ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8966

В.П.Гердт, В.И.Иноземцев, В.А.Мещеряков

УНИФОРМИЗАЦИЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

1975

Р2 - 8966

В.П.Гердт, В.И.Иноземцев, В.А.Мещеряков

УНИФОРМИЗАЦИЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в ЯФ

1. Введение

Появление новых экспериментальных данных [1-8] по полным сечениям pp-, $\bar{p}p$-, $\pi^{\pm}p$- и $K^{\pm}p$-процессов при высоких энергиях вызвало большой интерес. Оно стимулировало ряд исследований, основанных как на модельных представлениях [9], так и на анализе общих аналитических свойств. К числу последних относятся попытки упрощения техники дисперсионных соотношений за счет замены дисперсионных интегралов дифференциальными операторами [10]. Такой подход вызывает ряд возражений [11], однако он имеет и определенные достоинства, которые заставляют проанализировать его более подробно.

2. Выбор униформизующей переменной

Рассмотрим для определенности процессы упругого $\pi^{\pm}p$-рассеяния вперед. Аналитические свойства амплитуды пион-нуклонного рассеяния по энергии при фиксированном значении переданного импульса впервые были строго доказаны Н.Н.Боголюбовым и хорошо известны [12] (рис. 1). Обозначим через $f_{\pm}$ амплитуды, обладающие определенными свойствами четности при замене $s \rightleftarrows u$ [x]

$$f_{\pm}(\nu) = \pm f_{\pm}(-\nu) \qquad (1)$$

и нормированные условием

$$\operatorname{Im} f_{\pm}(\nu) = p_L \left[\sigma_{tot}(\pi^- p) \pm \sigma_{tot}(\pi^+ p) \right]. \qquad (2)$$

Здесь $\nu = (s-u)/4M$, M – масса протона, p_L – лабораторный импульс налетающей частицы (пиона), массу μ которой в дальнейшем примем равной единице, т.е.

$$p_L = \sqrt{\nu^2 - 1}. \qquad (3)$$

---

x/ s и u – обычные мандельстамовские переменные.

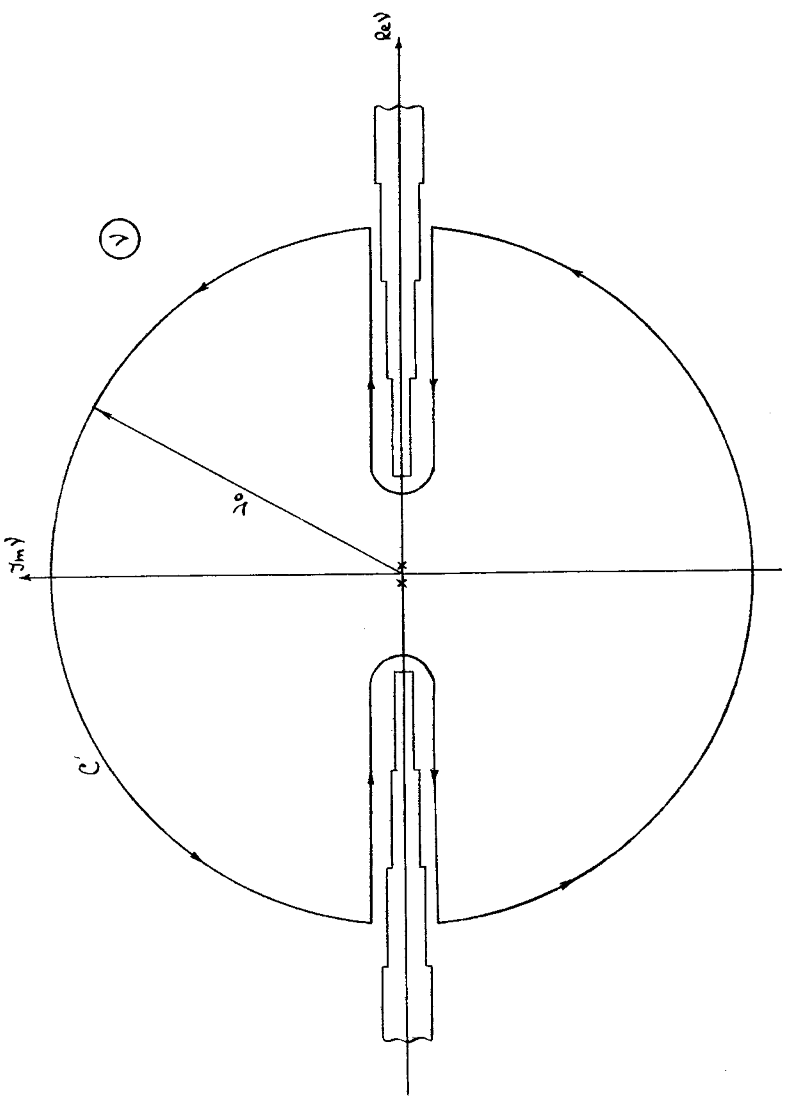


Рис.I

Функции $f_\pm(\nu)$ имеют следующие свойства вещественности по ν :

