объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р2-90-237

Д.Т.Гегелия, Л.А.Слепченко

# ОТОБРАЖЕНИЕ НИКОЛАИ В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1990

Тесную связь между суперсимметрией и стохастическими процессами впервые заметили в работе Паризи, Сурла [1]. Они нашли, что лагранжиан, описывающий марковский процесс с потенциальными силами, обладает суперсимметрией. Центральное место в этой связи занимает т.н. отображение Николаи [2]. Для суперсимметричной квантовой механики отображение Николаи может интерпретироваться как стохастический процесс [3] с использованием формальных свойств интегралов по путям. Оно понимается как преобразование бозонных конфигураций полей, такое, что а) бозонная часть лагранжиана в функциональном интеграле представляется в гауссовском виде;
б) якобиан преобразования совпадает с фермионным детерминантом.

Таким образом, после интегрирования по фермионным полям функциональный интеграл принимает гауссовский вид. Это свойство выражает тот факт, что евклидов функциональный интеграл представляет плотность вероятности стохастического процесса [4].

Важным примером, когда отображение Николаи известно в явном виде, является суперсимметричная квантовая механика. В частности, в работах [5-8] изучена зависимость отображения Николаи от граничных условий. В этих работах построены отображения Николаи для квантово-механических систем с магнитным полем и показано, что ассоциированные с ними стохастические процессы являются марковскими процессами с потенциальными силами.

В данной работе мы рассмотрим самый общий случай магнитных полей в двумерной суперсимметричной квантовой механике и получим отображение Николаи в явном виде.

Мы будем исходить из следующего нерелятивистского гамильтониана:

$$H=1/2[(\bar{p}-\bar{a})^2+V+U\sigma_3], \qquad (1)$$

где $\sigma_3$ - матрица Паули.

Уравнение Шредингера для системы, описывающейся этим гамильтонианом, имеет вид:

$$i\,\partial_t\psi=1/2(-\Delta+\bar{a}^2+2i\,\bar{a}\bar{\nabla}+i\,\bar{\nabla}\bar{a}+V+U\sigma_3)\psi,$$

переходя к евклидову случаю $t\to -i\tau$, получим

$$\partial_\tau\psi=1/2(\Delta-\bar{a}^2-2i\,\bar{a}\bar{\nabla}-i\,\bar{\nabla}\bar{a}-V-U\sigma_3)\psi, \qquad (2)$$

перепишем (2) в виде:

$$\partial_\tau\psi=1/2(\Delta+2\lambda\bar{a}\bar{\nabla}+\lambda\bar{\nabla}\bar{a}+\lambda^2\bar{a}^2-V-U\sigma_3)\psi. \qquad (3)$$

Уравнение (3) получено из (2) подстановкой $\lambda\to -i$.

Последние уравнения представляют компактную запись уравнений для компонент спинора $\psi_1$ и $\psi_2$. Они получаются подстановкой $(-1)^{j+1}$ ($j=1,2$) вместо $\sigma_3$.

Свяжем уравнение (3) с уравнением Фоккера-Планка для стохастических процессов:

$$\partial_\tau P=1/2(\partial_{xx}+\partial_{yy})P-\partial_x(K_xP)-\partial_y(K_yP). \qquad (4)$$

Уравнение Фоккера-Планка описывает марковский стохастический процесс с P-плотностью вероятности случайной величины $\bar{r}(x,y)$ в момент $\tau$. Здесь вектор $\bar{K}=(K_x,K_y)$ называется вектором дрейфа. См. подробнее в [9].

Представим P в виде $P=e^{\phi}\psi$, тогда для $\psi$ получим следующее уравнение:

$$\partial_\tau\psi=1/2(\partial_{xx}\psi+2\partial_x\phi\partial_x\psi+\partial_{xx}\phi\psi+(\partial_x\phi)^2\psi-2\partial_xK_x\psi-2K_x\partial_x\phi\psi-2K_x\partial_x\psi+\partial_{yy}\psi+$$
$$+2\partial_y\phi\partial_y\psi+\partial_{yy}\phi\psi+(\partial_y\phi)^2\psi-2\partial_yK_y\psi-2K_y\partial_y\phi\psi-2K_y\partial_y\psi). \qquad (5)$$

Если выполняются условия:

$$\partial_x\phi-K_x=\lambda a_x \qquad \bar{a}=(a_x,a_y) \qquad (6a)$$
$$\partial_y\phi-K_y=\lambda a_y \qquad (6b)$$
$$\partial_xK_x+K_x^2+\partial_yK_y+K_y^2=V+U(-1)^{j+1} \qquad j=1,2, \qquad (6c)$$

то уравнения (5) и (3) совпадают. Можно показать, что эти условия могут выполняться и для не суперсимметричного потенциала $V+(-1)^kU$. (Соответственно будет существовать отображение Николаи).

