объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-863

Г.Н.Афанасьев

КАК ИЗМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ НЕПРОНИЦАЕМОСТИ ВЛИЯЕТ НА ЭФФЕКТ ААРОНОВА - БОМА

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1989

I. Эффект Ааронова - Бома (АБ) [I] часто определяют как квантовые эффекты недоступных для частиц полей. Окружим бесконечный цилиндрический соленоид S непроницаемым цилиндром C радиуса R. Условие непроникновения падающих частиц внутрь C мы связываем с равенством нулю нормальной к поверхности C составляющей нерелятивистского тока вероятности

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2i\mu}\left(\bar{\Psi}\,\mathrm{grad}\,\Psi - \Psi\,\mathrm{grad}\,\bar{\Psi}\right) - \frac{e}{\mu c}\vec{A}\,|\Psi|^2 .$$

Поскольку в данном случае только одна компонента вектор- потенциала (в. п.) $\vec{A}$ отлична от нуля ($A_\varphi = \Phi/2\pi\rho$, Φ - магнитный поток внутри S), то условие непроницаемости выглядит следующим образом:

$$\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} - \Psi\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R. \tag{I.I}$$

Обычно выполнения этого условия добиваются, полагая

$$\Psi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R. \tag{I.2}$$

Обратить в нуль выражение (I.I) можно бесконечным числом способов. Укажем ещё два простейших:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R, \tag{I.3}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = \alpha\Psi \quad \text{при} \quad \rho = R \tag{I.4}$$

(α -произвольная вещественная константа). В любом из этих случаев волновую функцию (в.ф.) представим в виде

$$\Psi = \Psi_{AБ} + \Psi_S . \tag{I.5}$$

Здесь $\Psi_{AБ}$ - в.ф., описывающая рассеяние на бесконечно тонком неэкранированном соленоиде:

$$\Psi_{AБ} = \sum \exp\left[i\pi\left(|m| - \tfrac{1}{2}|m-\gamma|\right) + im\varphi\right] \cdot J_{|m-\gamma|}(k\rho), \tag{I.6}$$

$k = \sqrt{2\mu E}/\hbar = \frac{\mu v}{\hbar}$, $\gamma = \frac{e\Phi}{\hbar c}$, $J_\nu(x)$ - функция Бесселя.

Асимптотическое поведение $\Psi_{AБ}$ хорошо известно [I,2]. При не слишком малых углах рассеяния имеем

$$\Psi_{AБ} \approx \exp[ikx + i\gamma(\varphi-\pi)] + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\exp(ik\rho)\cdot f_{AБ}(\varphi),$$

$$f_{AБ}(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}}\sin\pi\gamma\,\frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}, \quad \sigma_{AБ} = \frac{1}{2\pi k}\,\frac{\sin^2\pi\gamma}{\sin^2\varphi/2}. \qquad \text{(I.7)}$$

(Здесь, ради определенности и без ограничения общности, мы считаем $0 \le \gamma \le 1$). Второе слагаемое в (I.5) учитывает конечность размеров соленоида и его экранировку:

$$\Psi_S = \sum \exp[i\pi(|m| - \tfrac{1}{2}|m-\gamma|) + im\varphi]\cdot C_m\cdot H^{(1)}_{|m-\gamma|}(k\rho). \qquad \text{(I.8)}$$

Коэффициенты C_m зависят от граничного условия при $\rho = R$:

$$C_m = -J_{|m-\gamma|} / H^{(1)}_{|m-\gamma|} \qquad \text{для (I.2),}$$

$$C_m = -\dot{J}_{|m-\gamma|} / \dot{H}^{(1)}_{|m-\gamma|} \qquad \text{для (I.3),}$$

$$C_m = -\frac{k\cdot\dot{J}_{|m-\gamma|} - \alpha H}{k\,\dot{H}^{(1)}_{|m-\gamma|} - \alpha\, H^{(1)}_{|m-\gamma|}} \qquad \text{для (I.4).}$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем аргумент функций Бесселя и Ханкеля, если он равен kR . Точка означает дифференцирование по аргументу. Устремляя в(I.8) $\rho \to \infty$, получаем

$$\Psi_S \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\exp(ik\rho)\cdot f_S(\varphi),$$

$$f_S(\varphi) = \left(\frac{2}{\pi i k}\right)^{1/2}\sum C_m\cdot\exp[i\pi(|m| - |m-\gamma|) + im\varphi].$$