$$f_\pm^*(\nu) = f_\pm(\nu^*) \quad . \tag{4}$$

Структура разреза в плоскости ν такова, что на ней лежит бесконечное число точек ветвления. Например, они расположены в точках $s=(M+n)^2$ и $u=(M-n)^2$, $n=1,2,\ldots$. Известно, что на порогах упругих процессов амплитуды рассеяния имеют алгебраические точки ветвления первого порядка. Если пренебречь неупругими процессами, то риманова поверхность амплитуды рассеяния двулистна и простейшей униформизующей переменной является импульс в системе центра масс q . Примеры использования этого факта многочисленны. Одним из последних можно считать формулы для S- и P- волн $\pi\pi$ -рассеяния :

$$\frac{q}{\mu}\,ctg\,\delta_0^0 = \frac{1}{a_0^0} - \frac{1}{2} r_0 q^2 ,$$

$$\frac{q^3}{q^2+\mu^2}\,\frac{s_0}{q_0}\,ctg\,\delta_1^1 = \frac{s_0 - s}{r_0\sqrt{s_0}} ,$$

которые хорошо аппроксимируют экспериментальные данные до энергии $s \approx 0{,}8$ ГэВ^2/I3/.

Ранее двулистная риманова поверхность с успехом применялась для описания полных сечений $\pi^\pm p$ - рассеяния в широком интервале энергий от порога до нескольких ГэВ/I4/. Было обнаружено, что неупругие пороги, по-видимому, приводят к локальным эффектам в энергетической зависимости полных сечений, которыми в первом приближении разумно пренебречь. Однако с ростом энергии число каналов, а следовательно, и точек ветвления возрастает (при $P_L \sim$ I00 ГэВ/с число порогов в s -канале за счет рождения пионов $\sim$ I0^2). Поэтому важно учесть это обстоятельство. Оно приводит, в частности, к тому, что структура римановой поверхности усложняется. Если допустить, что все точки ветвления имеют один и тот же характер, то в бесконечно удаленной точке римановой поверхности будет бесконечное число листов[x/]. Эта новая черта римановой поверхности не учтена в униформизующей переменной q, в силу чего последняя должна быть заменена на новую переменную.

В качестве такой переменной предлагается выбрать переменную

$$w(\nu) = \frac{1}{\pi}\arcsin\nu = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\ln\left(\nu + \sqrt{\nu^2-1}\right). \qquad (5)$$

Функция $w(\nu)$ обладает алгебраическими точками ветвления при $\nu = \pm I$ и логарифмической точкой ветвления на бесконечности. Конечно, с помощью переменной w столь же трудно передать локальные пороговые эффекты, как и с помощью переменной q. Однако при высоких энергиях новая переменная учитывает сложный характер римановой поверхности, что отражено в ее асимптотике

$$w(\nu) = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\ln(2\nu), \qquad \nu \gg 1. \qquad (6)$$

Другой особенностью переменной w является то, что она выбирает в качестве масштаба по s квадрат суммы масс покоя сталкивающихся частиц, т.е. величину, зависящую от изучаемой реакции.

---

x/ Иначе говоря, бесконечно удаленная точка-существенно особая, ибо она предельная точка особых точек.

Наконец, переменная $w(\nu)$ является нечетной вещественной функцией ν, что позволяет легко переформулировать условия (I) и (4).

После всего сказанного естественно предположить, что амплитуда упругого процесса униформизуется переменной $w(\nu)$. Другими словами, в переменной $w(\nu)$ амплитуда рассеяния имеет только полюса, т.е. является мероморфной функцией.

Принятая нами гипотеза об униформизующей переменной не зависит от наличия у изучаемого процесса ненаблюдаемой области и позволяет рассматривать амплитуду рассеяния при высоких энергиях без дополнительных предположений о способах ее вычисления. Вся риманова поверхность амплитуды рассеяния как функции ν отображается на плоскость w в виде системы полос единичной ширины (рис.2). Физический лист переходит в полосу

$$-1 \le w + w^* \le 1. \qquad (7)$$

Знаки равенства определяют линии - образы правого и левого разрезов физического листа.

Для дальнейшего удобно перейти к функциям $F_\pm$, связанным с амплитудами $f_\pm$ соотношением[x/]

$$F_\pm = f_\pm / P_L. \qquad (8)$$

Поскольку в соответствии с (3) и определением переменной $w(\nu)$ (5)

$$P_L = i\cos\pi w,$$

то из (I) и (4) найдем следующие свойства функций $F_\pm(w)$:

$$F_\pm(w) = \pm F_\pm(-w), \qquad (9)$$

$$F_\pm^*(w) = -F_\pm(w^*). \qquad (10)$$

---

x/ Переход от $f_\pm$ к функциям $F_\pm$ приводит к появлению у последних полюсов на действительной оси w-плоскости, однако для дальнейшего это не существенно.

