R_1/c)] + \exp[i\omega(t - R_2/c)] \right\} / \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad (1.6)$$

где

$$R = \sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2}, \quad \xi = (x - ut) / \sqrt{\beta^2 - 1},$$

$$R_1 = (R - \beta\xi) / \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad R_2 = -(R + \beta\xi) / \sqrt{\beta^2 - 1}$$

и A_0 - постоянная, равная для точечного источника его обильности, ω - частота звука. Два члена в (1.6) отвечают тому факту, что при $\beta > 1$ уравнение (1.4) имеет два действительных и положительных корня.

По поводу решения (1.6) Д.И.Блохинцев пишет: "Из наших расчетов видно, что при сверхзвуковой скорости источника существует не только сингулярная точка, но и целая поверхность (конус Маха), на которой решение обращается в бесконечность. Стало быть, если ограничиться точечным источником, то нельзя придавать смысла решению (1.6) не только вблизи самого источника, но и вблизи конуса Маха"^{/8/}. Это замечание, по мнению автора, ставит под сомнение как решение (1.6), так и решение (1.5), т.к. оба решения получены, исходя из тех же самых начальных предпосылок. Д.И.Блохинцев видит причину, в силу которой решение лишено смысла, в том, что оно найдено для точечного источника. Ниже мы увидим, что это не так, что причина в самом волновом уравнении. Заметим, что сингулярность на конусе Маха отмечается и в работе^{/9/}, первое издание которой вышло в 1915 г.

Полагая A_0 равным e и $\omega = 0$, найдем из (1.6)

$$\Phi = ze / \sqrt{(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}, \quad (1.7)$$

т.е. за исключением множителя 2 выражение (1.5). Иными словами, в акустике поле до- и сверхзвукового источника также описывается запаздывающим потенциалом.

Автору не удалось найти в литературе описание волн на поверхности жидкости, основанное на уравнении (1.1), но можно полагать, что такое описание будет подобным приведенным выше, если там пренебречь дисперсией.

1.3. Для количественной оценки вызванного движением источника перераспределения потенциала выберем определенную величину потенциала $\Phi_1 = e/q_1$ неподвижного заряда и приравняем ее величине потенциала движущегося. Тогда из (1.5) и (1.7) находим уравнения эквипотенциалей соответственно

$$(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2) = \alpha_1^2, \quad \beta < 1, \quad (1.5a)$$

$$(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) = \alpha_1^2/4, \quad \beta > 1. \quad (1.7a)$$

Уравнение (1.5a) представляет собой уравнение эллипсоида вращения (эллипсоида Хэвисайда) с полуосями: α_1 — вдоль оси x и $\alpha_1/\sqrt{1 - \beta^2}$ — ортогонально оси x , а уравнение (1.7a) — уравнение гиперboloида вращения с полуосями: $\alpha_1/2$ вдоль оси x и $\alpha_1/2/\sqrt{\beta^2 - 1}$ — в направлении, ортогональном оси x . Отсюда заключаем, что вдоль оси x распределение потенциала при $\beta < 1$ остается тем же, что и в случае неподвижного источника. При $\beta > 1$ распределение потенциала на оси x останется тем же, если на каждой эквипотенциальной поверхности величину потенциала удвоить. Детали распределения потенциала видны на рис. 1a.

Если в (1.7a) положить $\alpha_1 = 0$, то получим уравнение конуса Маха

$$(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) = 0 \quad (1.8)$$

с углом ϑ полураствора при вершине, равным

$$\sin \vartheta = 1/\beta. \quad (1.9)$$

На поверхности конуса потенциал обращается в бесконечность.

Заметим, что если в (1.5) устремить β к 1 со стороны $\beta < 1$, а в (1.7) — со стороны $\beta > 1$, то получим два разных предела: $e/|x - vt|$ и $2e/|x - vt|$. Следовательно, помимо сингулярности запаздывающий потенциал приводит к разрыву величины потенциала при $\beta > 1$.

