сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-90-157

С.Н.Солодухин*, М.Н.Тентюков

СТРУКТУРА КОНФОРМНОЙ И ЛОРЕНЦЕВОЙ АНОМАЛИЙ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

*Московский государственный университет
им.М.В.Ломоносова

1990

1. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ

Как известно, имеются определенные трудности в динамическом описании двумерной гравитации, поскольку действие Эйнштейна - Гильберта в двух измерениях является топологическим инвариантом. Поэтому используют либо нелокальное действие для метрики [1], либо действие, квадратичное по кривизне [2]. Однако, рассматривая двумерный репер как гравитационные степени свободы, можно построить локальное, квадратичное по производным действие [3-4]:

$$S - \frac{1}{4} \int d^2 z h C^a_{\mu\nu} C^{\mu\nu}_a , \qquad /1/$$

где $C^a_{\mu\nu} = \partial_\mu h^a_\nu - \partial_\nu h^a_\mu$ - объекты неголономности, $h = \det h^a_\mu$.

Рассматривая базис I-форм $e^a = h^a_\mu dx^\mu$, $a = 1,2$, имеем:

$$de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0 ,$$

где ω^a_b - форма лоренцевой связности.

Тогда имеем

$$C^a_{\mu\nu} = -\omega^a_{b,\mu} \; h^b_\nu + \omega^a_{b,\nu} \; h^b_\mu .$$

С другой стороны,

$$\omega_{ab,\mu} = \frac{1}{2} (C_{a,\nu\mu} \; h^\nu_b + C_{b,\mu\nu} \; h^\nu_a - C_{d,\alpha\beta} \; h^\alpha_a h^\beta_b h^d_\mu) .$$

Действие /1/ можно записать в виде

$$S = \int * de^a \wedge de_a . \qquad /1'/$$

Особенностью /~~1~~1'/ является то, что при конформных вариациях репера $\delta h^a_\mu = \sigma h^a_\mu$ /1/ генерирует конформную аномалию:

$$\delta_\sigma S = \frac{1}{2} \int d^2 z h \sigma R ,$$

где $R = -2 \nabla_\mu (h^a_\nu C^{\mu\nu}_a)$ - двумерный скаляр кривизны. Используя отмеченную выше связь между $C^a_{\mu\nu}$ и $\omega^a_{b,\mu}$, а также справедливое в двумерии тождество /в евклидовой геометрии/

$$\epsilon^{ab}\epsilon_{cd} = \delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c \qquad /2/$$

и вытекающие отсюда соотношения

$$\omega^a_b = \frac{1}{2} \epsilon^a_b \epsilon_{cd} \omega^{cd}, \qquad /3/$$

можно получить другое выражение для скаляра кривизны:

$$R = 2\nabla_\mu \tilde{\omega}^\mu, \qquad /4/$$

где

$$\tilde{\omega}_\mu = \epsilon_{\mu\alpha} \omega^\alpha, \qquad \omega_\alpha = \frac{1}{2} \omega_{ab,\alpha} \epsilon^{ab}.$$

Особенностью действия /1/ является также неинвариантность его при локальных лоренцевых вращениях репера $\delta h^a_\mu = \epsilon^a_b h^b_\mu \phi$:

$$\delta_\phi S = \frac{1}{2} \int d^2 z h \phi K,$$

где $K = 2\nabla_\mu (h^a_\mu \epsilon_{ab} C^{b\mu\nu})$ - некоторая скалярная величина, которая будет часто встречаться ниже.

Используя те же соотношения, можно получить другое выражение для K:

$$K = 2\nabla_\mu \omega^\mu. \qquad /5/$$

Уже здесь следует отметить определенную параллель между выражениями для конформной и лоренцевой вариаций действия /1/, а также между выражениями для K и R. Можно сказать, что K есть скаляр кривизны для дуальной лоренцевой связности. Отметим здесь, что K - конформно-инвариантная величина, тогда как скаляр кривизны R, очевидно, является лоренцевым инвариантом.