Выражая из (6a) и (6b) $K_x$ и $K_y$ и подставляя в (6c), с заменой $\lambda$ на $-i$, мы видим, что $e^{\phi}$ является решением с нулевой энергией уравнения:

$$H\psi=0,\quad H=1/2[(-i\,\bar{\nabla}+\bar{a})^2+V+U\sigma_3). \qquad (7)$$

К вопросу о нахождении функции $\phi$ для суперсимметричной задачи электрона в двумерном магнитном поле мы вернемся ниже.

Рассмотрим уравнение (4). В нашем случае вектор дрейфа запишется как $\bar{K}=\bar{\nabla}\phi-\lambda\bar{a}$. В зависимости от величины потенциала $\bar{a}$ можно провести классификацию моделей Фоккера-Планка ($-\lambda\bar{a}$-стационарная скорость дрейфа). Различают следующие случаи:



1) $\bar{a}=\bar{0}$
2) $\bar{\nabla}\bar{a}=0,\ \bar{a}\neq\bar{0}$
3) $\bar{\nabla}\bar{a}\neq 0$.

Первый класс описывает процессы с потенциальными силами ($\bar{K}=\bar{\nabla}\phi$) и рассмотрен в [1]. Случай 2 разобран в [8]. Мы же сейчас рассмотрим общий случай, 3, не накладывая определенных ограничений на величину потенциала (стационарную скорость дрейфа). Приведем также альтернативную возможность описания стохастических марковских процессов дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\bar{r}}=\bar{K}+\bar{\eta}. \qquad (8)$$

В данном случае $\bar{\eta}$ представляет т.н. гауссовский белый шум [9].

Покажем сейчас, что уравнение (8) для $\lambda=-i$ играет роль отображения Николаи для евклидова функционального интеграла. Рассмотрим суперсимметричную систему с гамильтонианом (1). Введем канонические операторы $\hat{r}$ и $\hat{p}$ и операторы рождения и уничтожения $\hat{\psi}^+$ и $\hat{\psi}$, $\{\hat{\psi}^+,\hat{\psi}\}=1$.

Запишем $H=\left\|\begin{matrix}H2 & 0\\ & H1\end{matrix}\right\|$ в виде

$$H=1/2(\hat{p}_1-a_1)^2+1/2(\hat{p}_2-a_2)^2+(1/2)V+(1/2)[\hat{\psi},\hat{\psi}^+]U.$$

С помощью стандартных методов [10,11] для амплитуды перехода в евклидовом времени $\tau=it$ получим

$$I_k=\langle\bar{R};k\,|\bar{R}_0;k\rangle \qquad k=1,2 \text{ нумерует фермионный сектор,}$$

$$I_k=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=1}^{N}d\bar{r}_i\,(1/2\pi\varepsilon)^{N+1}J_k^N\times$$

$$\times\exp\left[-\sum_{j=1}^{N+1}\varepsilon[1/2((r_j^\mu-r_{j-1}^\mu)/\varepsilon)^2-i/2\left(\left[r_j^\mu-r_{j-1}^\mu\right]/\varepsilon\right)(a^\mu(\bar{r}_j)+a^\mu(\bar{r}_{j-1}))+\right.$$

$$\left.+1/2V(\tilde{\bar{r}}_j)]\right],$$

где $\varepsilon=\tau/(N+1)$, $\bar{r}_{N+1}=\bar{R}$, $\bar{r}_0=\bar{R}_0$ и

$$J_k^N=\int\left(\prod_{i=1}^{N+1}d\zeta_i\,d\zeta_i^*\right]g_k\exp\left(-\sum_{j=1}^{N+1}\varepsilon\left[\zeta_j^*((\zeta_j-\zeta_{j-1})/\varepsilon)-(1/2)U(\bar{r}_j)\zeta_j^*\zeta_{j-1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1/2)U(\bar{r}_{j+1})\zeta_j^*\zeta_j\right]\right).$$

Здесь $\zeta_i$ и $\zeta_i^*$ $i=0,1,\ldots,N+1$-пары грассмановых переменных, $g_k$-величины, содержащие граничные условия:

$$g_1=\exp(-\zeta_0^*\zeta_0),\quad g_2=\exp(-\zeta_0^*\zeta_{N+1}). \qquad (9)$$

Теперь $I_k$ можно записать так:

$$I_k=\int\mathfrak{D}\bar r(t')\mathfrak{D}\zeta^*(t')\mathfrak{D}\zeta(t')\exp\left[-\int_0^\tau \mathfrak{L}dt'\right]g_k(\zeta(0),\zeta(\tau)), \qquad (10)$$