1.4. Принцип Гюйгенса дает другое описание поля движущегося заряда. В работе^{1/} приведена формулировка "... принципа Гюйгенса: каждая точка на пути заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью v , служит источником сферической волны, испускаемой в момент прохождения через нее частицы. В том случае, когда

$$v > c/n, \quad \text{т.е.} \quad \beta n > 1, \quad (4.1)$$

эти сферы имеют общую огибающую — конус с вершиной, совпадающей с мгновенным положением заряда. При этом нормали к образующей конуса, т.е. направления волновых векторов, образуют со скоростью угол

$$\cos \theta = 1/\beta n. \quad (4.2)$$

Здесь n — коэффициент преломления среды, а $\theta = \pi/2 - \vartheta$.

Эта формулировка — наиболее исчерпывающая из известных автору, поэтому она приведена полностью с включением важнейшего результата — угол при вершине конуса Маха, полученный из электродинамики и на основе принципа Гюйгенса, имеет ту же величину. В полном соответствии с приведенной формулировкой конус Маха изображен на суперобложке работы^{1/}, множества волн показаны на рис.1б при тех же значениях β , что и на рис.1а.

Однако формулировка^{1/} оставляет открытым вопрос о том, что несет волна, какова ее количественная мера. Если такая мера есть, то очевидно, что на границе конуса Маха, где в каждой точке имеется только одна такая волна, потенциал может принимать лишь конечное значение, и нет видимых причин, в силу которых бы он обращался здесь в бесконечность.

Следующий оставшийся без ответа вопрос состоит в том,

как суммируются меры сферических волн в том случае, когда в данной точке одновременно существуют две волны.

1.5. На основе изложенного можно сделать следующие выводы:

- существует единственное решение уравнения (1.1), в равной мере справедливое с математической точки зрения для любых волновых процессов - электромагнитных, звуковых или волн на поверхности жидкости, - и это решение имеет вид запаздывающего потенциала:

- предсказываемое теорией запаздывающего потенциала распределение потенциала движущегося источника обладает рядом свойств (независимость распределения потенциала на оси x от скорости и его симметрия при $\beta < 1$, разрыв непрерывности значения потенциала при $\beta = 1$, сингулярность на конусе Маха при $\beta > 1$), которым трудно придать какой либо физический смысл, и даже качественно не совпадает с тем, что можно ожидать на основе принципа Гюйгенса:

- в то же время оба варианта описания приводят в ряде случаев к одним и тем же результатам, например, дают одну и ту же величину угла раствора конуса Маха.

2. Принцип Гюйгенса и уравнение потенциала движущегося заряда

2.1. Ответом на первый вопрос п.1.4, по мнению автора, может быть следующее предположение: каждая точка произвольной траектории точечного заряда, которую он проходит в момент t' , является центром сферической эквипотенциальной поверхности, радиус которой в любой последующий момент времени t равен $c(t - t')$, а величина потенциала ϕ на ней равна

$$\phi = e/c(t - t'), \quad (2.1)$$

где e - величина заряда. Центр этой сферической поверхности в любой последующий момент времени t остается в той точке пространства, в которой сфера появилась. Иными словами, мерой сферической волны^{1/} является величина потенциала, имеющая одно и то же значение в каждой точке такой сферической волны.

Определением (2.1) пользуются и при выводе формулы для запаздывающего потенциала. Действительно, если правая часть уравнения (1.1) равна $4\pi\rho(x, y, z, t)$ и ρ — заданная объемная плотность заряда, то общее выражение для запаздывающего потенциала имеет вид^{/10/}

$$\Phi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(x', y', z', t')}{c(t - t')} dx' dy' dz' + \Phi_0.$$

Для точечного заряда величина ρ задается соответствующей δ -функцией, и в результате интегрирования потенциал приобретает множитель $1/[1 - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}')/(r'c)]$. Именно благодаря этому множителю запаздывающий потенциал, с одной стороны, удовлетворяет волновому уравнению, но с другой — этому потенциалу "нельзя придавать смысла". Поэтому же потенциал в форме (2.1) считается справедливым в той "...системе отсчета, в которой в момент t' частица покоится"^{/11/}. В формулировке^{/1/} принцип Гюйгенса гласит, что сферические волны создаются в той системе отсчета, в которой движется заряд. В этой же системе движутся и созданные зарядом сферические волны, увеличивая свой радиус и сохраняя неизменным начальный центр. Исходя из этого и принимается в качестве меры сферической волны потенциал в форме (2.1).