Полная амплитуда рассеяния равна

$$f = f_{AБ} + f_S. \qquad \text{(I.9)}$$

Итак, налицо явная зависимость сечения рассеяния $(\sigma = |f|^2)$ от конкретной реализации условия непроницаемости (I.I). Условия (I.2)-(I.4), будучи тривиальны с математической точки зрения (они соответствуют краевым задачам Дирихле, Неймана и смешанной краевой задаче), отвечают различным типам физической непроницаемости. Этот факт должен быть учтен при анализе экспериментальных данных. Ранее влияние изменения граничных условий на процесс рассеяния (безотносительно к АБ-эффекту) изучалось в работах /3,4/. Подчеркнем, что на данном этапе мы не интересовались поведением решений уравнения Шредингера внутри C. Оно определяется видом отталкивающего потенциала внутри C. Например, чтобы обратить Ψ внутри C в нуль при граничном условии (I.2), мы должны включить бесконечный объемный отталкивающий потенциал внутри C и δ -образный отталкивающий потенциал на его поверхности. Последний необходим, чтобы воспроизвести правильный скачок нормальной производной при переходе через границу C (в самом деле, $\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = 0$ - внутри C и $\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} \neq 0$ с наружной стороны C при граничном условии (I.2)).

2. Переходим к рассмотрению релятивистского АБ- эффекта. Имеются две работы , посвященные этому вопросу. В первой из них /5/ было показано, что для бесконечно тонкого цилиндрического соленоида релятивистское АБ-сечение отличается множителем $\sqrt{1-\beta^2}$ $(\beta = v/c)$. Авторы работы /6/, в которой изучалось рассеяние на непроницаемом цилиндрическом соленоиде конечного радиуса R , утверждают, что на границе соленоида невозможно обратить в нуль все компоненты дираковской в.ф. Ввиду того, что в типичных экспериментах по проверке существования АБ -эффекта энергия электронов порядка I00 кэВ, что соответствует $\beta \simeq 0{,}6$, возникает необходимость в более детальном изучении этого вопроса.

Вне цилиндра C в.ф. удовлетворяет уравнению Дирака:

$$H\Psi = \varepsilon\cdot\Psi, \quad H = -i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right) + mc^2\beta$$

$$\left(\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ψ разлагаем по состояниям с определенной проекцией углового момента $J_3 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\hbar\cdot\Sigma_3$, $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$,

$$\Psi=\sum \Psi_m, \quad J_3\cdot\Psi_m=(m+\tfrac{1}{2})\Psi_m, \quad \Psi_m=\begin{bmatrix}\Psi_{1m}\\ \Psi_{2m}\\ \Psi_{3m}\\ \Psi_{4m}\end{bmatrix},$$

$$\Psi_{1m}=U_{1m}\cdot\exp(im\varphi),\ \Psi_{2m}=U_{2m}\cdot\exp[i(m+1)\varphi], \qquad (2.I)$$
$$\Psi_{3m}=U_{3m}\exp(im\varphi),\ \Psi_{4m}=U_{4m}\cdot\exp[i(m+1)\varphi].$$

Функции U_{1m}, U_{2m} являются линейными комбинациями бесселевых функций:

$$U_{1m}=A_m\left[J_{m-\gamma}(k\rho)+B_m\cdot H^{(1)}_{m-\gamma}(k\rho)\right],$$
$$U_{2m}=C_m\left[J_{m+1-\gamma}(k\rho)+D_m\, H^{(1)}_{m+1-\gamma}(k\rho)\right]$$
$$\left(k=\sqrt{\varepsilon^2-\mu^2c^4}\,/\hbar c\right).$$

Малые компоненты дираковской в.ф. следующим образом выражаются через U_{1m}, U_{2m}: $U_{3m}=-i\eta\left(\frac{d}{dk\rho}+\frac{m+1-\gamma}{k\rho}\right)U_{2m}=$

$$=-i\eta\cdot C_m\cdot\left[J_{m-\gamma}(k\rho)+D_m\cdot H^{(1)}_{m-\gamma}(k\rho)\right];$$
$$U_{4m}=-i\eta\left(\frac{d}{dk\rho}-\frac{m-\gamma}{k\rho}\right)U_{1m}=i\eta A_m\left[J_{m+1-\gamma}(k\rho)+B_m\, H^{(1)}_{m+1-\gamma}(k\rho)\right] \qquad (2.2)$$