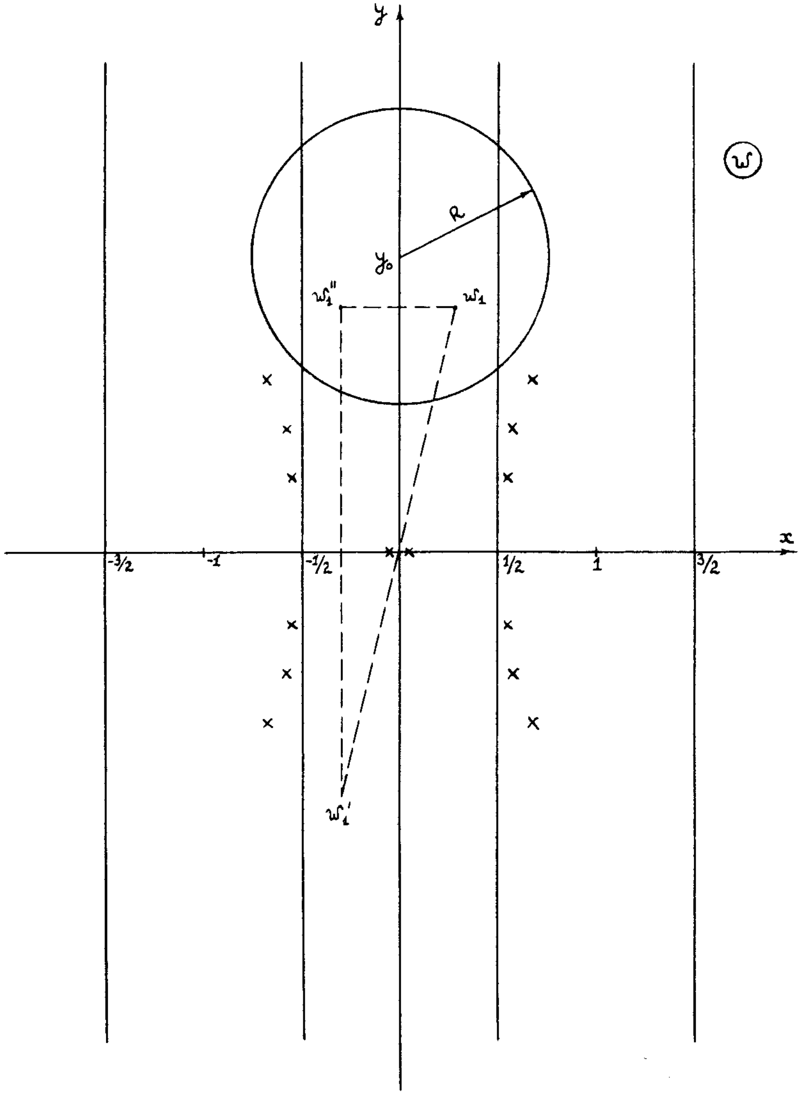


Рис.2

Соотношение (9) устанавливает связь между значениями функций $F_\pm$ в точках w_1 и w_1' (рис. 2), в то время как (I0) устанавливает соответствие между точками w_1' и w_1''. Таким образом, посредством соотношений (9) и (I0) можно выразить $F(w_1'')$ через $F(w_1)$. В результате найдем

$$F_\pm^*(w) = \mp F_\pm(w-2x), \qquad w = x+iy. \tag{II}$$

Покажем, что дисперсионные соотношения в дифференциальной форме/I0/ формально следуют из (II). С этой целью, воспользовавшись равенством

$$F_\pm(w-2x) = e^{-2x\frac{d}{dw}} F_\pm(w),$$

получим

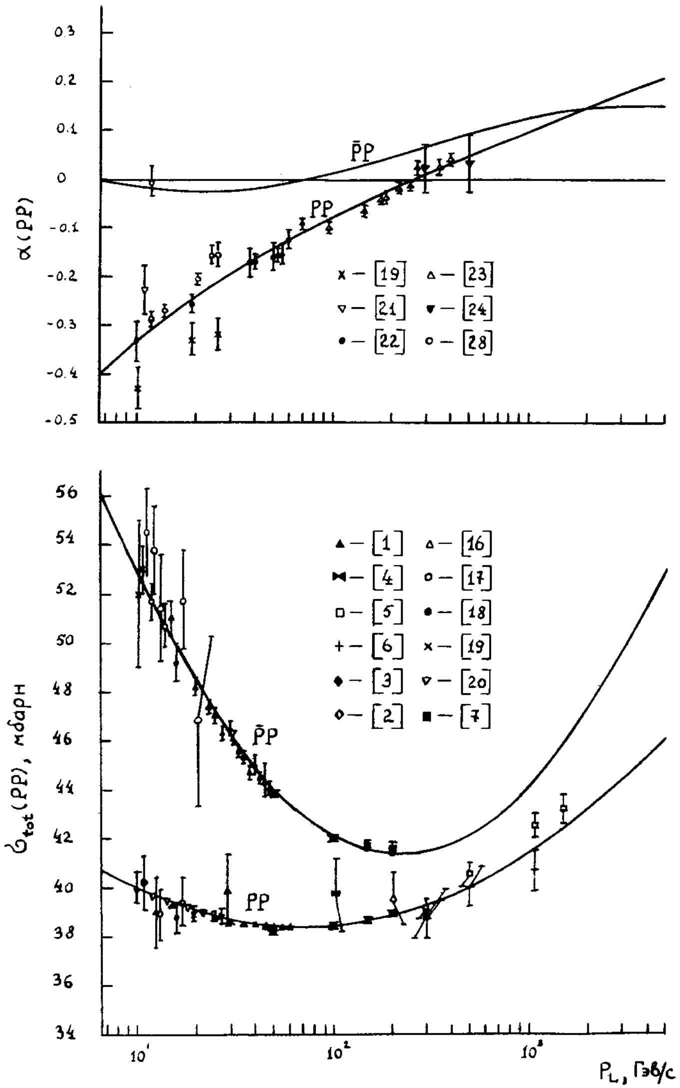
$$F_\pm^*(w) = \mp e^{-2x\frac{d}{dw}} F_\pm(w). \tag{I2}$$