Ниже показывается, что исходя только из свойств функции $c(t - t')$, для потенциала (2.1) можно получить волновое уравнение с не равной нулю правой частью.

Полагая траекторию заряда заданной вектором $\mathbf{r}_c(t)$ и вводя обозначение

$$\lambda = c(t - t'), \quad (2.2)$$

можем переписать (2.1) как

$$\Phi = e/\lambda, \quad (2.3)$$

где

$$\lambda = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t')|, \quad (2.4)$$

здесь \mathbf{r} — вектор точки наблюдения. Разумеется, в определении (2.2) физический смысл имеют только те значения λ , которые удовлетворяют неравенству

$$\lambda > 0 . \quad (2.5)$$

Выражение (2.4) с учетом определения (2.2) можно записать как

$$\lambda = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \lambda/c)| . \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) есть, очевидно, уравнение (1.3). В котором величина \mathbf{r}' обозначена как λ .

2.2. Разрешив уравнение (2.6), найдем $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$, что после подстановки в (2.3) даст нам значение потенциала в любой точке пространства и времени. Однако уравнение (2.6) в явном виде разрешимо лишь для неподвижного заряда и заряда, движущегося равномерно и прямолинейно, поэтому будем рассматривать (2.6) как неявное задание λ -функции.

Пусть (2.6) имеет только один действительный корень λ , удовлетворяющий условию (2.5), тогда, дифференцируя (2.6) по координатам (x, y, z) точки наблюдения потенциала, получим

$$\text{grad}\lambda = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) / \left[\lambda - \beta_c (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \right] , \quad (2.7)$$

где вектор β_c

$$\beta_c = d\mathbf{r}_c(t - \lambda/c) / c dt$$

есть взятый в момент t' вектор относительной скорости заряда. Введем единичный вектор \mathbf{l}

$$\mathbf{l} = [\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \lambda/c)] / \lambda , \quad (2.8)$$

что позволит переписать (2.7) в виде

$$\text{grad}\lambda = \mathbf{l} / (1 - \mathbf{l}\beta_c) . \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.6) частным образом по t , находим

$$(1 - \partial\lambda / \partial t)(1 - \mathbf{l}\beta_c) = 1 . \quad (2.10)$$

Теперь выражению (2.9) можно придать следующий вид

$$\mathbf{l} = \text{grad}\lambda / (1 - \partial\lambda / \partial t) \quad (2.11)$$

и рассматривать как новое определение вектора \mathbf{l} .

2.3. Из первого определения вектора \mathbf{l} (2.8) дифференцированием получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{l} = \frac{2 + \partial \lambda / \partial t}{\lambda} + \frac{l \beta_c (1 - \partial \lambda / \partial t)}{\lambda} .$$

Подставляя сюда $l \beta_c$ из (2.10), находим

$$\operatorname{div} \mathbf{l} = 2/\lambda . \quad (2.12)$$

С другой стороны, применив к вектору \mathbf{l} из (2.11) операцию div , имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{l} = \frac{\Delta \lambda}{1 - \partial \lambda / \partial t} + \frac{\operatorname{grad} \lambda \operatorname{grad}(\partial \lambda / \partial t)}{(1 - \partial \lambda / \partial t)^2} .$$

Изменив в последнем члене этого выражения порядок дифференцирования по пространственным координатам и по времени и учитывая, что в силу единичности вектора \mathbf{l} $(\partial \mathbf{l} / \partial t) = \mathbf{0}$, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{l} = \square \lambda / (1 - \partial \lambda / \partial t) .$$

Сравнивая последнее выражение с (2.12), находим окончательно

$$\square \lambda = 2(1 - \partial \lambda / \partial t) / \lambda . \quad (2.13)$$

Таким образом, λ -функция произвольно движущегося заряда удовлетворяет волновому уравнению с не равной нулю правой частью. Последняя отличается от запаздывающего потенциала (1.2) множителем $2/\epsilon$ (и обозначениями). В свою очередь, запаздывающий потенциал удовлетворяет однородному волновому уравнению, поэтому приходим к выводу, что λ -функция произвольно движущегося заряда удовлетворяет уравнению

$$\square(\square \lambda) \equiv \square^2 \lambda = 0 , \quad (2.14)$$

которое можно назвать волновым уравнением четвертого порядка.