$\left(\eta=\left(\frac{\varepsilon-\mu c^2}{\varepsilon+\mu c^2}\right)^{1/2}\right)$. Коэффициенты A_m, C_m фиксируются из условия получения правильного выражения для падающей волны, которую выбираем распространяющейся в положительном направлении оси x с положительной спиральностью $\left(\vec{\Sigma}\cdot(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})\cdot\Psi_{inc}=+p\,\Psi_{inc}\right)$:

$$\Psi_{inc}=\exp[ikx+i\gamma(\varphi-\pi)]\cdot u_\eta\ ; \quad u_\eta=\begin{bmatrix}1\\1\\ \eta\\ \eta\end{bmatrix}.$$

В итоге получаем

$$A_m=\exp\left(i\pi\frac{m+\gamma}{2}\right),\quad B_m=\exp\left(i\pi\frac{m+1+\gamma}{2}\right).$$

Подставляя эти коэффициенты в (2.I), приводим Ψ к виду

$$\Psi=(\Psi_{AБ}+\Psi_S^0)u_\eta+\Psi_S. \qquad (2.3)$$

Здесь $\Psi_{AБ}$ определено соотношением (I.6):

$$\Psi_S^0=i\sin\pi\gamma\sum_{m=0}^{-\infty}\exp\left(i\pi\frac{\gamma-m}{2}\right)\cdot H^{(1)}_{\gamma-m}(k\rho)\cdot\exp(im\varphi),$$

$$\Psi_S=\begin{bmatrix}\Psi_1^{(s)}\\ \Psi_2^{(s)}\\ \Psi_3^{(s)}\\ \Psi_4^{(s)}\end{bmatrix};$$

$$\Psi_1^{(s)}=\sum\exp\left(i\pi\frac{m+\gamma}{2}\right)\cdot B_m\cdot H^{(1)}_{m-\gamma}(k\rho)\cdot\exp(im\varphi),$$
$$\Psi_2^{(s)}=\sum\exp\left(i\pi\frac{m+\gamma}{2}\right) D_{m-1}\cdot H^{(1)}_{m-\gamma}(k\rho)\cdot\exp(im\varphi),$$
$$\Psi_3^{(s)}=\eta\sum\exp\left(i\pi\frac{m+\gamma}{2}\right) D_m\cdot H^{(1)}_{m-\gamma}(k\rho)\cdot\exp(im\varphi),$$
$$\Psi_4^{(s)}=\eta\sum\exp\left(i\pi\frac{m+\gamma}{2}\right)\cdot B_{m-1}\cdot H^{(1)}_{m-\gamma}(k\rho)\,\exp(im\varphi).$$

Здесь и в дальнейшем, когда пределы суммирования не указаны, подразумевается суммирование по всем m от $-\infty$ до ∞. При $\rho\to\infty$ имеем следующее асимптотическое поведение Ψ:

$$\Psi\simeq\exp[ikx+i\gamma(\varphi-\pi)]\cdot u_\eta+\frac{1}{\sqrt{\rho}}\exp(ik\rho)\cdot f(\varphi), \qquad (2.4)$$

где $f(\varphi)$ – спинорная амплитуда рассеяния равна

$$f(\varphi)=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ \eta\cdot f_2\cdot\exp(-i\varphi)\\ \eta\cdot f_1\exp(i\varphi)\end{bmatrix}; \quad \begin{aligned}f_1&=\sqrt{\frac{2}{\pi ik}}\cdot\exp(i\pi\gamma)\cdot\sum B_m\cdot\exp(im\varphi),\\ f_2&=\sqrt{\frac{2}{\pi ik}}\cdot\exp(i\pi\gamma)\sum D_{m-1}\cdot\exp(im\varphi).\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Наконец, сечение рассеяния равно

$$\sigma=\frac{1}{2}\left(|f_1|^2+|f_2|^2\right). \qquad (2.6)$$

Коэффициенты B_m, D_m определяются граничным условием при $\rho=R$. Потребуем, например, чтобы при $\rho=R$ обращались в нуль большие компоненты U_{1m}, U_{2m} дираковской в.ф. Это дает

$$D_{m-1} = B_m = -J_{m-\gamma}/H^{(1)}_{m-\gamma}. \qquad (2.7)$$

Подставляя эти значения в (2.2), получаем при $\rho = R$

$$|u_{3m}|^2 = \frac{4\eta^2}{\pi^2 K^2 R^2}\left(J^2_{m-\gamma} + Y^2_{m-\gamma}\right)^{-1},$$

$$|u_{4m}|^2 = \frac{4\eta^2}{\pi^2 K^2 R^2}\left(J^2_{m+1-\gamma} + Y^2_{m+1-\gamma}\right)^{-1}.$$

