сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-90-129

Р.М.Ямалеев

ВВЕДЕНИЕ В N-УНИТАРНУЮ ГРУППУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1990

ВВЕДЕНИЕ

Определение унитарной группы преобразований берет свое начало от преобразования поворота на евклидовой плоскости. Действительно, группа $SO(2)$, действующая на двумерном вещественном пространстве, изоморфна группе $U(1)$ - унитарной однопараметрической группе в пространстве комплексных чисел. Дальнейшее обобщение этих групп связано с увеличением числа измерений пространства: группа типа $SO(M)$ оставляет инвариантной длину M-мерного вещественного вектора, а группа типа $SU(M)$ - длину M-мерного комплексного вектора. В настоящей работе мы предлагаем обобщение $SO(2)$- и $U(1)$-групп на так называемые N-унитарные группы преобразований N-мерных вещественных векторов, оставляющие инвариантными однородные формы N-й степени специального вида.

Матрицы N-унитарных групп преобразований имеют экспоненциальное представление и в общем случае зависят от $N-1$ параметров. Элементы этих матриц аналогичны функциям косинуса-синуса, фигурирующим в матрицах группы $SO(2)$.

Если в основе теории унитарных групп лежит анализ комплексных чисел, то в основу теории N-унитарных преобразований закладывается анализ алгебры циклических чисел. Здесь вводятся также аналоги понятий аналитичности (N-аналитичность) и двумерного оператора Лапласа (N-лапласиан).

В [1] на основе 3-унитарных преобразований была предложена программа построения геометрии и квантовой механики с метрикой на кубических формах. Подобным способом можно построить геометрию и квантовую механику на формах степени N, применяя теорию N-унитарных преобразований.

Дальнейшее обобщение N-унитарных групп состоит в переходе к большему (чем N) числу измерений. Путь к реализации этой программы лежит через переход от алгебры циклических чисел к алгебре Диксона [2,3], а от нее - к алгебрам, обобщающим алгебру Клиффорда на функционалы N-й степени [4,5].

1. ОДНОРОДНЫЕ N-МЕРНЫЕ ЦИРКУЛЯНТНЫЕ N-ФОРМЫ

Циркулянт $CI(N)$ - матрица размерности $(N\times N)$, имеющая N независимых элементов c_0, c_1, ..., c_{N-1}, расположенных так, что k-я строка получается от первой строки путем циклической перестановки k-1 элементов строки. Таким образом, CI(N) имеет вид

$$CI(N): = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 \dots & c_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 \dots & c_0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Мы будем исследовать однородную N-форму $\mathcal{H}_N(c_0, c)$, составленную из компонент N-мерного вектора $\vec{C}(c_0, c_1, \dots c_{N-1})$, такую, что

$$\mathcal{H}_N(c_0, c): = \det(CI(N)). \tag{1.2}$$

Построенную таким способом N-форму будем называть циркулянтной.

Выпишем в качестве примера циркулянтную форму для $N=3$ и $N=4$:

$$\mathcal{H}_3(c_0, c) = c_0^3 + c_1^3 + c_2^3 - 3c_0c_1c_2,$$

$$\mathcal{H}_4(c_0, c) = -c_0^4 + c_1^4 - c_2^4 + c_3^4 + \tag{1.3}$$

$$+ 4c_0^2c_1c_3 - 4c_0c_1^2c_2 + 4c_2^2c_1c_3 - 4c_3^2c_0c_2 + 2c_0^2c_2^2 - 2c_1^2c_3^2.$$

Циркулянт (1.1) есть полином N-й степени от образующей матрицы α /6/ :

$$\alpha : = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^N = E,$$

$$CI(N) = c_0E + \sum_{n=1}^{N-1} c_n\alpha^n, \tag{1.4}$$

E - единичная матрица порядка N.

Поскольку $\alpha^N = E$, то собственными значениями α являются комплексные числа, равные корню N-й степени от единицы

$$\sqrt[N]{1}: = \exp(i2\pi k/N), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Обозначим через θ примитивный корень из единицы: $\theta = \exp(i2\pi/N)$. Тогда θ, θ^2, θ^3, ..., $\theta^N = 1$ являются собственными значениями матрицы α.