где $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2$ есть суперсимметричный лагранжиан, соответствующий H:

$$\mathfrak{L}_1=(1/2)\dot r^\mu \dot r^\mu - i\dot r^\mu a^\mu+(1/2)V,$$

$$\mathfrak{L}_2=\zeta^*(-\partial/\partial t'-U)\zeta.$$

После интегрирования по грассмановым переменным получим:

$$I_k=\int_{R_0}^{R}\mathfrak{D}\bar r(t')J_k[\bar r(t')]\exp\left[-\int_0^\tau \mathfrak{L}_1 dt'\right], \qquad (11)$$

$$J_k(\bar r)=\int\mathfrak{D}\zeta(t')\mathfrak{D}\zeta^*(t')\exp\left[-\int_0^{\tau}\mathfrak{L}_2 dt'\right]g_k. \qquad (12)$$

Отображение Николаи для функционального интеграла (10) есть замена $\bar r\to\bar\eta$, которая удовлетворяет условиям: 1) лагранжиан $\mathfrak{L}_2$ сводится к квадратичной форме; 2) якобиан преобразования сокращает $J_k(\bar r)$. Грассманово интегрирование дает:

$$J_k^N=\exp\left(-(1/2)\varepsilon\sum_{j=1}^{N+1}(-1)^k U(\bar r_j)\right), \qquad (13)$$

где учтен тот факт, что разница между $\varepsilon U(\bar r_j)$ и $\varepsilon U(\bar r_{j-1})$ ничтожна при $N\to\infty$.

Сделаем замену:

$$\eta^1=\dot x-K_x$$
$$\eta^2=\dot y-K_y,$$

возможное дискретное представление этой замены имеет вид:

$$\eta^1_j=(x_j-x_{j-1})/\varepsilon-K_x(\tilde x_j;\tilde y_j)$$
$$\eta^2_j=(y_j-y_{j-1})/\varepsilon-K_y(\tilde x_j;\tilde y_j)\quad j=1,2,\ldots N+1,$$

где $\tilde x_j=(x_j+x_{j-1})/2$; $\tilde y_j=(y_j+y_{j-1})/2$.

Якобиан замены запишется в виде:

$$||\partial\bar r/\partial\bar\eta||=\prod_{j=1}^{N+1}|\det(\partial\bar\eta_j/\partial\bar r_j)|^{-1}$$

$$\det(\partial\bar\eta_j/\partial\bar r_j)=(1/\varepsilon^2)\exp(-(1/2)\varepsilon(\partial_xK_x+\partial_yK_y)+O(\varepsilon^2)).$$

Причем множитель $1/\varepsilon^2$ включим в меру интегрирования.



В новых переменных:

$$\mathfrak{L}_1=(1/2)(\eta_1^2+\eta_2^2-K_x^2-K_y^2+V+2\dot x(K_x-ia_x)+2\dot y(K_y-ia_y)).$$

Потребуем сейчас $\partial_xK_x+\partial_yK_y=V-K_x^2-K_y^2+(-1)^kU$.

Это уравнение совпадает с условием (6c). Из (6a) и (6b) после замены $\lambda$ на $-i$ имеем:

$$K_x-ia_x=\partial_x\phi$$
$$K_y-ia_y=\partial_y\phi.$$

Таким образом, бозонный лагранжиан сводится к

$$\mathfrak{L}_1=(\eta_1^2+\eta_2^2-K_x^2-K_y^2+V+2\dot\phi)/2.$$

Итак, получаем сокращение якобиана преобразования, детерминанта $J_k$ и члена $-K_x^2-K_y^2+V$ в лагранжиане. Функциональный интеграл при этом сводится к гауссову виду (с учетом нетривиальных граничных условий).

Вернемся сейчас к нахождению функции основного состояния суперсимметричной задачи электрона в плоском магнитном поле. Для этого решим задачу (7) с $V=0$, $U=(\partial_1 a_2-\partial_2 a_1)(\bar r)$.

Запишем гамильтониан задачи следующим образом:

$$H=Q^2/2,\ \text{т.е.}\ H_1=A^*A/2,\ H_2=AA^*/2,$$

где $A=-i\partial_1-a_1+i(i\partial_2+a_2)$, $H_j=((-i\bar\nabla-\bar a)^2-(-1)^j b)/2$, $b=\partial_1 a_2-\partial_2 a_1$.

Определяя A как $A=-i\partial_1+a_1-i(i\partial_2-a_2)$, придем к

$$H=((-i\bar\nabla+\bar a)^2+b\sigma_3)/2.$$

Решение задачи нахождения основного состояния (нулевого решения) сводится к решению следующих уравнений: $A\psi=0$, $A^*\psi=0$ (для обоих секторов).