Применим операцию \square к потенциалу из (2.3), тогда прямым дифференцированием находим

$$\Delta \Phi = \frac{e\sigma\lambda}{\lambda^2} + \frac{2e[(\sigma \text{rad}\lambda)^2 - (\sigma\lambda/c\sigma t)^2]}{\lambda^3} .$$

Подставляя сюда соответствующие выражения из (2.13) и (2.11), получаем

$$\Delta \Phi = \sigma(\Phi^2)/c\sigma t . \quad (2.15)$$

Следовательно, если запаздывающий потенциал движущегося точечного заряда является решением однородного волнового уравнения (1.1), то определенный согласно расширенному принципу Гюйгенса потенциал такого заряда удовлетворяет неоднородному уравнению (2.15), которое к тому же и нелинейно.

Уравнение (2.15) переходит в (1.1), если выполняется условие

$$\sigma(\Phi^2)/c\sigma t \approx 0 . \quad (2.16)$$

Можно ожидать, что это условие выполняется с некоторой точностью, если величина потенциала достаточно мала (что выполняется на больших расстояниях от источника) или если мала скорость движения заряда (электростатика).

2.4. Дифференцируя выражение (2.8) по t частным образом, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1 \times [1 \times \beta_c]}{\lambda(1 - \beta_c)} . \quad (2.17)$$

Далее введем обозначение

$$\partial \Phi / \partial t = *n , \quad (2.18)$$

где n — единичный вектор, лежащий согласно (2.17) в плоскости векторов 1 и β_c и ортогональный вектору 1 . Если α — угол между векторами 1 и β_c , то для величины $*$ получаем выражение

$$* = \frac{\beta \sin \alpha}{\lambda(1 - \beta \cos \alpha)} . \quad (2.19)$$

Полагая λ и β постоянными, находим максимум $*_{\text{m}}$ функции

$\kappa(\alpha)$

$$\kappa_m = \beta/\lambda/\sqrt{1-\beta^2}, \text{ если } \cos\alpha = \beta. \quad (2.20)$$

Условие (2.20) выполняется только при $\beta < 1$ и представляет собой уравнение некоторого конуса, который справедливо назвать доволновым конусом Маха.

Образует rot от левой и правой частей выражения (2.11)

$$\text{rot}l = \frac{\text{rotgrad}\lambda}{1 - \partial\lambda/\partial t} - \text{grad}\lambda \times \text{grad} \left(\frac{1}{1 - \partial\lambda/\partial t} \right).$$

Отсюда с учетом $\text{rotgrad}\lambda = 0$ после несложных преобразований находим

$$\text{rot}l = -l \times \partial l / \partial t. \quad (2.21)$$

Из этого уравнения и ортогональности векторов l и n следует

$$|\text{rot}l| = |\partial l / \partial t|,$$

поэтому можем ввести новый единичный вектор b такой, что

$$\text{rot}l = \kappa b$$

и

$$b = n \times l, \quad (2.22)$$

т.е. векторы l , n , b образуют на эквипотенциальной поверхности взаимно ортогональную тройку векторов. Таким образом, движение источника порождает в каждой точке эквипотенциальной поверхности (сферы) ориентированный единичный репер.

2.5. При выводе приведенных выше уравнений предполагалось, что величина $(1-\beta_c)$ нигде не обращается в нуль. Рассматривая уравнение (2.6) как уравнение однопараметрического семейства сфер, т.е. считая λ параметром, находим, что огибающая этого семейства определяется уравнением

$$1-\beta_c = 0,$$

т.е.

$$\cos\alpha = 1/\beta \quad (2.23)$$

в полном соответствии с формулой (4.2)^{1/1}. Разумеется, последнее равенство имеет смысл только когда $\beta > 1$, при этом согласно (2.10) производная $\partial\lambda/\partial t$ обращается в бесконечность. Условия (2.20) и (2.23) определяют характерный конус, сопровождающий движущийся заряд при любой скорости движения.

