89-871

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-89-871

Н.Махалдиани

О p-АДИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1989

В последнее время обсуждаются модели теории полей и струн над конечными и р-адическими числовыми полями [1]. Высказана красивая идея о том, что фундаментальные теории должны формулироваться независимо от числового поля [2]. Выбор основного состояния может соответствовать выбору конкретного числового поля, изменение внешних условий, температуры, давления, разрешающей способности прибора могут приводить к переходу от одного числового поля /геометрии/ к другому [3].

В данной работе мы обращаем внимание на возможное применение р-адического анализа [4] для вычисления расходящихся интегралов квантовой теории поля /КТП/ [5].

Процедуру вычислений в КТП по теории возмущений можно свести к взятию интеграла [5]

$$I(\{k_i\}) = \int d^D q\, f(q, \{k_i\}), \qquad /1/$$

где k_i - внешние импульсы из n-мерного евклидова пространства; q - внутренний импульс из D-мерного пространства. Разложим $q = q_\parallel + q_\perp$, где $q_\parallel$ находится в пространстве внешних импульсов, $q_\perp$ - в ортогональном пространстве, и преобразуем интеграл /1/ к виду

$$\begin{aligned} I &= \int d^n q_\parallel \int d^{D-n} q_\perp f(|q_\perp|, \{q_\parallel, k_i\}) = \\ &= \int d^n q_\parallel \int d^{D-n} q_\perp \int_0^\infty dx\, \delta(x - |q_\perp|) f(x, \{q_\parallel, k_i\}) = \qquad /2/ \\ &= \int d^n q_\parallel \int_0^\infty dx\, x^{D-n-1} f(x, \{q_\parallel, k_i\}) \cdot \int d^{D-n} q_\perp \delta(1 - |q_\perp|). \end{aligned}$$

Последний интеграл берется явно:

$$\int d^{D-n} q\, \delta(1 - |q|) = \frac{2\pi^{\frac{D-n}{2}}}{\Gamma(\frac{D-n}{2})} \equiv \Omega_{D-n} \quad . \qquad /3/$$

Теперь в формуле /2/ можно рассматривать произвольные комплексные значения D. В этом состоит суть размерной регуляризации интегралов /1/ [5].

Преобразуем интеграл /2/ к виду

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x} (x^{D-n} \phi(x, \{k_i\}) + x^{n-D} \phi(\frac{1}{x}, \{k_i\})), \qquad /4/$$

где

$$\phi(x, \{k_i\}) \equiv \Omega_{D-n} \int d^n q_{\parallel} f(x, \{q_{\parallel}, k_i\}).$$

В работе [3] для полиномиальных функций

$$f(x) = \Sigma a_n x^n \qquad /5/$$

доказаны формулы [6,3]

$$\int_0^1 dx\, f(x) = \lim_{p\to 1} \int_{|x|\leq 1} dx\, f(|x|) = -\lim_{p \to 1} \int_{|x|\geq 1} dx\, f(|x|), \qquad /6/$$

откуда следует, что

$$\lim_{p\to 1} \int_{O_p} dx\, f(|x|) = 0. \qquad /7/$$

При получении формул /6/ мы суммировали бесконечные ряды по действительной и p-адической метрикам соответственно.
В формуле /7/ реализована физическая идея о суммировании эффектов малых расстояний по p-адической метрике, больших расстояний по действительной метрике. Неопределенность в выборе границы между большим и малым при этом несущественна, т.к. представляет собой рациональную величину. Отметим, что расходящуюся часть интегралов /1/ всегда можно представить в виде интеграла от функции /5/. В формулах /6/, /7/ O_p - p-адическое числовое поле [4], p - простое число = 2,3,5,..., 137,...;

$$x = p^k(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots) \in O_p,$$

$$a_0 = 1, 2, \dots, p-1, \quad a_i = 0, 1, \dots, p-1, \quad i \geq 1,$$

k - целое,

$$|x| = \begin{Bmatrix} 0, & x = 0 \\ p^{-k}, & x \neq 0 \end{Bmatrix}$$ - p-адическая норма [4],

p-адическая мера нормирована условием

$$\int_{|x|\leq 1} dx = 1.$$

Ниже нам понадобится значение интеграла

$$\int_{|x|=p^{-k}} dx = \int_{|x|\leq p^{-k}} - \int_{|x|\leq p^{-k-1}} = p^{-k}(1-p^{-1}).$$