Далее, зададимся вопросом, генерирует ли изменение /1/ при локальных лоренцевых вращениях репера лоренцеву аномалию? Напомним, что при конформных растяжениях репера генерируется конформная аномалия. Таким образом, следует проверить, является ли величина

$$\alpha(\phi) = \frac{1}{2} \int d^2 z h \phi K$$

коциклом, т.е. удовлетворяет ли она условию согласованности Весса - Зумино /6/. При локальных вращениях $\delta h^a_\mu = \epsilon^a_b h^b_\mu \beta$ имеем

$$\delta_\beta K = -2 \nabla_\mu \nabla^\mu \beta.$$

Следовательно, применяя операцию кограницы к величине $a(\phi)$, получаем

$$\delta a = \int d^2 z\, h\, (\phi \nabla_\mu \nabla^\mu \beta - \beta \nabla_\mu \nabla^\mu \phi) = 0,$$

т.е. $a(\phi)$ действительно является I-коциклом, а следовательно, K - лоренцева аномалия.

2. МЕТОД СПУСКА

Хотелось бы иметь когомологическое обоснование появления K в качестве лоренцевой аномалии. Напомним, что аномалия является I-коциклом, и существует метод получения выражения для аномалии, известный как метод спуска [8]. Суть его в следующем.

Для получения аномалии в двух измерениях следует рассмотреть в четырех измерениях замкнутую инвариантную форму

$$\omega_{-1} = R^a_b \wedge R^b_a\ ,$$

где 2-форма кривизны вследствие абелевости 2-мерной группы Лоренца имеет вид $R^a_b = d\omega^a_b$.

Далее следует рассмотреть форму

$$\omega_{-1} = d\omega_0\ ,$$

где $\omega_0 = \omega^a_b \wedge d\omega^b_a$, которая при лоренцевых вращениях $\delta_\phi \omega^a_b = \epsilon^a_b\, d\phi$ изменяется как $\delta_\phi \omega_0 = d\omega_1$, где $\omega_1 = \epsilon^a_b\, d\omega^b_a\, \phi$. Согласно общему рецепту ω_1 и дает выражение для аномалии

$$a_1\ (\phi, \omega) = \int \phi\, \epsilon^a_b\, d\omega^b_a = - \int d^2 z\, h\, \phi\, R\ .$$

Таким образом, метод спуска показывает, что лоренцева аномалия, как и конформная, в двумерии должна быть пропорциональна скаляру кривизны R, а не K. Можно заключить, что, поскольку K также является аномалией, метод спуска не дает в двумерии все нетривиальные коциклы.

3. МЕТОД ПОДЪЕМА

В двумерии применительно к поиску конформной аномалии предлагается использовать другой метод, который можно назвать методом "подъема". Суть его заключается в том, что на двумерном многообразии рассматриваются инвариантные δ-точные формы, где δ - оператор, сопряженный оператору внешнего дифференцирования d:

$$\delta = *^{-1} d * .$$

Здесь $*$ - оператор дуализации Ходжа.

Прежде всего найдем закон преобразования формы связности при конформных преобразованиях $\delta e^a = \sigma e^a$.

Исходя из уравнения

$$de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0,$$

получаем, что при изменении

$$e^a \to e^a + \sigma e^a ,$$

$$\omega^a_b \to \omega^a_b + \Delta\omega^a_b ,$$

должно выполняться уравнение

$$(d\sigma \delta^a_b + \Delta\omega^a_b) \wedge e^b = 0.$$

Или по компонентам

$$\Delta\omega^a_{[b,c]} + \delta^a_{[b}\partial_{c]}\sigma = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\omega_{ab,c} = \delta_{ac}\partial_b\sigma - \delta_{bc}\partial_a\sigma ,$$

или

$$\Delta\omega^a_{b,\mu} = \epsilon^a_b \epsilon^\nu_\mu \partial_\nu \sigma . \qquad /6/$$