Зная собственные значения образующей матрицы, легко написать выражение для k-го собственного значения для $CI(N)$. Оно имеет вид

$$\lambda_k = c_0 + \sum_{n=1}^{N-1} c_n (\theta^k)^n . \tag{1.5}$$

Детерминант матрицы выражается через произведение собственных значений. Поэтому

$$\mathcal{H}_N(c_0, c) = \prod_{k=1}^{N} \lambda_k = \prod_{k=1}^{N} (c_0 + \sum_{n=1}^{N-1} c_n (\theta^k)^n) . \tag{1.6}$$

Приведем еще одно полезное выражение для $\mathcal{H}_N(c_0, c)$, полученное в /3/:

$$\mathcal{H}_N(c_0, c) = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{\substack{\lambda_0 + \ldots + \lambda_{N-1} = Nr \\ 0 \le \lambda_i \le N}} \theta^{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots (N-1)\lambda_{N-1}} \prod_{s=0}^{N-1} c_{N-1-\lambda_s} .$$

Циркулянтную N-форму мы предлагаем в качестве обобщения двумерной канонической квадратичной формы на формы N-й степени. Если, слепо следуя внешней аналогии, определить N-форму как сумму N-х степеней компонент M-мерного вектора, то обобщение станет невозможным. В этом случае мы потеряли бы главное - свойство инвариантности относительно линейных преобразований, обобщающих преобразования типа поворота.

2. АЛГЕБРА ЦИКЛИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Алгебра циклических чисел N-го порядка $Cic(N)$, на наш взгляд, является непосредственным обобщением комплексных чисел. Единственное, что при этом оказывается потерянным, так это право называться "полем чисел" в силу отсутствия тех же свойств деления, которые мы наблюдаем у комплексных чисел. Однако для построения геометрии и квантовой механики на N-формах, где циклические числа будут выполнять роль, аналогичную роли комплексных чисел в традиционных теориях, это "право" не будет иметь какого-либо значения.

В качестве базисных единиц алгебры выступают степени θ, где $\theta^N = e$, e - единица алгебры. Циклическое число в этом базисе имеет вид полинома от θ:

$$Z = a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n \theta^n, \tag{2.1}$$

$a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ - вещественные числа.

Утверждение 1

Если $X(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}), Y(y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathrm{Cic}(N)$, то $XY \in \mathrm{Cic}(N)$, а компоненты $Z = XY$ будут выражаться формулами

$$z_0 = x_0 y_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (x_n y_{N-n} + y_n x_{N-n}),$$

$$z_n = x_0 y_n + y_0 x_n + \sum_{m,k}^{N-1} d_n^{m,k} x_m y_k, \tag{2.2}$$

где

$d_n^{mk} = 1$, если $m + k = n$ или $m + k = n + N$,

$d_n^{mk} = 0$ - в остальных случаях

Формулы (2.2) получаются при перемножении выражений в двух скобках

$$(x_0 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \theta^n)(y_0 + \sum_{n=1}^{N-1} y_n \theta^n) = z_0 + \sum_{n=1}^{N-1} z_n \theta^n$$

и приравнивании выражений при одинаковых степенях θ. Учитывая, что $\theta^n \theta^{N-n} = 1$, получим выражение для z_0, а имея в виду, что

$\theta^m \theta^k = \theta^n$, если $k + m = n$ или $k + m = n + N$,

$(m + k) < N$,

получим выражение для z_n.

Алгебраические свойства циклических чисел хорошо известны [7]. Мы здесь остановимся более подробно на свойствах умножения, деления и определения модуля этих чисел. Для нас также весьма важно то, что они имеют экспоненциальное представление.

Для краткости в дальнейшем циклические числа мы будем называть *Ц*-числами.

Свойство 1°. Если Z_1 и $Z_2 \in \mathrm{Cic}(N)$, то $Z_3 = Z_1 + Z_2 \in \mathrm{Cic}(N)$.

Свойство 2°. Если X и $Y \in \mathrm{Cic}(N)$, то $Z = XY \in \mathrm{Cic}(N)$. Это умножение ассоциативно и коммутативно.