В качестве примера рассмотрим энергию квантовых флюктуаций вакуума [7]:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega(k), \qquad /8/$$

где

$$\omega(k) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$

Для простоты положим m = 0. Тогда

$$E = \frac{1}{2} \int d^n k \sqrt{\vec{k}^2} = \frac{\Omega_n}{2} \int_0^\infty dk\, k^n. \qquad /9/$$

Суть p-адической регуляризации состоит в замене интегрирования по $k \in R$ на интегрирование по $k \in O_p$, с последующим переходом к пределу $p \to 1$.

Заметим, что для общего случая интегралов /1/, /4/ формула /7/ неприменима. Имеем /см. приложение/:

$$\epsilon \equiv \frac{2E}{\Omega_n} = \int_{O_p} dx|x|^n = \int_{|x|\leq 1} + \int_{|x|>1} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} (1-p^{-1})\, p^{-k} p^{-nk} + \sum_{k>1} (1-p^{-1})\, p^k p^{nk} = \qquad /10/$$

$$= (1-p^{-1}) \frac{1}{1-p^{-(n+1)}} + (1-p^{-1}) \frac{p^{n+1}}{1-p^{n+1}} = 0,$$

где вторая сумма сходится по p-адической норме; $\epsilon = 0$ еще до предельного перехода $p \to 1$; при $n = 0$

$$\int_{O_p} dx = \int_{|x|\leq p^k} + \int_{|x|>p^{k+1}} = (1-p^{-1}) \left(\frac{p^k}{1-p^{-1}} + \frac{p^{k+1}}{1-p}\right) = 0, \qquad /11/$$

что напоминает свойство интегрирования по угловой и грассмановой переменным и свойство суммы по полю Галуа

$$\sum_{0}^{p-1} 1 = p = 0 \mod(p) .$$

Для $m \neq 0$

$$\epsilon = (1 - p^{-1}) \left(\sum_{k \geq 0} p^{-k(n+1)} \sqrt{1 + m^2 p^{2k}} + \sum_{k \geq 1} p^{k(n+1)} \sqrt{1 + m^2 p^{-2k}} \right).$$

Теперь, раскладывая по степеням m^2 и суммируя по k, в каждом порядке получим нулевой ответ. Простая модель скалярного поля, на аделях для которой космологическая постоянная равняется нулю, предложена в работе /3/.

Автор благодарен И.Воловичу за полезные обсуждения p-адических теорий, Б.Костенко, Э.Кураеву, О.Пашаеву и А.Шиллеру за обсуждение результатов данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим соотношение /9,10/ с помощью аналитического продолжения по размерности. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty d^D x \, e^{-a \sum_{i=1}^{D} x_i} = a^{-D} .$$

Разложим подынтегральную экспоненту в ряд:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-a)^n}{n!} \int_0^\infty d^D x (\Sigma x_i)^n = a^{-D} ,$$

откуда следует, что

$$\int_0^\infty d^D x \left(\sum_{i=1}^{D} x_i \right)^n = c_n \delta_{D+n,0} , \qquad /П.1/$$

где

$$c_n = (-1)^n \, \Gamma(n+1) .$$

Для значения D = 1 из /П.1/ следует /9,10/. Положив $n = 0$, получим

$$\int_0^\infty d^D x = \left(\int_0^\infty dx \right)^D = \delta_{D,0} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Frampton P.H., Volovich I.V. - p-adic Numbers in Theoretical Physics (to be published).
2. Volovich I.V. - Preprint CERN-TH, 4781/87, 1987.
3. Makhaldiani N.V. - JINR, P2-88-916, Dubna, 1988.
4. Koblitz N. - p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions, Springer Verlag, 1984.
5. Collins J.C. - Renormalization, Cambridge University Press, 1984.
6. Spokoiny B.L. - Phys.Lett. B, 1988, 207, p.401.
7. Weinberg S. - Rev. Mod. Phys., 1989, 61, p.1.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1989 года.