Рассматривая форму $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ab}\epsilon^{ab}$, это можно записать в бескоординатном виде:

$$\Delta_\sigma \omega = \delta * \sigma . \qquad /7/$$

Рассмотрим теперь конформно-инвариантную δ-замкнутую нуль-форму $\omega_{-1} = \delta(\omega\delta\omega)$. По ней можно определить форму ω_0:

$$\omega_{-1} = \delta\omega_0 ; \qquad \omega_0 = \omega\delta\omega ,$$

которая при конформных преобразованиях изменяется на величину

$$\Delta_\sigma \omega_0 = \delta\omega_1 ,$$

где $\omega_1 = {}^*\sigma\delta\omega$ - 2-форма, интеграл от которой равен

$$\alpha(\sigma,\omega) = \int \omega_1 = \int d^2 z h \sigma \frac{K}{2}$$

и является 1-коциклом конформной группы. Следовательно, в качестве конформной аномалии неожиданно получилась величина K, а не скаляр кривизны R.

4. ОБЪЕДИНЕНИЕ КОНФОРМНЫХ И ЛОРЕНЦЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ДВУМЕРИИ

Здесь мы попытаемся связать конформные и лоренцевы преобразования, а также получение соответствующих аномалий как методом спуска, так и методом подъема.

От форм e^1 и e^2 перейдем к комплексной форме $E: E = e^1 + ie^2$. Тогда преобразование Лоренца для E сведется к умножению на $e^{i\phi}$:

$$E \to e^{i\phi} E.$$

В то же время конформные преобразования имеют вид $E \to e^{\sigma} E$. Таким образом, эти преобразования можно рассматривать как частные случаи преобразования $E \to e^{\lambda} E$, где $\lambda = \sigma + i\phi$.

Предполагая инвариантность относительно таких обобщенных локальных преобразований, введем форму комплексной связности $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$:

$$dE + \Gamma \wedge E = 0, \qquad R = d\Gamma. \tag{/8/}$$

Найдем закон изменения Γ при обобщенных преобразованиях

$$E \to E + \lambda E,$$

$$\Gamma \to \Gamma + \Delta\Gamma.$$

Уравнения на $\Delta\Gamma$ имеют вид

$$(d\lambda + \Delta\Gamma) \wedge E = 0. \tag{/9/}$$

Отметим, что существует два решения этого уравнения:

$$\Delta\Gamma = -d\lambda, \qquad (\Delta\Gamma_\mu = -\partial_\mu \lambda); \tag{/10/}$$

$$\Delta\Gamma = -i\delta * \lambda, \qquad (\Delta\Gamma_\mu = -i\epsilon_\mu^a \partial_a \lambda). \tag{/10'/}$$

Умножение на $-i$ эквивалентно дуализации по лоренцеву индексу: $-iE = \epsilon_{12} e_2 + i\epsilon_{21} e_1$. Уравнение /8/ можно записать в виде

$$de^1 + \Gamma_1 \wedge e^1 - \Gamma_2 \wedge e^2 = 0,$$

$$de^2 + \Gamma_1 \wedge e^2 + \Gamma_2 \wedge e^1 = 0,$$

что эквивалентно

$$de^a + \hat{\omega}^a_b \wedge e^b = T^a, \qquad /11/$$

где

$$\hat{\omega}_{ab} = -\hat{\omega}_{ba} \quad (\hat{\omega}_{12} = -\Gamma_2), \qquad T^a = -\Gamma_1 \wedge e^a.$$

Последнее уравнение - не что иное, как одно из уравнений геометрии Римана - Картана /7/ с лоренцевой связностью $\hat{\omega}^a_b$ и кручением T^a, которое в двумерии всегда выражается через свой след $Q_\mu = T^a_{a\mu} = \Gamma_{1\mu}$.