В типичных экспериментах по АБ – эффекту /7/ $KR \sim 10^6$. Заменяем функции Бесселя и Неймана их асимптотическими выражениями:

$$|u_{3m}|^2 \approx |u_{4m}|^2 \approx \frac{2\eta^2}{\pi K R} \ll 1.$$

Поэтому хотя отличие от нуля при $\rho=R$ малых компонент в.ф. действительно имеет место /6/, но в реальных экспериментах им можно пренебречь. Подставляя (2.7) в (2.5) и (2.6), имеем

$$f_1 = f_2 = f, \quad \sigma = |f|^2,$$

$$f = -\sqrt{\frac{2}{\pi i K}}\,\exp(i\pi\gamma)\sum \frac{J_{m-\gamma}}{H^{(1)}_{m-\gamma}}\exp(im\varphi). \qquad (2.8)$$

Эта сумма содержит бесселевы функции как с положительными, так и с отрицательными индексами. Избавимся от последних, воспользовавшись (при $m-\gamma<0$) тождествами

$$H^{(1,2)}_{-\nu}(x) = \exp(\pm i\pi\nu)\, H^{(1,2)}_{\nu}(x),$$

$$J_{-\nu}(x) = i\sin\pi\nu\, H^{(1)}_{\nu}(x) + \exp(-i\pi\nu)\, J_\nu(x).$$ Тогда

$$f = -\sqrt{\frac{2}{\pi i K}}\left\{\frac{1}{2}\sin\pi\gamma\,\frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2} + \right.$$
$$\left. + \sum \exp[i\pi(|m|-|m-\gamma|)+im\varphi]\,\frac{J_{|m-\gamma|}}{H^{(1)}_{|m-\gamma|}}\right\}, \qquad (2.9)$$

что по форме совпадает с нерелятивистской амплитудой рассеяния (I,9), соответствующей граничному условию (I.2). Точнее, нерелятивистское (I.9) переходит в релятивистское сечение (2.9) при замене нерелятивистского импульса $K_{нерел} = \sqrt{2\mu E}/\hbar$ на релятивистский $K_{рел} = K_{нерел}/\sqrt{1-\beta^2}$.

Для бесконечно тонкого соленоида ($KR \ll 1$) суммами в (2.9) можно пренебречь. Поэтому

$$f^{рел}_{АБ} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i K}}\,\sin\pi\gamma\,\frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}.$$

Это выражение отличается от нерелятивистского (I.7) смыслом K. Поэтому для бесконечно тонкого соленоида $\sigma^{рел}_{АБ} = \sqrt{1-\beta^2}\,\sigma^{нонрел}_{АБ}$, что подтверждается результатами работы /5/. Апостериори факт перехода нерелятивистских выражений в релятивистские можно подтвердить тем, что отдельные компоненты дираковской в.ф. удовлетворяют уравнению второго порядка, которое по форме совпадает с уравнением Шредингера, отличаясь тем, что содержит релятивистский импульс вместо нерелятивисткого. Поскольку формальное совпадение релятивистских и нерелятивистских уравнений имеет место и при рассеянии заряженных частиц на тороидальном соленоиде, то можно надеяться, что замкнутые выражения для нерелятивистских сечений, полученные в работах /8-II/, останутся справедливыми и в релятивистском случае при замене нерелятивистского импульса на релятивистский. Неисчезновение при $\rho = R$ малых компонент дираковской в.ф. (хотя оно и носит академический характер из-за численной малости u_{3m}, u_{4m} при $\rho = R$) связано с нерелятивистским характером граничного условия. Точного

выполнения условия непроницаемости можно добиться путем наложения релятивистского граничного условия. Именно, потребуем обращения в нуль (как это делается в теории кварковых мешков, см., например, /I2/) нормальной к поверхности непроницаемого цилиндра C компоненты тока вероятности: $\vec{j}\cdot\vec{n} = 0$. Здесь $\vec{n}$ – нормаль к поверхности C ($\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0, 0)$), $\vec{j}$ – дираковский ток вероятности ($\vec{j} = ec\Psi^+\vec{\alpha}\Psi$). В результате получаем

$$\Psi^+ \vec{\alpha}\vec{n}\,\Psi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R. \qquad (2.I0)$$