Замена в уравнении (I2) $\frac{d}{dw} \to -i\frac{\partial}{\partial y}$ и выделение из обеих частей действительной и мнимой части после простых преобразований приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, F_+ &= \mathrm{tg}\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathrm{Im}\, F_+, \\ \mathrm{Im}\, F_- &= -\mathrm{tg}\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathrm{Re}\, F_-. \end{aligned} \tag{I3}$$

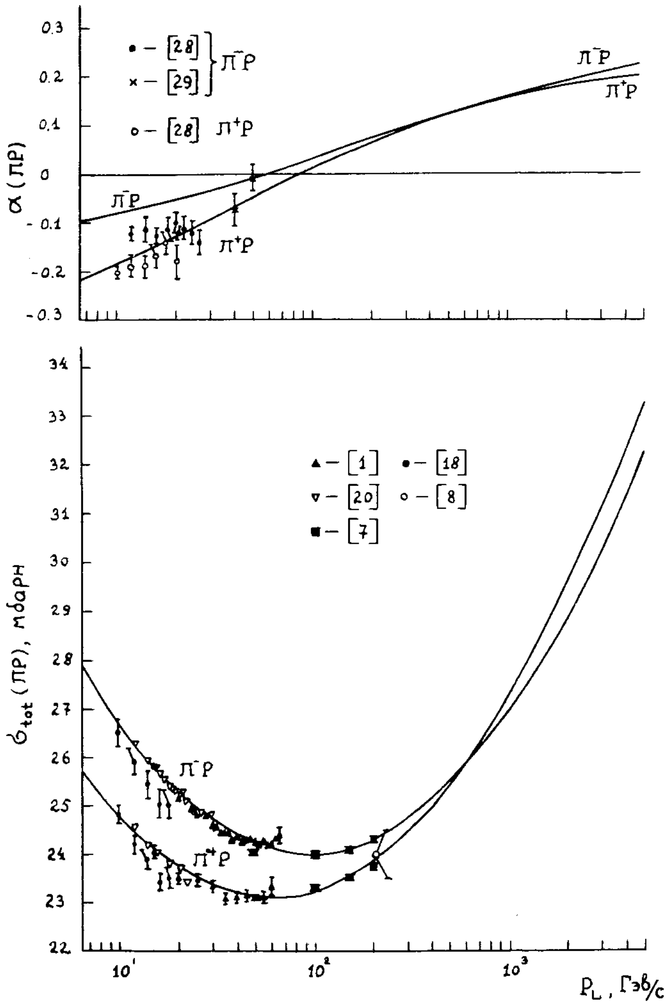
Рассматривая выражение (I3) на верхнем берегу правого разреза (рис.I), где согласно (6) $x = 1/2$ и $y = \ln(2\nu)/\pi$ $(\nu \gg 1)$, получим равенства

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, F_+(\nu) &= \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{d}{d\ln\nu}\right)\mathrm{Im}\, F_+(\nu), \\ \mathrm{Im}\, F_-(\nu) &= -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{d}{d\ln\nu}\right)\mathrm{Re}\, F_-(\nu), \end{aligned} \tag{I4}$$



α (PP)
P̄P
PP
× — [19]
▽ — [21]
• — [22]
△ — [23]
▼ — [24]
○ — [28]
σ_tot (PP), мбарн
▲ — [1]
⧓ — [4]
□ — [5]
+ — [6]
◆ — [3]
◇ — [2]
△ — [16]
○ — [17]
• — [18]
× — [19]
▽ — [20]
■ — [7]
P_L, Гэв/с

Рис.3



α (πP)
• — [28]
× — [29]
π⁻P
○ — [28] π⁺P
π⁻P
π⁺P
σ_tot (πP), мбарн
▲ — [1]
▽ — [20]
■ — [7]
• — [18]
○ — [8]
P_L, Гэв/с

Рис.4

представляющие собой локальную форму дисперсионных соотношений/I0/.

3. Локальная параметризация амплитуды рассеяния вперед

Исходя из изложенного выше, предположим, что амплитуды рассеяния аналитичны в круге некоторого радиуса R с центром в точке $w_0 = i y_0$ (рис.2). Это определенно верно для $R < 1/2$ и $y_0 > 1/2$, поскольку в полосе (7) все полюса расположены на вещественной оси. В следующем разделе будет показано, что имеющиеся экспериментальные данные не противоречат предположению $R > 1/2$. Вещественные и мнимые части амплитуд $F_\pm$

$$F_\pm = U_\pm + i V_\pm$$

в указанном круге являются гармоническими функциями x, y:

$$\Delta U(x,y) = 0 , \tag{I5}$$

$$\Delta V(x,y) = 0 . \tag{I6}$$

Условие (II) приводит к следующим свойствам четности функций U и V по x:

$$U_\pm(x,y) = \mp U_\pm(-x,y) , \tag{I7}$$

$$V_\pm(x,y) = \pm V_\pm(-x,y) . \tag{I8}$$

Рассмотрим функцию $V_+(x,y)$. Принимая во внимание соотношение (I8), разложим ее в сходящийся ряд вида

$$V_+(x,y) = \sum_{n \geq 1} x^{2n-2} \sigma_+^{(n)}(y) , \tag{I9}$$

в котором функции $\sigma_+^{(n)}(y)$ представляют собой ряды по степеням $y - y_0$. Подстановка разложения (I9) в (I6) позволяет выразить $\sigma_+^{(n)}(y)$ с $n \geq 2$ через $\sigma_+^{(1)}(y)$. Несложные вычисления дают

$$\sigma_+^{(n)}(y) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!} \frac{d^{2n-2} \sigma_+^{(1)}(y)}{dy^{2n-2}} . \tag{20}$$