Заметим, что из /10/ следует закон преобразования

$$\Delta_\phi \Gamma_2 = -d\phi, \qquad (\Delta_\phi \hat{\omega}_\mu = \partial_\mu \phi);$$

$$\Delta_\sigma \Gamma_1 = -d\sigma, \qquad (\Delta_\sigma Q_\mu = -\partial_\mu \sigma);$$

в то время как из /10'/ следует

$$\Delta_\phi \Gamma_1 = \delta * \phi, \qquad (\Delta_\phi Q_\mu = \epsilon^\alpha_\mu \partial_\alpha \phi);$$

$$\Delta \Gamma_2 = -\delta * \sigma, \qquad (\Delta_\sigma \hat{\omega}_\mu = \partial_\mu \sigma).$$

Теперь найдем соответствующие коциклы. Предполагая закон /10/, т.е. $\Delta_\lambda \Gamma = -d\lambda$, мы используем метод спуска и приходим к аномалии

$$a_1(\lambda, \Gamma) = \int \lambda d\Gamma = \int \lambda [\nabla_\mu (\epsilon^{\mu\nu} Q_\nu) - \frac{1}{2} \hat{R}] h d^2 z, \qquad /12/$$

где $\hat{R}$ - скаляр кривизны метрической связности с учетом кручения.

Для закона /10'/, т.е. $\Delta_\lambda \Gamma = -i\delta * \lambda$, мы используем метод подъема и получаем аномалию

$$a_2(\lambda, \Gamma) = -i \int * \lambda \delta \Gamma = i \int \lambda [\nabla_\mu Q^\mu - \frac{i}{2} \hat{K}] h d^2 z. \qquad /13/$$

Здесь $\hat{K} = 2\nabla_\mu \hat{\omega}^\mu$ определяется с учетом кручения, содержащегося в $\hat{\omega}^\mu$.

Таким образом, нами получены выражения для лоренцевой и конформной аномалии с учетом кручения. Полагая кручение отсутствующим $/Q_\mu = 0/$, заключаем, что обе аномалии пропорциональны как R, так и K.

5. ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛОРЕНЦЕВОЙ СИГНАТУРЫ

В случае сигнатуры /-,+/ объединение конформных и лоренцевых преобразований имеет свои особенности.

От форм e^0 и e^1 перейдем к матричнозначной форме $E = e^1 + e^0\sigma_0$, где $\sigma_0^2 = 1$. Преобразование Лоренца тогда сводится к умножению на матрицу:

$$E \to (\mathrm{ch}\,\phi + \mathrm{sh}\,\phi\sigma_0)\,E\,,$$

а конформное - к $E \to e^{\alpha} E$. Следовательно, конформные и лоренцевы преобразования опять можно объединить: $\delta_\lambda E = \lambda E$, где $\lambda = \alpha + \phi\sigma_0$.

Уравнения структуры для матричнозначной связности $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_0\sigma_0$ имеют вид

$$dE + \Gamma \wedge E = 0,$$

$$R = d\Gamma\,.$$

Это эквивалентно

$$de^1 + \Gamma_1 \wedge e^1 + \Gamma_0 \wedge e^0 = 0,$$

$$de^0 + \Gamma_1 \wedge e^0 + \Gamma_0 \wedge e^1 = 0,$$

что совпадает с уравнением $de^a + \hat{\omega}^a_b \wedge e^b = T^a$, где

$$\hat{\omega}_{ab} = -\hat{\omega}_{ba}\,, \quad (\hat{\omega}_{01} = \Gamma_0)\,, \quad T^a = -\Gamma_1 \wedge e^a\,.$$

При обобщенных преобразованиях $\delta_\lambda E = \lambda E$ опять-таки возможны два закона для преобразования связности Γ:

$$\Delta_\lambda \Gamma = -d\lambda$$

и

$$\Delta_\lambda \Gamma = \sigma_0 \delta * \lambda\,.$$

Умножение на σ_0 опять есть дуализация по лоренцеву индексу:

$$\sigma_0 (e^1 + e^0\sigma_0) = \epsilon^1_0 e^0 + \epsilon^0_1 e^1 \sigma_0\,.$$

Соответственно получаем два коцикла

$$a_1 = \int \lambda d\Gamma\,, \qquad /14/$$

$$a_2 = \int * \lambda\delta\Gamma\,,$$

которые аналогичны выражениям /12/-/13/. Заметим, что σ_0 играет роль "мнимой единицы", определяя в /14/ два независимых выражения для аномалии.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ С ФЕРМИОННОЙ МАТЕРИЕЙ

Здесь мы обсудим вопрос, в какой теории возникают аномалии, пропорциональные величине **K**.