Это выражение неудобно для практического применения. Следующее релятивистское условие, линейное по компонентам дираковской в.ф., также широко используется в теории мешков /I2/:

$$i\vec{\alpha}\vec{n}\cdot\Psi = \beta\Psi \quad \text{при} \quad \rho = R. \qquad (2.II)$$

Доказательство того, что (2.I0) вытекает из (2.II), занимает всего две строчки. Эрмитово сопрягаем (2.II):

$$i\Psi^+ \vec{\alpha}\vec{n} = -\Psi^+ \cdot \beta. \tag{2.12}$$

Умножаем (2.II) слева на Ψ^+, а (2.I2) справа на Ψ :

$$i\Psi^+ \vec{\alpha}\vec{n}\Psi = \Psi^+\beta\Psi = -\Psi^+\beta\Psi.$$

Поэтому $\Psi^+\vec{\alpha}\vec{n}\Psi = 0$, если выполнено условие (2.II). Обратное, вообще говоря, не имеет места, то есть условие (2.I0) более общее, чем (2.II). В дальнейшем мы ограничимся условием (2.II). Применяем его к дираковской в.ф. (2.I). Это дает

$$U_{4m} = -iU_{1m}, \quad U_{3m} = -iU_{2m} \quad \text{при} \quad \rho = R. \tag{2.13}$$

Отсюда находим коэффициенты B_m, D_m :

$$B_m = -\frac{J_{m-\gamma} + \eta J_{m+1-\gamma}}{H^{(1)}_{m-\gamma} + \eta H^{(1)}_{m+1-\gamma}}, \quad D_m = -\frac{J_{m+1-\gamma} - \eta J_{m-\gamma}}{H^{(1)}_{m+1-\gamma} - \eta H^{(1)}_{m-\gamma}}. \tag{2.14}$$

Подставляем эти выражения в (2.5) :

$$f_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}}\Big\{\frac{1}{2}\sin\pi\gamma \cdot \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2} +$$

$$+\exp(i\pi\gamma)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{m-\gamma} + \eta J_{m+1-\gamma}}{H^{(1)}_{m-\gamma} + \eta H^{(1)}_{m+1-\gamma}}\exp(im\varphi) +$$

$$+\exp(-i\pi\gamma)\sum_{m=0}^{-\infty}\frac{J_{\gamma-m} - \eta J_{\gamma-m-1}}{H^{(1)}_{\gamma-m} - \eta H^{(1)}_{\gamma-m-1}}\exp(im\varphi)\Big\},$$

$$f_2 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}}\Big\{\frac{1}{2}\sin\pi\gamma\,\frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2} +$$

$$+\exp(i\pi\gamma)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_{m+1-\gamma} - \eta J_{m-\gamma}}{H^{(1)}_{m+1-\gamma} - \eta H^{(1)}_{m-\gamma}}\exp[i(m+1)\varphi] +$$

$$+\exp(-i\pi\gamma)\sum_{m=-1}^{-\infty}\frac{J_{\gamma-m-1} + \eta J_{\gamma-m}}{H^{(1)}_{\gamma-m-1} + \eta H^{(1)}_{\gamma-m}}\exp[i(m+1)\varphi]\Big\}. \tag{2.15}$$

Рассмотрим предельные случаи этих выражений.

а) Магнитный поток внутри соленоида равен нулю.

$$f_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}}\sum\frac{J_m + \eta J_{m+1}}{H^{(1)}_m + \eta H^{(1)}_{m+1}}\exp(im\varphi),$$

$$f_2 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}}\sum\frac{J_{m+1} - \eta J_m}{H^{(1)}_{m+1} - \eta H^{(1)}_m}\exp[i(m+1)\varphi]; \tag{2.16}$$

б) Бесконечно тонкий экранирующий цилиндр ($kR \ll 1$).

При $0 < \gamma < \frac{1}{2}$

$$f_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}}\sin\pi\gamma\,\frac{\exp(-i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}, \quad f_2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}}\sin\pi\gamma\,\frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}.$$

При $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.

$$f_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}}\sin\pi\gamma\,\frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}, \quad f_2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}}\sin\pi\gamma\,\frac{\exp(3i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}. \tag{2.17}$$

В этом случае сечение рассеяния равно

$$\sigma^{\text{рел}}_{\text{АБ}} = \frac{1}{2\pi k}\,\frac{\sin^2\pi\gamma}{\sin^2\varphi/2}. \tag{2.18}$$

По форме оно совпадает с нерелятивистским выражением (I.7), отличаясь тем, что в (2.I8) входит релятивистский импульс. Поэтому, как и выше, $\sigma^{\text{рел}}_{\text{АБ}} = \sqrt{1-\beta^2}\,\sigma^{\text{нерел}}_{\text{АБ}}$.