Таким образом, функция V_+ определяется сходящимся рядом вида

$$\sigma_+^{(1)}(y) = \sum_{m \geq 1} a_m (y - y_0)^{m-1} . \tag{2I}$$

Аналогично для функции V_- найдем

$$V_-(x,y) = \sum_{n \geq 1} x^{2n-1} \sigma_-^{(n)}(y), \tag{22}$$

где

$$\sigma_-^{(n)}(y) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-2} \sigma_-^{(1)}(y)}{dy^{2n-2}} \tag{23}$$

и

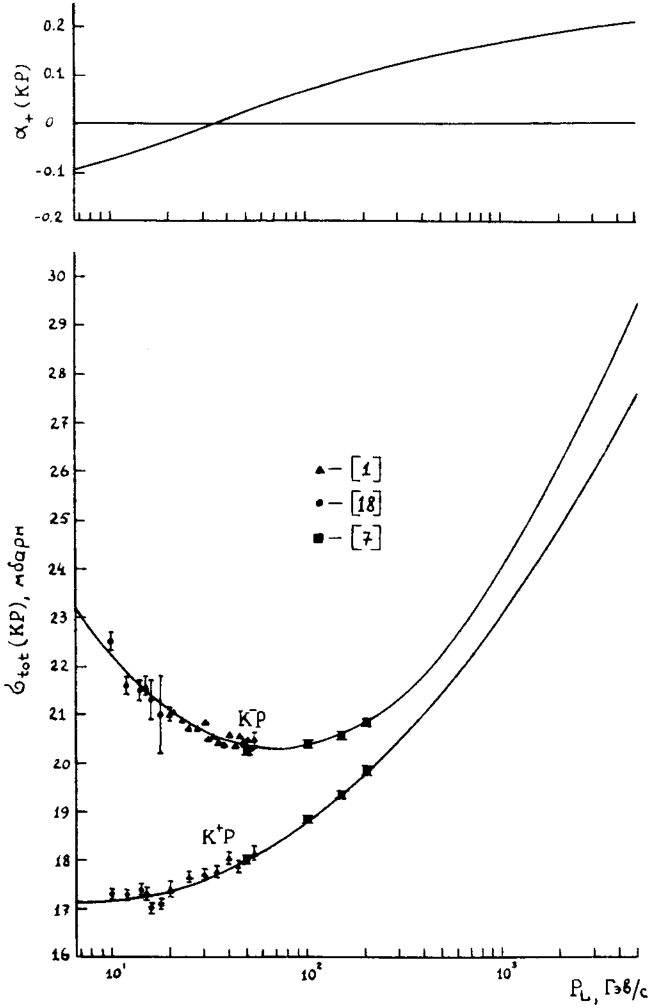
$$\sigma_-^{(1)}(y) = \sum_{m \geq 1} b_m (y - y_0)^{m-1} . \tag{24}$$

Для заданных функций $V_\pm(x,y)$ амплитуды рассеяния $F_\pm$ находятся по формуле/I5/

$$F_\pm(w) = 2i V_\pm\left(\frac{w + w_0^*}{2}, \frac{w - w_0^*}{2i} \right) + F_\pm^*(w_0) . \tag{25}$$

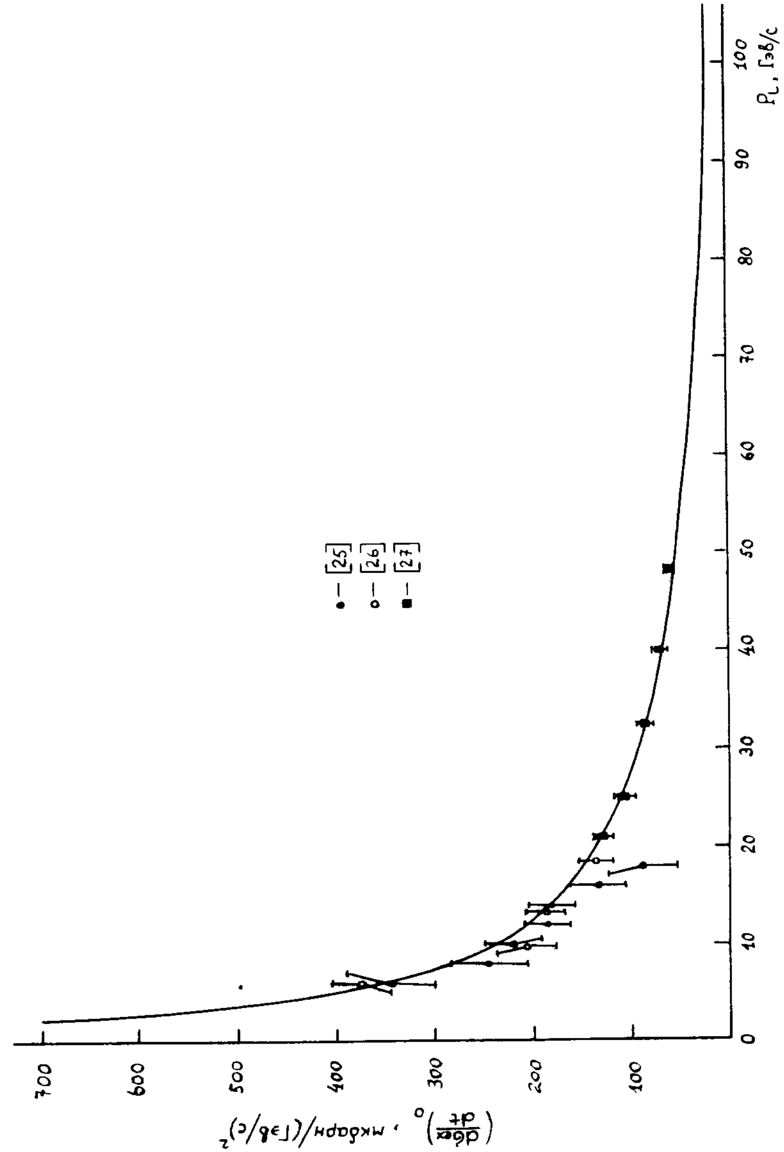
Соотношения (I7) и (I8) вместе с (I9) и (2I) приводят к следующим значениям амплитуд $F_\pm$ в точке $w_0 = i y_0$:

$$\begin{aligned} F_+(w_0) &= i V_+(0, y_0) = i a_1, \\ F_-(w_0) &= U_-(0, y_0) \equiv C . \end{aligned} \tag{26}$$



α_+ (KP)
σ_{tot} (KP), мбарн
▲ – [1]
● – [18]
■ – [7]
K^-P
K^+P
P_L, Гэв/с

Рис.5



● – [25]
○ – [26]
■ – [27]
P_L, Гэв/с
$\left(\frac{d\sigma_{el}}{dt}\right)_0$, мкбарн/(Гэв/с)^2

Рис.6

4. Анализ экспериментальных данных

С помощью формул (I9)-(26) были проанализированы имеющиеся экспериментальные данные по полным сечениям процессов pp - и $\bar{p}p$ /I-7,I6-20/, $\pi^{\pm}p$ - /I,7,8,I8,20/ и $K^{\pm}p$ - /I,7,I8/ рассеяния для $P_L \geqslant$ I0 ГэВ/с (рис.3-5). Из (26) видно, что параметр C не определяется из подгонки полных сечений. Поэтому для его определения необходимо использовать экспериментальную информацию о реальной части амплитуды рассеяния. Для процесса pp-рассеяния вместе с данными по полным сечениям подгонялись имеющиеся измерения[I9-24] отношения $\alpha = \mathrm{Re}F/\mathrm{Im}F$ (рис.3). Для процесса πp - рассеяния использовались данные по дифференциальному сечению перезарядки

$$\pi^- p \to \pi^0 n$$

при $t=0$ [25-27] (рис.6). Эти результаты имеют значительно меньше статистические ошибки, чем данные измерения величины α на основе кулоновской интерференции[28-29]. Кроме того, измерения работы[28] плохо согласуются с недавними вычислениями, выполненными с помощью дисперсионных соотношений[30]. По этой же причине в случае Kp-рассеяния параметр С не определялся, а величина α_+ вычислялась для кроссинг-симметричной амплитуды (рис.5), не зависящей от этого параметра.

Определение параметров a_n, b_n и c проводилось по методу наименьших квадратов. Результаты сведены в табл. I. Содержащиеся в этой таблице значения y_0 соответствуют для всех трех

реакций величине лабораторного импульса P_L =I00 ГэВ/с, т.е. области, характерной для наблюдаемого минимума в полных сечениях. При таком выборе параметра y_0 [x] остальные параметры оказываются слабо скоррелированными и хорошо (с небольшими ошибками) определяются из подгонки. Параметры a_n $(n>3)$ и b_n ($n>2$ для πp - рассеяния и $n>3$ для pp - и Kp - рассеяния) положим равными нулю, поскольку включение их в анализ не приводит к заметному уменьшению χ^2. Другими словами, ошибки в этих параметрах, получаемые при подгонке, сравнимы со значениями самих параметров. Получаемое при этом поведение величины α (рис.3-5) и, в частности, положение ее нулей в высокоэнергетической области (табл.2) вполне удовлетворительно согласуется с вычислениями, выполненными в работе[30].

Определив функции $F_{\pm}(\nu)$, естественно проверить степень их соответствия низкоэнергетическим данным. С этой целью рассмотрим дисперсионное правило сумм при конечных энергиях[3I], вытекающее из применения теоремы Коши по контуру C' (рис.I) к функции

$$\varphi(\nu) = \frac{\nu F_+(\nu)}{\sqrt{\nu^2-1}} .$$

Здесь $F_+(\nu)$ - кроссинг-симметричная амлитуда пион-нуклонного рассеяния, определенная соотношениями (2) и (8). В результате получим правило сумм вида

$$\frac{4\pi f^2}{M\left(\frac{1}{4M^2}-1\right)} - \frac{4\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{M}\right)\left(a_0^1+2a_0^3\right) + \int_1^{\nu_0} \frac{\nu \sigma_+(\nu)}{\sqrt{\nu^2-1}}\,d\nu = \int_1^{\nu_0} \frac{\nu U_+(\nu)}{\sqrt{\nu^2-1}}\,d\nu, \qquad (27)$$

---

[x] Вариация y_0 приводит к соответствующему переопределению параметров a_n, b_n и c, не влияя на энергетическую зависимость амплитуды рассеяния.