3. Потенциал точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно

3.1. Если траектория точечного заряда задана как

$$x_c = vt, \quad y_c = 0, \quad z_c = 0, \quad v = \text{const},$$

то уравнение (2.6) принимает вид

$$(\beta^2 - 1)\lambda^2 + 2\beta\lambda x_1 + x_1^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad (3.1)$$

где $x_1 = x - vt$. Рассматривая его как квадратное уравнение относительно неизвестной величины λ , находим, что дискриминант уравнения (3.1) D равен

$$-D/4 = x_1^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2). \quad (3.2)$$

Очевидно, что $D < 0$ всегда, когда $\beta \leq 1$. При $\beta > 1$ величина D может быть как положительной, так и отрицательной. Граница между этими значениями определяется уравнением

$$x_1^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) = 0,$$

представляющим собой уравнение конуса Маха (1.8). На плоскости (x_1, λ) уравнение (3.1) можно рассматривать как уравнение плоской кривой 2-го порядка с инвариантами s, σ, Δ

$$s = \beta^2, \quad \sigma = -1, \quad \Delta = -y^2 - z^2,$$

которые при любом значении β определяют гиперболу.

Действительные корни уравнения (3.1), удовлетворяющие условию (2.5), имеют следующие значения:

$$\lambda = (\sqrt{x_1^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} + \beta x_1) / (1 - \beta^2), \quad \beta < 1.$$

$$\lambda = - (x_1^2 + y^2 + z^2) / 2x_1, \quad \beta = 1, \quad x_1 < 0,$$

$$\lambda = - \beta x_1 / (\beta^2 - 1), \quad \beta > 1, \quad x_1 = \rho,$$

$$\lambda_1 = - [\beta x_1 + \sqrt{x_1^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}] / (\beta^2 - 1), \quad \beta > 1, \quad x_1 < \rho,$$

$$\lambda_2 = - [\beta x_1 - \sqrt{x_1^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}] / (\beta^2 - 1), \quad \beta > 1, \quad x_1 < \rho, \quad (3.3)$$

$$\text{где } \rho = - \sqrt{(\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}.$$

Отсюда видно, что при $\beta < 1$ уравнение (3.1) имеет только один вещественный положительный корень при любых значениях координат. При $\beta = 1$ единственный положительный корень существует только при отрицательных значениях координаты x_1 . Если же $\beta > 1$, то здесь возможны три случая: при $x_1 > \rho$ действительных корней не имеется, при $x_1 = \rho$ (очевидно, это граница одной полости конуса Маха) имеется один положительный корень, а при $x_1 < \rho$ — таких корней два.

3.2. Теперь в соответствии с определением (2.3) потенциал рассматриваемого заряда при $\beta < 1$ в сферической системе координат

$$x_1 = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

принимает вид

$$\Phi = \frac{e}{\lambda} = \frac{e}{r} (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta). \quad (3.4)$$

Если (3.1) переписать в виде

$$\lambda^2 = (x_1 + \beta \lambda)^2 + y_1^2, \quad y_1^2 = y^2 + z^2, \quad (3.5)$$

то отсюда очевидно, что уравнение эквипотенциали $\lambda = \text{const}$ в плоскости (x_1, y_1) представляет собой уравнение окружности радиуса λ , центр которой смещен по оси x_1 на расстояние $-\beta \lambda$. Дифференциальное уравнение семейства кривых, ортогональных семейству окружностей (3.5), имеет вид

$$(x_1 + \beta\lambda)dy_1 - y_1 dx_1 = 0. \quad (3.6)$$

Вводя новые переменные

$$x_1 = \lambda(\cos\alpha - \beta), \quad y_1 = \lambda\sin\alpha, \quad (3.7)$$