Рассмотрим $A\psi=0$ и представим $\psi$ в виде $\psi=e^\phi$, получим:

$$-i\partial_1\phi+a_1+\partial_2\phi+ia_2=0.$$

Представляя $\phi=\phi_1+i\phi_2$, получим

$$\Delta\phi_1=\partial_1 a_2-\partial_2 a_1$$
$$\Delta\phi_2=-\partial_1 a_1-\partial_2 a_2.$$

В заключение приведем построение отображения Николаи для двумерной точно решаемой суперсимметричной задачи атома водорода [12]. $H=(\bar p^2+W'^2+(W''+W'/r)\sigma_3-2\hat l W'/r)/2$,

в радиальных координатах

$$H=(\hat p_r^2+(\hat l^2-1/4)/r^2+W'^2+(W''+W'/r)\sigma_3-2W'\hat l/r)/2.$$

Уравнение Шредингера примет вид $\psi\to r^{-1/2}\psi$:

$$i\partial_t\psi=(1/2)(-\partial_{rr}-1/(4r^2)+W'^2+(W''+W'/r)\sigma_3-2W'/r(-i\partial_\theta))\psi.$$

Соответствующее уравнение Фоккера-Планка имеет вид:

$$\partial_\tau P=\partial_{rr}P/2+\partial_{\theta\theta}P/(2r^2)-\partial_r(A_1^j P)-\partial_\theta(A_2^j P),$$

где

$$A_1^j=-(-1)^j W'+1/(2r),$$
$$A_2^j=-\lambda W'/r,$$

$j=1,2$ нумерует фермионный сектор. Стохастические дифференциальные уравнения в этом случае примут вид:

$$\dot r=-(-1)^j W'+1/(2r)+\eta^1,$$
$$\dot\theta=-\lambda W'/r+\eta^2/r.$$

Евклидов классический лагранжиан

$$\mathcal{L}_E=(-\dot r^2-r^2\dot\theta^2+2ir\dot\theta W'+1/(4r^2)-(W''+W'/r)\sigma_3)/2.$$

Соответствующая бозонная часть представится следующим образом:

$$\mathcal{L}_1=-((\dot r-(-1)^k W'-1/(2r))^2+(r\dot\theta-iW')^2-1/(2r^2)-2\dot r(-1)^k W'+\dot r/r-(-1)^k W'/r)/2,$$

отображение Николаи примет простой вид:

$$\eta^1=\dot r-(-1)^k W'-1/(2r)$$
$$\eta^2=r\dot\theta-iW'.$$

В полной аналогии с предыдущими вычислениями можно показать сокращение якобиана преобразования с соответствующим фермионным детерминантом $J_k$, так что функциональный интеграл сводится к гауссову виду.

Подставляя суперпотенциал задачи атома водорода [12] $W=(\alpha/k)r$, получим соответствующее уравнение Фоккера-Планка:

$$\partial_\tau P=\partial_{rr}P/2+\partial_{\theta\theta}P/(2r^2)-\partial_r((1/(2r)-\alpha(-1)^j/k)P)-\partial_\theta(-\lambda\alpha P/k)$$

и искомое отображение Николаи:

$$\eta^1=\dot r-(-1)^j\alpha/k-1/(2r)$$
$$\eta^2=r\dot\theta-i\alpha/k.$$

Таким образом, в данной работе получено отображение Николаи в квантовой механике с фермионной степенью свободы. Показано также, что в квантовой механике существование этого отображения не требует наличия суперсимметрии. На примере задачи электрона в двумерном магнитном поле показана связь суперсимметрии со стохастическими марковскими процессами наиболее общего вида. Явно выписано отображение Николаи и соответствующее уравнение Фоккера-Планка для задачи Кулона в двумерии.



Авторы глубоко благодарны В.Г.Кадышевскому и А.Б.Говоркову за весьма полезные обсуждения.

Литература

1. Parisi G. Sourlas N. Phys.Rev.Lett.1979,43,p.244.
2. Nicolai H. Phys.Lett.1980,89B, p.341; Nucl.Phys.1980,B176, p.419.
3. Cecotti S. Girardello L. Ann.Phys.1983,145,p.81.
4. Parisi G. Sourlas N. Nucl.Phys. 1982,B206,p.321.
5. Ezawa H. Klauder J.R. Progr.Theor.Phys. 1985,74, p. 904.
6. Claudson M,Halpern M.B. Ann.Phys. 1986,165, p.33.
7. Graham R. Roekaerts D. Phys.Rev. 1986,D34, p.2312.
8. Bolle D. Dupont P. Roekaerts D. Journ.Phys. 1987,A20.N14.
9. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках М.: "Мир" 1986.
10. Faddeev L.D. Methods in Fields Theory.North-Holland, Amsterdam, 1976.
11. Langouche F. Roekaerts D. and Tirapegui E. Functional Integration and Semiclassical Expansions. Reidel,Dordrecht,1982.
12. Вардиашвили М.Д. Матвеев В.А. Слепченко Л.А. Теоретическая и математическая физика, т.78 №2, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля 1990 года