Замечание 1.

Из условия $\alpha = E$ следует, что матрицы $\{\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{N-1}, E\}$ также могут служить в качестве базиса *Ц*-чисел. Поэтому в этом базисе произведение $Z = XY$ может быть раскрыто так:

$$(z_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n z_n) = (x_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n x_n)(y_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n y_n). \tag{2.3}$$

Здесь фактически мы имеем произведение двух циркулянтов: $\hat{Z} = \hat{X}\hat{Y}$.

Таким образом, каждый столбец циркулянта $\hat{Y}$ переводится в соответствующий столбец циркулянта $\hat{Z}$. Столбцы циркулянта состоят из компонент соответствующих *Ц*-чисел.

Определение.

Ц-число $Z(z_0, z_1, \ldots, z_{N-1})$ называется нулевым, если $z_0 = 0$, $z_1 = 0, \ldots, z_{N-1} = 0$.

Утверждение 2.

Пусть $Z \neq 0$. Тогда для определения Y из равенства $Z = XY$ достаточно, чтобы $\det(X) \neq 0$.

Согласно Замечанию 1 $Z = XY$ можно представить в виде $\hat{Z} = \hat{X}\hat{Y}$. Откуда следует, что $\hat{Y} = \hat{X}^{-1} Z$. Но для существования обратной матрицы $\hat{X}^{-1}$ достаточно выполнения условия $\det(\hat{X}) = 0$. Если X и Z - циркулянты, то X^{-1} и Y - также циркулянты. Следовательно, Y - *Ц*-число.

Замечание 2. Уравнение $Z = XY$ имеет смысл и при $\det(\hat{X}) = 0$, если $Z = 0$. Так что $Y = 0/X$ следует понимать как решение уравнения $\hat{X}\hat{Y} = 0$, $\det\hat{X} = 0$.

Определение.

Пусть *Ц*-числу Z сопоставлен циркулянт $\hat{Z}$. Величину $|Z| = \det(\hat{Z})$ будем называть модулем *Ц*-числа Z.

Определение.

Пусть $Z(\theta^k)$, $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ *Ц*-число, определенное в базисе $\{\theta^k, (\theta^k)^2, (\theta^k)^3, \ldots, (\theta^k)^{N-1}, 1\}$:

$$Z(\theta^k) := z_0 + \sum_{n=1}^{N-1} z_n (\theta^k)^n .$$

Ц-числа $Z(1)$, $Z(\theta)$, $Z(\theta^2)$, ..., $Z(\theta^{N-1})$ будем называть взаимосопряженными *Ц*-числами.

Свойство 3°.

Если $Z = XY$, то

$|Z| = |X||Y|$.

Замечание 3.

Имеется одно существенное отличие между двумя случаями, когда N-четное и когда N - нечетное натуральное число. Заключается оно в следующем. Пусть $\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{N-1}\}$ - полный базис алгебры Cic(N). Тогда если N - нечетное, то базис $\{1, \theta^k, (\theta^k)^2, \dots, (\theta^k)^{N-1}\}$ $(0 < k < N)$ есть также полный базис алгебры Cic(N). Для четного N это утверждение не имеет силы.

Утверждение 3.

Модуль *Ц*-числа Z равен

$$|Z| = \prod_{k=0}^{N-1} Z(\theta^k) . \tag{2.4}$$

Это равенство следует из определения $|Z| = \det(\hat{Z})$ и из равенства (1.6).

Определение.

Ц-число η называется единичным, если $|\eta| = 1$.

Утверждение 4.

Если для функции $f(x)$ имеет смысл разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$, то выражение $f(\theta)$ также имеет смысл, причем

$$f(\theta) = F_0 + \sum_{n=1}^{N-1} F_n \theta^n . \tag{2.5}$$

Подставим θ вместо x в представлении $f(x)$ в виде ряда Тейлора. Получим

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k}\right)_{x=0} \theta^k . \tag{2.6}$$

Поскольку $\theta^N = 1$, то $\theta^{\ell N+m} = \theta^m$, $m < N$. Но любое натуральное k может быть представлено в виде $k = \ell N + m$, $m < N$. Объединяя в (2.6) выражения при одинаковых степенях θ, получим (2.5), где

$$F_0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^{\ell N} f(x)}{\partial x^{\ell N}}\right)_{x=0},$$

$$F_m = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^{\ell N+m} f(x)}{\partial x^{\ell N+m}}\right)_{x=0}, \qquad (2.7)$$

$m = 1, 2, \dots, N-1$.