Рассмотрим двумерные спиноры ψ со стандартным действием

$$S = \int d^2 z\, h \psi^+ \hat{D}_1 \psi . \qquad /15/$$

Здесь $\hat{D}_1$ - оператор Дирака:

$$\hat{D}_1 = i\sigma^\mu \nabla_\mu = i\sigma^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu \sigma_5), \qquad /16/$$

где $\sigma_5 = \sigma_1 \sigma_2$.

Отметим, что в двумерии кручение не дает вклад в оператор Дирака. Используя соотношение $\sigma^\mu \sigma_5 = \epsilon^\mu_a \sigma^a$, оператор /16/ можно записать в виде

$$\hat{D}_1 = i\sigma^\mu (\partial_\mu - \frac{1}{2}\tilde{\omega}_\mu), \qquad /16\ /$$

где $\tilde{\omega}_\mu = \epsilon^a_\mu \omega_a$ - дуальная связность.

При лоренцевых вращениях имеем

$$\Lambda_\phi \omega_\mu = \partial_\mu \phi ,$$

$$\Lambda_\phi \psi = -\frac{\phi}{2}\sigma_5 \psi ,$$

а при конформных преобразованиях -

$$\Lambda_\sigma \omega_\mu = \epsilon^a_\mu \partial_a \sigma ,$$

$$\Lambda_\sigma \psi = -\frac{\sigma}{2}\psi .$$

Относительно этих преобразований действие /15/ остается инвариантным.

Однако можно определить другое преобразование полей ψ при конформных и лоренцевых преобразованиях:

$$\psi' = e^{-\frac{\phi}{2}\sigma_5} e^{-g\phi\sigma_5} \psi , \qquad /17/$$

$$\psi' = e^{-\frac{\sigma}{2}} e^{-ig\sigma} \psi , \qquad /17'/$$

где g - произвольное вещественное число.

Эти преобразования оставляют инвариантным действие

$$S = \int d^2 z\, h\, \psi^+ \hat{D}_2 \psi , \qquad /18/$$

где

$$\hat{D}_2 = i\sigma^{\mu}(\nabla_{\mu} - ig\tilde{\omega}_{\mu}) . \qquad /19/$$

Здесь $\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\omega}_{\mu}$ - ковариантная производная, согласованная с метрикой.

Локальной конформной и лоренцевой инвариантности соответствует выполнение соотношений

$$T^{a}_{\mu} h^{\mu}_{a} = 0, \qquad /20/$$

$$T^{a}_{\mu} \epsilon_{ab} h^{b\mu} = 0 , \qquad /21/$$

где $hT^{a}_{\mu} = \frac{\delta S}{\delta h^{\mu}_{a}}$ - метрический тензор энергии-импульса.

Инвариантность действий /15/ и /18/ относительно γ_5-преобразований $\delta\psi = i\alpha\sigma_5 \psi$ соответствует сохранению кирального тока

$$\nabla_{\mu} J^{\mu}_{5} = 0, \qquad J^{\mu}_{5} = \psi^{+} \sigma^{\mu} \sigma_5 \psi . \qquad /22/$$

Рассмотрим теперь квантовые теории, задаваемые действиями /15/ и /18/, и исследуем их на предмет появления квантовых аномалий. Напомним, что аномалия означает нарушение классических соотношений при квантовании.

Существует хорошо разработанная процедура вычисления аномалий, использующая вычисление коэффициентов Сили. Мы здесь не будем останавливаться на подробностях, отсылая читателя к специальной литературе [8,9].