где α - угол между векторами β_c и l (см. выше), находим интеграл уравнения (3.6):

$$\alpha = 2 \operatorname{arccctg} \left[e^{\beta \ln(\lambda/a)} \right]. \quad (3.8)$$

Здесь a - постоянная интегрирования, имеющая размерность длины. В сферических координатах уравнение семейства ортогональных кривых, т.е. уравнение "силовых" линий, имеет вид

$$r = a \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^{1/\beta},$$

где

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} \cos\vartheta + \beta \sin^2 \vartheta. \quad (3.9)$$

По определению угол "параллельности" Лобачевского $\Pi(x)$ равен

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arccctg}(e^x),$$

что соответствует формуле (3.8), если $\alpha = \Pi(x)$ и $x = \beta \ln(\lambda/a)$.

Если в (3.7) подставить $\cos\alpha$ из (2.20), то уравнение доволнового конуса Маха оказывается уравнением плоскости $x_1 = 0$, проходящей всегда через заряд ортогонально его скорости.

3.3. При $\beta > 1$ λ имеет два значения, поэтому в этом случае под потенциалом следует понимать сумму потенциалов

$$\Phi = \frac{e}{\lambda_1} + \frac{e}{\lambda_2} = \frac{e}{\lambda_e}, \quad (3.10)$$

где λ_e - эффективная величина λ . Следовательно, ответом на второй вопрос п. I. 4 является формула (3.10). Пользуясь формулами (3.3), для λ_e находим выражение

$$\lambda_e = - (x_1^2 + y^2 + z^2) / (2\beta x_1) \quad (3.11)$$

и соответственно для потенциала (в сферических координатах)

$$\Phi = \frac{-2\beta e \cos \vartheta}{r} \quad (3.12)$$

Последнее выражение имеет место внутри одной полости конуса Маха, а именно в той, где $x_1 < 0$. Вне этой полости не существует действительных значений λ -функции, поэтому здесь следует положить

$$\Phi = 0 \quad (3.13)$$

Если при $\beta < 1$ потенциал во всем пространстве описывался одной функцией (3.4), то при $\beta > 1$ потребовалось две функции — (3.12) и (3.13).

Далее, потенциал в форме (3.12) ограничен всюду и лишь при $r = 0$ имеет сингулярность, т.е., как и в электростатике, потенциал точечного заряда не имеет физического смысла только в той точке, где находится заряд.

На границе указанной выше полости конуса Маха имеем

$$\cos \vartheta = - \sqrt{\beta^2 - 1} / \beta \quad ,$$

поэтому здесь потенциал имеет величину

$$\Phi = \frac{2e\sqrt{\beta^2 - 1}}{r} \quad (3.14)$$

Наряду с ограниченностью величины потенциала при $\beta > 1$ из принципа Гюйгенса следует и ограниченность его градиента, если оставаться в пределах конуса Маха. Но производная потенциала по ϑ теряет смысл при переходе через границу конуса во внешнюю область, что видно из выражений (3.13) и (3.14). Последнее обстоятельство, равно как и сингулярность в занятой зарядом точке, действительно связаны с ограниченностью рассматриваемой задачи точечным зарядом.

Если $\beta > 1$ со стороны $\beta < 1$, то в числителе выражения (3.4)

имеем

$$\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta} \rightarrow |\cos \vartheta|, \quad \beta \cos \vartheta \rightarrow \cos \vartheta.$$

Поэтому числитель обращается в 0, когда $\cos \vartheta > 0$, и в $(-2\cos \vartheta)$ - в противном случае, потенциал же стремится к величине

$$\Phi = -2e\cos \vartheta / r, \quad \text{если } \cos \vartheta < 0,$$

$$\text{и } \Phi = 0, \quad \text{если } \cos \vartheta > 0.$$

Но такое же значение принимает и потенциал, определяемый выражением (3.12). Следовательно, найденные согласно модифицированному принципу Гюйгенса выражения (3.4) и (3.12), (3.13) определяют потенциал кусочно-непрерывными и ограниченными функциями.