В дальнейшем мы широко будем использовать экспоненциальные функции следующего вида:

$$\exp(\theta\phi) = g_0(\phi, 0, \dots, 0) + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n g_n(\phi, 0, \dots, 0),$$

$$\exp(\theta^k\phi) = g_0(\overbrace{0, \dots, \phi}^{k}, \dots, 0) + \sum_{n=1}^{N-1} (\theta^k)^n g_n(\overbrace{0, \dots, \phi}^{k}, \dots, 0),$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{N-1} \theta^k \phi_k\right) = g_0(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \theta^k g_k(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1}).$$

Ясно, что *Ц*-числа $\exp(\theta^k\phi)$, $\exp\left(\sum_{k=1}^{N-1} \theta^k\phi_k\right)$ являются единичными *Ц*-числами.

Лемма 1.

Пусть η - единичное *Ц*-число. Тогда функция $\ln(\eta)$ есть *Ц*-число без единицы.

Разлагая $\ln(\eta) = \ln\left(\eta_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \eta_n\right)$ по θ в ряд Тейлора, получим

$$\ln\left(\eta_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \eta_n\right) = \phi_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \phi_n.$$

Но $\exp(\ln \eta) = \exp \phi_0 \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \phi_n\right) = \eta$. Поскольку η - единичное

$\mathcal{U}$-число, то $\exp\phi_0 = 1$. В силу вещественности компонент η, ϕ отсюда имеем $\phi_0 = 0$.

Весьма важным свойством единичного комплексного числа является возможность представления его в виде экспоненты. Покажем, что единичное $\mathcal{U}$-число также представимо в виде экспоненты.

Утверждение 5.

Для единичного $\mathcal{U}$-числа η имеет место следующее представление

$$\eta = \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \phi_n\right). \tag{2.9}$$

Пусть η имеет вид

$$\eta := \eta_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \eta_n \theta^n .$$

Из определения η имеем $|\eta| = \det(\hat{\eta}) = 1$, т.е. $\mathcal{H}_N(\eta_0, \eta) = 1$. Следовательно, компоненты η могут быть выражены через N-1 независимых параметров.

Выбирая эту параметризацию в виде

$$\begin{aligned}
&\eta_0 = g_0(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1}), \\
&\eta_n = g_n(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1}), \\
&n = 1, 2, \dots, N-1,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

получим представление (2.9). Теперь, чтобы быть уверенными, что такая параметризация для заданных η_0, η_n действительно возможна, необходимо иметь формулу, определяющую параметры ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_{N-1} через η_0, η_n. Эти параметры можно определить из равенства

$$\sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \phi_n = \ln\left(\eta_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \eta_n \theta^n\right).$$

Согласно Лемме 1 и формуле (2.7) получим

$$\phi_n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^{\ell N+n}}{\partial x^{\ell N+n}} \ln\left(\eta_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \eta_n x^n\right)\right)_{x=0}. \tag{2.11}$$

Таким образом, параметризация (2.10) возможна, а η представимо в виде (2.9).

В заключение этого раздела укажем еще на одну возможную параметризацию единичного *Ц*-числа. Обозначим через β *Ц*-число с компонентами.

Нетрудно убедиться в том, что *Ц*-число β с компонентами

$$\eta_0 := 1/(\mathcal{H}_N(1,\beta))^{1/N}, \quad \eta_n = \beta_n/(\mathcal{H}_N(1,\beta))^{1/N}, \tag{2.12}$$

есть единичное *Ц*-число. Здесь обратное преобразование имеет простой вид

$$\beta_n = \eta_n/\eta_0, \quad n = 1,2,\dots,N-1.$$

Для "экспоненты", определенной через "β"-параметризацию

$$\mathrm{Exp}(\theta\beta) := \eta_0(\beta) + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \eta_n(\beta), \tag{2.13}$$

можно вывести формулу сложения параметров при умножении "экспонент"

$$\mathrm{Exp}(\theta\beta)\,\mathrm{Exp}(\theta\gamma) = \mathrm{Exp}(\theta\delta). \tag{2.14}$$

Утверждение 6.