Чтобы получить аномалии для оператора D, необходимо вычислить коэффициент Сили $b_0(X \mid D^2)$, который равен

$$b_0 (X \mid D^2) = -\frac{1}{4\pi}(Z + \frac{R}{6}) , \qquad /23/$$

где Z определяется из структуры квадрата оператора D:

$$D^+ D = -(\nabla_{\mu}\nabla^{\mu} + 2S^{\mu}\nabla_{\mu} + X) .$$

Здесь ∇_{μ} - риманова ковариантная производная. Тогда

$$Z = X - \nabla_\mu S^\mu - S_\mu S^\mu .$$

Квадрируя оператор D_1 /16/, получаем

$$\hat{D}_1^+ \hat{D}_1 = - \nabla_\mu \nabla^\mu + \frac{1}{4} R . \qquad /24/$$

Следовательно,

$$b_0 (X \mid \hat{D}_1^2) = \frac{1}{48\pi} R . \qquad /25/$$

После квадрирования оператора $\hat{D}_2$ имеем:

$$\hat{D}_2^+ \hat{D}_2 = -\nabla^\mu \nabla_\mu + \frac{1}{4} R + i g \nabla_\mu \tilde{\omega}^\mu + 2 i g \tilde{\omega}^\mu \nabla_\mu + + g^2 \tilde{\omega}_\mu \tilde{\omega}^\mu + \frac{i}{2} g \sigma_5 K . \qquad /26/$$

Следовательно,

$$b_0 (X \mid \hat{D}_2^2) = \frac{R}{48\pi} + \frac{ig}{8\pi} K \sigma_5 . \qquad /27/$$

Напомним, что индексом оператора D называется разность чисел нулевых мод операторов D и D^+ /предполагается, что D осуществляет отображение из пространства правых фермионов в пространство левых фермионов, а D^+ – наоборот/. Индекс оператора можно подсчитать по формуле: $\mathrm{index}\, D = \int [\hat{b}_0 (X \mid D^+ D) - b_0 (X \mid D D^+)] h d^2 z$. Как видно из /15/ и /27/, оператор $\hat{D}_1$ /16/ имеет нулевой индекс: $\mathrm{index}\, \hat{D}_1 = 0$, тогда как индекс обобщенного оператора Дирака $\hat{D}_2$ /19/ равен

$$\mathrm{index}\, \hat{D}_2 = \frac{g}{4\pi} \int K h d^2 z . \qquad /28/$$

Используя технику спектральной геометрии /8/, можно показать, что среднее дивергенции аксиального тока – это

$$\langle \nabla_\mu J_5^\mu \rangle = -2i\, \mathrm{Tr}\, [\sigma_5 b_0 (X \mid D^2)] .$$

Таким образом, для оператора Дирака /16/ аксиальная аномалия отсутствует:

$$\langle \nabla_\mu J_5^\mu \rangle = 0 ,$$

тогда как аксиальная аномалия в случае действия /18/ оказывается равной

$$\langle \nabla_\mu J_5^\mu \rangle = - \frac{g}{2\pi} K . \qquad /29/$$

Конформная симметрия на квантовом уровне также нарушается, что выражается в ненулевом следе тензора энергии-импульса:

$$< h^a_\mu T^\mu_a > = \mathrm{Tr}\, b_0\, (X | D^2) \qquad /30/$$

для комплексных фермионов и

$$< h^a_\mu T^\mu_a > = \mathrm{Tr}\, \frac{1}{2}\, (1 \pm i\sigma_5)\, b_0\, (X\, D^2) \qquad /31/$$

для киральных фермионов $\sigma_5\, \psi = \pm i \psi$. Для оператора $\hat{D}_1$ получаем

$$< h^a_\mu T^\mu_a > = \frac{R}{24\pi}$$

и

$$< h^a_\mu T^\mu_a > = \frac{R}{48\pi}$$

для киральных фермионов. Для оператора $\hat{D}_2$ имеем

$$< h^a_\mu T^\mu_a > = \frac{R}{24\pi}$$

и для киральных фермионов

$$< h^a_\mu T^\mu_a > = \frac{R}{48\pi} \pm \frac{g}{8\pi} K ,$$

где знак выбирается в зависимости от киральности рассматриваемых фермионов.