где $\sigma_+(\nu) = \mathrm{Im}\, F_+[w(\nu)]$ определяется формулами (5), (I9)-(2I), f^2 – пион-нуклонная константа связи, a_0^1 и a_0^3 – S-волновые длины рассеяния и $\sigma_+ = \sigma_{tot}(\pi^- p) + \sigma_{tot}(\pi^+ p)$.

Особенностью дисперсионного правила сумм (27) является его "чувствительность" к низкоэнергетической области, обусловленная присутствием $\sqrt{\nu^2-1}$ в знаменателях подынтегральных выражений. Табл. 3 содержит результаты вычисления левой и правой частей выражения (27) при различных значениях ν_0 (в ед. массы пиона μ). Экспериментальные данные по полным сечениям $\pi^{\pm} p$ - рассеяния в области $P_L <$ I0 ГэВ/с были взяты из[32], а значения f^2 =0,079 и $a_0^1 + 2a_0^3$ =-0,0I4 - из работы[33]. Из табл.3 видно, что дисперсионное правило сумм (27) выполнено с хорошей точностью. Это свидетельствует в пользу применимости полученного выражения для амплитуды рассеяния в комплексной ν плоскости.

Уместно, однако, подчеркнуть локальный, а не асимптотический характер представления (25) для амплитуды рассеяния. Поскольку данное представление имеет место в круге (рис.2), оно должно описывать экспериментальные данные в интервале энергий, соответствующем отрезку прямой $\mathrm{Re}\, w = 1/2$, вырезаемому этим кругом. Так, предполагая для нижней границы применимости формул (I9)-(26) с параметрами из табл.I $P_L \sim$ I0 ГэВ/с, найдем для верхней границы $P_L \sim$ I0^3 ГэВ/с. Это соответствует значению радиуса круга сходимости $R \sim 1$.

5. Заключение

Выше было получено представление для амплитуды рассеяния вперед в виде сходящегося ряда, основанное на гипотезе о ее римановой поверхности. Полученное представление хорошо описывает

экспериментальные данные для $P_L \gg$ I0 ГэВ/с. При этом кроссинг-четная и кроссинг-нечетная амплитуды рассмотрены единым образом, без предположения о малости последней при высоких энергиях. Такое предположение, как известно[34], не является строгим следствием аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии. Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные (рис.3-6) также не свидетельствуют однозначно в пользу этого предположения, что нашло отражение в ряде моделей (см., например[35]), предложенных для описания высокоэнергетического адрон-адронного рассеяния.
В то же время, если в разложениях (2I) и (24) ограничиться конечным числом слагаемых, то асимптотически $(\ln \nu \gg 1)$

$$|\alpha_+| \ll 1 \;, \quad |\alpha_-| \gg 1$$

в соответствии со строгими результатами[34]. В справедливости этого можно убедиться непосредственно из формул (I9)-(25). Однако проще всего воспользоваться соотношениями (I4), которые, как показано ранее, вытекают из этих формул и имеют смысл.

Интересно также отметить, что правило сумм для полных сечений

$$\frac{2}{3}\sigma_{tot}(\pi^- p) + \frac{1}{3}\sigma_{tot}(\pi^+ p) = \frac{1}{2}\sigma_{tot}(K^+ p) + \frac{1}{3}\sigma_{tot}(\bar{p} p)\,, \quad (28)$$

предложенное недавно Липкиным[36], выполнено для нашей параметризации с точностью 3% вплоть до энергий 2000 ГэВ (табл. 4). Ошибки в левой и правой частях правила сумм (28) определялись по ошибкам в параметрах, приведенных в табл. I.

Авторы благодарны Л.С.Золину, В.А.Никитину, В.С.Ставинскому и М.Г.Шафрановой за консультации по экспериментальным данным.

Таблица I

Параметры a_n, b_n, c (все в мбн), y_0 и отношение χ^2 к числу степеней свободы n_d

	pp	πp	Kp
a_1	84,5I ± 0,I8	49,77 ± 0,09	4I,03 ± 0,I2
a_2	−4,85 ± 0,36	I,92± 0,I9	5,I6 ± 0,25
a_3	I5,97 ± 0,7	I0,37 ± 0,34	7,37 ± 0,48
b_1	8,52 ± 0,I7	I,62 ± 0,07	3,5I ± 0,I2
b_2	−I3,82 ± 0,79	−2,8 ± 0,I7	−5,65 ± 0,5I
b_3	I5,33 ± I,7	0	5,04 ± 0,97
c	5,I5 ± 0,25	0,83 ± 0,07	−
y_0	I,7I	2,3I	I,9I
χ^2/n_d	II2/I09	82/73	48/38

Таблица 2

Положение нуля величины $\alpha = Re F / Im F$ $[\alpha(P_0) = 0]$

	$\alpha(pp)$	$\alpha(\bar{p}p)$	$\alpha(\pi^+ p)$	$\alpha(\pi^- p)$	$\alpha_+(Kp)$
P_0, ГэВ/с	262,9	74,4	88,2	58,7	33,3