Чтобы при $\beta > 1$ найти эквипотенциальные поверхности, перепишем (3.11) в виде

$$\beta^2 \lambda_e^2 = (x_1 + \beta \lambda_e)^2 + y^2 + z^2 = (x_1 + \beta \lambda_e)^2 + y_1^2.$$

Откуда видно, что эквипотенциали $\lambda_e = \text{const}$ представляют собой сферы радиуса $\beta \lambda_e$, центр которых смещен по оси x_1 на расстояние $-\beta \lambda_e$, т.е. на радиус сферы. Поэтому при $\beta > 1$ эквипотенциали, как и при $\beta < 1$, представляют собой сферы, касающиеся одна другой в вершине конуса. При этом физический смысл имеют лишь те части этих сфер, которые заключены внутри конуса Маха. Соединяя мысленно находящуюся на конусе точку произвольной сферы с ее же изолированной точкой в вершине конуса прямой, получим замкнутую эквипотенциальную поверхность, состоящую из части конуса, опирающегося на часть заключенной в него сферы.

На плоскости (x_1, y_1) эквипотенциали образуют так называемый параболический пучок окружностей, а ортогональные им кривые - такой же пучок окружностей с центрами, находящимися на оси y_1 . Уравнение пучка ортогональных окружностей имеет вид

$$x_1^2 + (y_1 + b)^2 = b^2,$$

где b - постоянная интегрирования.

Эквипотенциали движущегося точечного заряда и ортогональные им кривые показаны на рис. 16.

Заключение

Для двух обсуждаемых здесь альтернативных вариантов описания поля движущегося заряда — согласно электродинамике Максвелла (M) и модифицированному принципу Гюйгенса (H) — выпишем исходные уравнения и их решения в одних и тех же обозначениях в виде следующей таблицы.

Таблица

$$\square\Phi = 0 \quad (M) \quad \square\Phi = \frac{\partial(\Phi^2)}{ec\partial t} \quad (H)$$

$$\lambda = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \lambda/c)|, \quad \lambda > 0 \quad (L)$$

$$\square\lambda = \frac{z}{\lambda} \left(1 - \frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)$$

$$\Phi = \frac{e}{\lambda} \left(1 - \frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right) = \frac{e}{2} \quad \Phi = \frac{e}{\lambda}$$

$$\mathbf{v} = \text{const}: x - vt = r\cos\vartheta, \quad y^2 + z^2 = r^2\sin^2\vartheta,$$

$$\beta \cong 0: \Phi = \frac{e}{r} \quad \Phi = \frac{e}{r}$$

$$\beta < 1: \Phi = \frac{e}{r\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\vartheta}} \quad \Phi = \frac{e}{r} \left(\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\vartheta} - \beta\cos\vartheta\right)$$

$$\beta = 1: \Phi = -\frac{2e}{r\cos\vartheta} \quad \Phi = -\frac{2e}{r}\cos\vartheta$$

$$\beta > 1: \Phi = \Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_2) \quad \Phi = \Phi(\lambda_1) + \Phi(\lambda_2)$$

$$\Phi = -\frac{2e}{r\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\vartheta}} \quad \Phi = -\frac{2\beta e}{r}\cos\vartheta$$

Решение уравнений (М) и (Н) начинается с решения уравнения (L), т.е. с отыскания λ -функции. Разумеется, тип этого уравнения задается типом вектор-функции $\mathbf{r}_c(t)$ и в общем случае произвольный. Само же уравнение (L) ограничено той частью принципа Гюйгенса, которая определяет радиус сферической волны. Принимая волну за эквипотенциальную поверхность и используя найденную λ -функцию, строим решение уравнения (Н). Для построения же решения уравнения (М) необходимо еще вычислить $(1 - \partial\lambda/\partial ct)$ или $\rho\lambda$.

Именно благодаря множителю $(1 - \partial\lambda/\partial ct)$ запаздывающий потенциал обладает свойствами, которым "нельзя придавать смысла" /6/. Даже решение (1.6) (или (1.7)) можно получить, если для результирующего потенциала брать разность потенциалов, соответствующих двум корням уравнения (L). В противном случае получим тривиальное решение $\Phi = 0$. Приведенные в таблице выражения для потенциала точечного заряда при $\mathbf{v} = \text{const}$, показывают, что сингулярность на конусе Маха вызвана производной $\partial\lambda/\partial ct$, а не самой λ -функцией и тем более не точечностью рассматриваемого заряда.