Анализ, который мы здесь опускаем, показывает, что в случае фермионов, описываемых действием /15/, лоренцева аномалия отсутствует, т.е. $< T^a_\mu \epsilon_{ab} h^{b\mu} > = 0$, независимо от того, киральны эти фермионы или нет. В то же время для фермионов, описываемых действием /18/, лоренцева аномалия имеется:

$$< T^a_\mu \epsilon_{ab}\, h^{b\mu} > = 4ig\, \mathrm{Tr}\, [\, \sigma_5\, b_0\, (X | D^2_2)\,] ,$$

откуда получаем

$$< T^a_\mu \epsilon_{ab}\, h^{b\mu} > = \frac{g^2}{\pi} K$$

и для киральных фермионов

$$< T^a_\mu \epsilon_{ab}\, h^{b\mu} > = \frac{g^2}{2\pi} K \pm \frac{gR}{12\pi} .$$

Таким образом, найденные нами ранее выражения действительно появляются в качестве аномалий в фермионных теориях.

7. СВЯЗЬ С ТОПОЛОГИЕЙ

Параллель между величиной K и скаляром кривизны R наталкивает на мысль связать с K некоторый топологический инвариант.

Напомним, что в двумерии имеется топологический инвариант, выражающийся через скаляр кривизны. Это характеристика Эйлера, которая для замкнутых многообразий выражается в виде

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int R h d^2 z$$

и оказывается равной

$$\chi = 2 - N_H - 2N_h ,$$

где N_h - число дыр, N_H - число ручек.

Достаточно очевидно, что величина

$$\epsilon = \frac{1}{4\pi} \int K h d^2 z \qquad /32/$$

также является топологическим инвариантом, т.е. не изменяется при локальных изменениях реперов /метрики/. На это же указывает и то обстоятельство, что через ϵ выражается индекс эллиптического оператора D_2 /28/.

В случае многообразия с границей выражения для характеристики Эйлера видоизменяется:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \left(\int_M R h d^2 z + \int_{\partial M} 2k \sqrt{\gamma}\, d\tau \right) , \qquad /33/$$

где $k = k_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu}$ - вторая фундаментальная форма границы, $k_{\mu\nu} = \nabla_\alpha n_\beta \gamma^\alpha_{(\mu} \gamma^\beta_{\nu)}$, где $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$, n^μ и t^μ - векторы нормали и касательной. Причем $t^\mu = \frac{dz^\mu}{d\tau}$, $n_\mu = \epsilon_{\mu\nu} t^\nu$. Оказывается, что $k = \nabla_\mu n^\mu$.

Интеграл от kdS можно разложить на часть, зависящую от метрики, и часть, не зависящую от метрики /"топологическую"/ /10/:

$$\sqrt{\gamma}\, k = \sqrt{\gamma}\, k_R + k_T .$$

В конформных координатах имеем: $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \delta_{\mu\nu}$, $n^\mu = \tilde{n}^\mu e^{-\sigma}$. Получаем $\nabla_\mu n^\mu = (\partial_\mu \tilde{n}^\mu + \partial_\mu \sigma \tilde{n}^\mu) e^{-\sigma}$. Следовательно, $\int_M R \sqrt{g}\, d^2 z$ и $\int_{\partial M} k_R \sqrt{\gamma}\, d\tau$ взаимно сокращаются, и получаем

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial M} 2k_T d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} \partial_\mu \tilde{n}^\mu d\tau . \qquad /34/$$

Для единичного диска $\chi = 1$.