Таблица 3

Результаты вычисления левой (L) и правой (R) частей дисперсионного правила сумм (27)

ν/μ	L/μ	R/μ	R/L
70	2I0	202,7	0,965
80	235,4	228,3	0,970
90	260,8	253,7	0,973
I00	286,I	278,9	0,975

Таблица 4

Значения левой (L) и правой (R) частей правила сумм Липкина (28)

P_L, ГэВ/с	L, мбн	R, мбн
200	24,I4 ± 0,05	23,69 ± 0,07
400	25,05 ± 0,05	24,45 ± 0,08
600	25,83 ± 0,06	25,I3 ± 0,I0
800	26,48 ± 0,07	25,7I ± 0,I2
I000	27,04 ± 0,08	26,23 ± 0,I4
I200	27,54 ± 0,09	26,69 ± 0,I6
I400	27,99 ± 0,09	27,I0 ± 0,I8
I600	28,40 ± 0,I0	27,48 ± 0,20
I800	28,78 ± 0,II	27,83 ± 0,2I
2000	29,I3 ± 0,I2	28,I5 ± 0,23

Литература

I. S.P.Denisov et al. Phys.Lett., 36B, 415 and 528 (1971); Nucl.Phys., B65, 1 (1973).

2. G.Charlton et al. Phys.Rev.Lett., 29, 515 (1972).

3. F.T.Dao et al. Phys.Rev. Lett., 29, 1627 (1972).

4. J.W.Chapman et al. Phys.Rev.Lett., 29, 1686 (1972).

5. U.Amaldi et al. Phys.Lett., 44B, 112 (1973).

6. S.R.Amendolia et al. Phys.Lett., 44B, 119 (1973).

7. A.S.Carroll et al. Phys.Rev.Lett., 33, 928 and 932 (1974).

8. D.Bogert et al. Phys.Rev.Lett., 31, 1271 (1973).

9. C.Bourrely, J.Fischer.Nucl.Phys., B61, 513 (1973); C.Bourrely, J.Fischer, Z.Secera. ibid., B67, 452 (1973); R.E.Hendrick et al.Rockfeller University preprint, COO-2232B-58 1974. Л.Д.Соловьев, А.В.Щелкачев. Препринт ОИЯИ, Р2-8230, Дубна, 1974.

I0. J.B.Bronzan, G.G.Kane, U.P.Sukhame.Phys. Lett., 49B, 272 (1974).

II. G.K.Eighmann, J.Dronkers.Phys.Lett., 52B, 428 (1974).

I2. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, Москва, ГИФМЛ, 1957.

I3. F.Wagner. Proc. XVII Intern.Conf. on High Energy Physics, London, II, 30 (1975).

I4. Н.П.Клеников, В.А.Мещеряков, С.Н.Соколов. Препринт ОИЯИ, Д-584, Дубна, 1960.

I5. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, Москва, Наука, 1973, гл.Ш, § I.

I6. A.Ashmore et al.Phys.Rev.Lett., 5, 576 (1960).

I7. S.J.Lindenbaum et al.Phys.Rev.Lett., 7, 184 (1961).

I8. W.Galbraith et al.Phys.Rev., 138B, 913 (1965).

19. G.Belletini et al. Phys.Lett., 14, 164 (1965).

20. K.Y.Foley et al. Phys.Rev.Lett., 19, 330 and 867 (1967).

21. Л.Ф.Кириллова и др. ЯФ, I, 533 (1965); ЖЭТФ, 50, 76 (1966).

22. G.G.Beznogikh et al. Phys.Lett., 39B, 411 (1972).

23. V.Bartenev et al. Phys.Rev.Lett., 31, 1367 (1973).

24. U.Amaldi et al. Phys.Lett., 43B, 231 (1973).

25. I.Manelli et al. Phys.Rev.Lett., 14, 408 (1965).

26. A.V.Stirling et al. Phys.Rev.Lett., 14, 763 (1965).

27. В.Н.Болотов и др. Труды XVI Межд. конф. по физике высоких энергий, Чикаго, 1972; Препринт ИФВЭ, 73-52 (1973).

28. K.Y.Foley et al. Phys.Rev., 181, 1775 (1969).

29. В.Д.Апокин и др. Препринт ИФВЭ, 74-113, 1974.

30. R.E. Hendrick, B.Lautrup. Rockfeller University preprint, COO-2232B-62 (1974).

31. A.A.Logunov, L.D.Soloviev, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 24B, 181 (1967).

32. E.Bracci et al. CERN/HERA 72-1, 1972.

33. D.V.Bugg, A.A.Carter, J.R.Carter. Phys.Lett., B44, 275 (1973).

34. A.Martin. Proc. of the 8th Recontre de Moriod March 4-16, 1973, Meribel-les-Allues, France; H.Cornille.Nuovo Cim.Lett., 4, 267 (1970).

35. L.Lucaszuk, B.Nicolescu. Nuov.Cim.Lett., 8, 405 (1973); K.Kang, B.Nicolescu. NAL preprint COO-3130TA-310, 1974.

36. H.J.Lipkin. Phys.Lett., 56B, 76 (1975).

Рукопись поступила в издательский отдел
II июня 1975 года.