N-1 компонент *Ц*-числа $\delta(1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1})$ в формуле (2.14) определяются с помощью следующих выражений:

$$\delta_n = (\beta_n + \gamma_n + \sum_{m,k}^{N-1} d_n^{mk} \beta_m \gamma_k)/\xi,$$
$$\xi = 1 + \sum_{m=1}^{N-1} (\beta_m \gamma_{N-m} + \gamma_m \beta_{N-m}). \tag{2.15}$$

Символ d_n^{mk} определен в (2.2).

Чтобы получить (2.15), достаточно перемножить два *Ц*-числа

$$\mathrm{Exp}(\theta\beta) = (1 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \beta_n)/(\mathcal{H}_N(1,\beta))^{1/N},$$

$$\mathrm{Exp}(\theta\gamma) = (1 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \gamma_n)/(\mathcal{H}_N(1,\gamma))^{1/N}.$$

Согласно (2.2) получим

$$(1+\sum_{n=1}^{N-1}\theta^n\beta_n)(1+\sum_{n=1}^{N-1}\theta^n\gamma_n)=(r_0+\sum_{n=1}^{N-1}\theta^n r_n),$$

$$r_0=(1+\sum_{n=1}^{N-1}(\beta_n\gamma_{N-n}+\gamma_n\beta_{N-n})), \tag{2.16}$$

$$r_n=\beta_n+\gamma_n+\sum_{m,k}^{N-1}d_n^{mk}\beta_m\gamma_k.$$

Из свойств циркулянтов имеем

$$\mathcal{H}_N(1,\beta)\,\mathcal{H}_N(1,\gamma)=\mathcal{H}_N(r_0,r).$$

Таким образом,

$$\mathrm{Exp}(\theta\beta)\,\mathrm{Exp}(\theta\gamma)=(r_0+\sum_{n=1}^{N-1}\theta^n r_n)/(\mathcal{H}_N(r_0,r))^{1/N}=$$

$$=(1+\sum_{n=1}^{N-1}\theta^n\delta_n)/(\mathcal{H}_N(1,\delta))^{1/N},$$

где $\delta_n=r_n/r_0$. Подставляя сюда r_0 и r_n из (2.16), получим (2.15).

Замечание 4.

Функция $\mathrm{Exp}(\theta\beta)$ обобщает комплексную функцию вида

$$\mathrm{Exp}(i\beta)=(1+i\beta)/(1+\beta^2)^{1/2},$$

а формулы "сложения" (2.15) являются непосредственным обобщением известной формулы

$$\mathrm{Exp}(i\beta)\,\mathrm{Exp}(i\gamma)=\mathrm{Exp}(i\delta),$$

$$\delta=\frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma}. \tag{2.17}$$

3. N-УНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ N-МЕРНОГО ВЕКТОРА

Поставим в соответствие N-мерному вектору $\vec{C}(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ циркулянтную N-форму $\mathcal{H}_N(c_0, c)$ и будем рассматривать такие линейные преобразования вектора $\vec{c}$, которые оставляют неизменной форму $\mathcal{H}_N(c_0, c)$:

$$(c_0', c') = U(c_0, c), \quad \mathcal{H}_N(U(c_0, c)) = \mathcal{H}_N(c_0, c).$$

Утверждение 7.

Пусть $C(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ есть $\mathcal{U}$-число, η - единичное $\mathcal{U}$-число. Преобразование

$$C' = \eta C \tag{3.1}$$

не меняет $\mathcal{H}_N(c_0, c)$.