Граничный член в /33/ подобран таким образом, чтобы компенсировать любые вариации метрики, в частности, конформные. Граничный член, который необходимо добавить в /32/, должен компенсировать как конформные, так и лоренцевы изменения репера. Можно показать, что выражение

$$\epsilon = \frac{1}{4\pi}\Big[\int_M K\sqrt{g}\,d^2z - 2\int_{\partial M} h^{\mu a}\epsilon_{ab}\nabla_\mu (h^b_\alpha n^\alpha)\sqrt{\gamma}\,d\tau + \qquad /35/$$

$$+ 2\int_{\partial M} \epsilon^{\mu\alpha}\nabla_\mu n_\alpha \sqrt{\gamma}\,d\tau\Big]$$

инвариантно при конформных и лоренцевых вариациях h^a_μ. Следует отметить, что граничные члены, подобные тому, который содержится в /35/, уже появлялись ранее при построении действия Эйнштейна - Гильберта для многообразий с границей в теории Эйнштейна - Картана /11/.

В конформно-лоренцевой калибровке

$$h^a_\mu = e^\sigma (\delta^a_\mu \cos\phi + \epsilon^a_\mu \sin\phi),$$

$$n^\mu = \tilde{n}^\mu e^{-\sigma}$$

получаем выражение

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial M} \partial_\mu \tilde{t}^\mu d\tau, \qquad /36/$$

которое аналогично выражению для χ /34/ с заменой нормали на касательный вектор.

Предположим теперь, что уравнение границы ∂M задано в виде

$$x = x(\phi), \quad y = y(\phi),$$

где ϕ изменяется от 0 до 2π. Тогда для компонент касательного вектора имеем:

$$\tilde{t}_x = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad \tilde{t}_y = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

и ϵ оказывается равным

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \ln\left|\frac{x'y'}{x'^2+y'^2}\right|. \qquad /37/$$

Из /37/ можно видеть, что ϵ нетривиально только для границы с особенностями, где x' и y' /или компоненты касательного вектора $\tilde{t}_x$ и $\tilde{t}_y$/ имеют разрыв. Если, к примеру, имеется сингулярность в точке $\phi = 0$, то

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\tilde{t}_x(2\pi)\ \tilde{t}_y(2\pi)}{\tilde{t}_x(0)\ \tilde{t}_y(0)} \right| .$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели действие для динамической гравитации в двумерии, используя ортонормированный базис h^a_μ. Это действие генерирует конформную аномалию R при конформных вариациях h^a_μ и лоренцеву аномалию К при лоренцевых вариациях. Мы объединили преобразования Лоренца и конформные преобразования и нашли выражения для соответствующих аномалий, используя метод спуска и предложенный нами метод подъема.

Показано, что полученные выражения действительно появляются в качестве аномалий в квантовых фермионных теориях. Параллель между скаляром кривизны R и скаляром K позволила нам связать с K новый топологический инвариант, аналогичный числу Эйлера, который нетривиален только для многообразий с сингулярностями на границе.

В заключение авторы выражают благодарность проф.Д.Д. Иваненко и Ю.Н.Обухову за большую помощь в получении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polyakov A.M. - Mod. Phys. Lett., 1987, A2, p.893.
2. Volovich I.V., Katanaev M.O. - Phys. Lett., 1986, B175, p.413.
3. Назаровский Е.А., Обухов Ю.Н. - ДАН СССР, 1987, 297, с.334.
4. Hwang S., Marnelius R. - Nucl. Phys., 1986, B271, p.369.
5. Wess J., Zumino B. - Phys. Lett., 1971, B37, p.95.
6. Zumino B., Wu T.-S., Zee A. - Nucl. Phys., 1984, B239, p.477.
7. Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н. - Геометродинамические методы и калибровочный подход в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1985.
8. Романов В.Н., Шварц А.С. - ТМФ, 1979, 41, с.190.
9. Obukhov Yu.N. - Nucl. Phys., 1983, B212, p.237.
10. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. - Ann.Phys. (N.Y.), 1982, 143, p.413.
11. Obukhov Yu.N. - Clas. Quant. Grav., 1988, 4, p.1085.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 1990 года.