Заметим, что лишь при $\beta > 0$, когда оба уравнения (М) и (Н) сводятся к уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$, они имеют одинаковые решения.

Автор считает приятным долгом выразить искреннюю благодарность академику А.М.Балдину за проявленный интерес к работе и предоставленную возможность ее выполнить, а также своему коллеге В.С.Алфееву за полезные обсуждения.

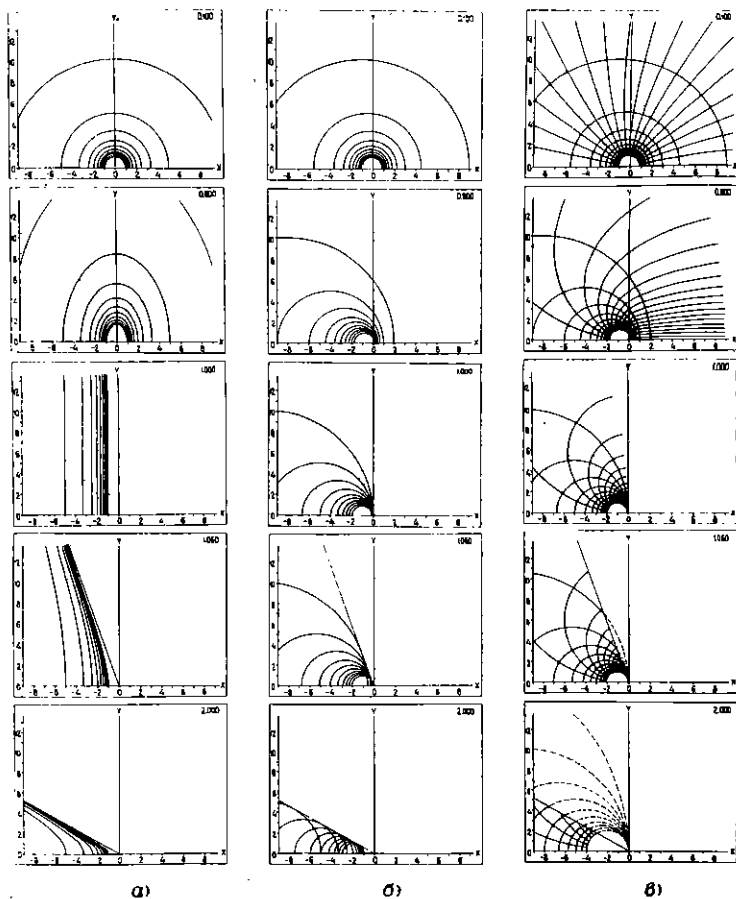


Рис. 1. Эквипотенциалы движущегося с постоянной скоростью точечного заряда согласно теории запаздывающего потенциала (а), сферические волны^{1/} (б) и эквипотенциалы и ортогональные им кривые согласно расширенному принципу Гюйгенса (в) на полуплоскости (x, y) . Значения β указаны цифрой в правом верхнем углу каждого рисунка. Эквипотенциалы вычислены для $\Phi_i = e(1 - t/10)/a_0$, где $e/a_0 = 1$ при $a_0 = 1$ и $t = 0 \div 9$. Радиус сферических волн равен $a_0/(1 - t/10)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк И.М. Излучение Вавилова-Черенкова. М.: Наука, 1988, с. 27.
2. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981, с. 122.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1965, т.4, Кинетика, Теплота, Звук, с. 218.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966, т.6, Электродинамика, с. 156.
5. Дитчберн Р. Физическая оптика. М.: Наука, 1965, с. 26.
6. см. 2, с. 96.
7. см. 2, с. 118.
8. см. 2, с. 117.
9. Бейтман Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. М.: ГОИЗ ФМЛ, 1958, с. 138.
10. Ландау Л. и Лифшиц Е. Теория поля. М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с. 185.
11. см. 10, с. 187.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 января 1990 года.