Поскольку $|\eta| = 1$, то $|C'| = |\eta C| = |\eta||C| = |C|$. Но $|C| = \mathcal{H}_N(c_0, c)$. Поэтому

$$|C| = \mathcal{H}_N(c_0, c) = |C'| = \mathcal{H}_N(c_0', c').$$

Пользуясь Замечанием 3, (3.1) перепишем:

$$(c_0' + \sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n c_n') = (\eta_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \eta_n \alpha^n)(c_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n c_n).$$

Свойства циркулянтов и экспоненциальное представление η позволяют записать (3.2) также в следующем виде:

$$c_\ell' = \sum_{k=0}^{N-1} (g_0 + \sum_{n=1}^{N-1} g_n \alpha^n)_{\ell k} \, c_k, \quad \ell = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3.3}$$

Таким образом, матрица $U := g_0 + \sum_{n=1}^{N-1} g_n \alpha^n$ есть тот самый линейный оператор, действие которого на N-мерный вектор не меняет N-форму $\mathcal{H}_N(c_0, c)$.

Определение.

Матрицы, представимые в виде $\exp(\sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n \phi_n)$, где $\alpha^N = E$, будем называть N-унитарными матрицами.

Определение.

Преобразования, осуществляемые N-унитарными матрицами, будем называть N-унитарной группой преобразований.

Действительно, несложно убедиться в том, что преобразования (3.3) обладают свойствами абелевой группы. Матрица преобразования

$$U := \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n \phi_n\right) \tag{3.4}$$

зависит от N-1 параметров.

Утверждение 8.

Матрица

$$U^{-1} = \prod_{k=1}^{N-1} \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} (\alpha\theta^k)^n \phi_n\right) \tag{3.5}$$

является обратной по отношению к матрице U.

Действительно, умножая U на U^{-1}, получим

$$UU^{-1} = \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} (\alpha\theta^k)^n \phi_n\right) \prod_{k=1}^{N-1} \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} (\alpha\theta^k)^n \phi_n\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n \phi_n \left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} (\theta^n)^k\right]\right).$$

Выражение в квадратных скобках есть сумма корней уравнения $x^N - 1 = 0$, по теореме Виетта она равна нулю. Поэтому

$$UU^{-1} = E.$$

Замечание 5.

Обозначим через U^{θ_k} матрицу вида

$$U^{\theta_k} = \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} (\alpha\theta^k)^n \phi_n\right).$$

Тогда

$$U^{-1} = U^{\theta} U^{\theta_2} \dots U^{\theta_{N-1}}.$$

4. СВОЙСТВА g-ФУНКЦИИ

Под g-функциями мы подразумеваем функции $g_0, g_1, \dots, g_{N-1}$, введенные в разделе 2. Как уже было подчеркнуто выше, они являются аналогами тригонометрических функций. Более точно, g_0

аналогична $\cos\phi$, а $g_1, \ldots, g_{N-1}$ аналогичны $\sin\phi$, причем

$$g_0(0) = 1, \quad g_n(0) = 0, \quad n = 1, \ldots, N-1.$$

Соответственно, функции

$$tg_n(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{N-1}) = g_n / g_0$$

являются аналогом $tg\,\phi = \sin\phi / \cos\phi$. Формулы сложения (2.15), если

$$\beta_n = tg_n(\phi_1, \ldots, \phi_{N-1}), \quad \gamma_n = tg_n(f_1, \ldots, f_{N-1}),$$

$$\delta_n = tg_n(f_1 + \phi_1, \ldots, \phi_{N-1} + f_{N-1}),$$

есть, фактически, формулы сложения для тангенсов.

Формулы сложения для g-функции мы получим из (2.2), если положить

$$x_k = g_k(\phi_1, \ldots), \quad y_k = g_k(f_1, \ldots),$$

$$z_k = g_k(\phi_1 + f_1, \ldots), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Формулы для производных g-функции нетрудно получить, используя выражения (2.8). С этой целью продифференцируем (2.8) по ϕ_k:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\phi_k}\left(g_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n g_n\right) &= \theta^k \left(g_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n g_n\right) = \\ &= g_{N-k} + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n g_{\ell N + n - k}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях θ, получим

$$\frac{\partial}{\partial\phi_k} g_0 = g_{N-k}, \qquad \ell = \begin{cases} 0 & (n \geq k), \\ 1 & (n < k), \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_k} g_n = g_{\ell N + n - k}.$$

5. АНАЛОГИ УСЛОВИЙ КОШИ - РИМАНА И ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Если мы рассматриваем функции от *Ц*-чисел и анализ на базе этих функций,то возникает необходимость определения условий, аналогичных условиям аналитичности для комплексных чисел.

Пусть f есть *Ц*-число:

$$f := f_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n f_n ,$$

зависящее от *Ц*-числа

$$Z(\theta) := z_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n z_n .$$

При этом условие (которое мы будем называть N-аналитичностью), аналогичное условию Коши - Римана, возникает как условие независимости f(z) от $Z(\theta^k)$, где $k \neq 0$.

Таким образом, если $f = f(Z)$ и N-аналитична, то

$$\frac{\partial}{\partial Z(\theta^k)} f(Z) = 0. \qquad (5.1)$$

Оператор $\partial/\partial Z(\theta^k)$ есть *Ц*-число вида

$$\partial/\partial Z(\theta^k) = \partial/\partial z_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (\theta^{-k})^n \partial/\partial z_n .$$

Но $\theta^{-k} = \theta^{N-k}$. Поэтому, обозначив $p = N-k$, перепишем условие (5.1) так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0} + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^{pn} \frac{\partial}{\partial z_n}\right)\left(f_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^n f_n\right) = 0.$$

Это и есть условие, обобщающее условие Коши - Римана.

Аналог оператора Лапласа естественно определять как дифференциальный оператор N-й степени, зависящий от N-переменных, имеющий вид циркулянтной N-формы:

$$D(N) := \mathcal{K}_N\left(\frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial z_0} + \sum_{n=1}^{N-1} (\theta^k)^n \frac{\partial}{\partial z_n} \right). \qquad (5.2)$$

Из условия (5.1) вытекает, что если $f(z)$ N- аналитична, то

$$\mathcal{H}_N \left(\frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f(z) = 0. \qquad (5.3)$$

Оператор (5.2) записан как бы в "декартовых" координатах. Введем аналоги сферических координат следующим способом:

$$\begin{aligned} &z_0 = r g_0 (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{N-1}), \\ &z_n = r g_n (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{N-1}), \\ &n = 1, 2, \ldots, N-1. \\ &r = (\mathcal{H}_N (z_0, z))^{1/N}. \end{aligned} \qquad (5.4)$$

Найдем выражения для производных в новой системе координат

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \qquad (5.5)$$

где $\xi_0 = r$, $\xi_n = r\phi_n$, $n = 1, \ldots, N-1$.

Мы здесь без доказательства приведем следующее Утверждение: Матрица преобразования в (5.5) имеет вид

$$\partial \xi_j / \partial z_i = \left[\exp \left(-\sum_{n=1}^{N-1} a^n \phi_n \right) \right]_{ji}, \qquad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.2), получим оператор $D(N)$ в "N-сферических" координатах. Теперь нетрудно найти одно из решений (5.3) в этих координатах. Оно имеет вид

$$f(Z) = \exp \left(\sum_{n=1}^{N-1} \theta^n \phi_n \right) \ln r,$$

что аналогично решению уравнения Пуассона на двумерной плоскости [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ямалеев Р.М. - Сообщение ОИЯИ, Р2-88-147, Дубна, 1988; Сообщение ОИЯИ, Р2-89-269, Дубна, 1989; В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ № 1(34)-1989; Дубна, 1989, с.42. JINR Preprint, E2-89-326, Dubna, 1989.
2. Dicson L.E. - Algebren und ihre Zahlensysteme. Zurich-Leipzig, 1927.
3. Семерджиев Х.И., Ямалеев Р.М. - Сообщение ОИЯИ, Р2-88-834, Дубна, 1988;
   - Докл. Болгарской АН т.42, № 8, 1989;
   - Докл. Болгарской АН т.42, № 7, 1989.
4. Ямалеев Р.М. - Сообщение ОИЯИ, Р5-87-766, Дубна, 1987.
5. Rausch de Traubenberg M., Fleuri N., CKN/HE 88-04, Strasbourg, 1988.
6. Ланкастер П. - Теория матриц. М.: Наука, 1978.
7. Пирс Р. - Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 февраля 1990 года.