Резюмируем: выражения (2.I5)-(2.I7) представляют собой релятивистские АБ-амплитуды, отвечающие релятивистскому граничному условию (2.II).

3. Рассмотрим тороидальный соленоид $(\rho-d)^2+z^2=R^2$. Вне соленоида $\vec{H}=0$, но $\vec{A}\neq 0$. Внутри соленоида отлична от нуля только одна компонента H ($H_\varphi = g/\rho$). Константа g следующим образом связана с потоком Φ магнитного поля через поперечное сечение соленоида: $g=\frac{1}{2\pi}\Phi\cdot(d-\sqrt{d^2-R^2})^{-1}$. В кулоновской калибровке отличны от нуля две сферические компоненты (A_r и A_θ). На больших расстояниях они убывают как r^{-3} /I0,I3,I4/:

$$A_r \approx \frac{\pi g d R^2}{2r^3}\cos\theta\ ,\quad A_\theta \approx \frac{\pi g d R^2}{4r^3}\sin\theta .$$

Приведем в явном виде компоненты в.п. для бесконечно тонкого соленоида /I3,I4/:

$$A_\theta = \frac{R^2 g}{2(dr\sin\theta)^{3/2}}\,\frac{1}{\operatorname{sh}\mu}\cdot\left[d\cdot\sin\theta\cdot Q^{1}_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu)-r\,Q^{1}_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu)\right],$$

$$A_r = -\frac{R^2 g d\cos\theta}{2(dr\sin\theta)^{3/2}}\,\frac{1}{\operatorname{sh}\mu}\cdot Q^{1}_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu)\ ,\quad \operatorname{ch}\mu=\frac{r^2+d^2}{2dr\sin\theta}.$$

Окружим соленоид непроницаемой сферой S радиуса R_0. Непроницаемости можно добиться, потребовав обращения в нуль нормальной к поверхности S составляющей нерелятивистского тока вероятности

$$j_r=\frac{\hbar}{2i\mu}\left(\bar\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\Psi\frac{\partial\bar\Psi}{\partial r}\right)-\frac{e}{\mu c}A_r|\Psi|^2=0 \ \text{при}\ \ \rho=R \quad (3.I)$$

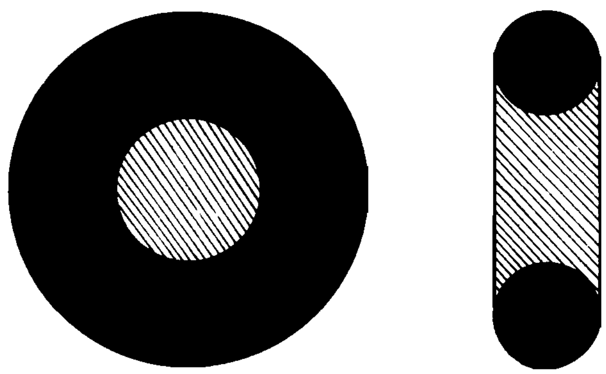
(последующее рассмотрение справедливо и в релятивистском случае). Возникает вопрос: достаточно ли условия непроницаемости (3.I) для отсутствия наблюдаемых эффектов, обязанных отличию от нуля вектор-потенциала вне соленоида? Заметим, что с помощью унитарного преобразования

$$\Psi=\Psi'\exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right),\quad \vec{A}=\operatorname{grad}\chi, \qquad (3.2)$$

можно было бы обратить в.п. в нуль вне соленоида (и следовательно, вне сферы S). Поскольку χ - разрывна (для тороидального соленоида $(\rho-d)^2+z^2=R^2$ она меняется от $-\frac{1}{2}\Phi$ до $\frac{1}{2}\Phi$ при переходе через круг радиуса $d-R$, лежащий в плоскости $z=0$ /I4/), то Ψ' - разрывное решение уравнения Шредингера (или уравнения Дирака) с нулевым в.п.:

$$\Psi'(\rho\le d-R, z=0-)=\exp\left(-\frac{ie\Phi}{\hbar c}\right)\Psi'(\rho\le d-R, z=0+). \qquad (3.3)$$

Преобразование (3.2) становится непрерывным, если $\Psi=\Psi'=0$ в месте разрывности χ функции. При этом условие разрывности (3.3) тривиализуется ($0=0$) и (3.2) превращается в унитарное преобразование между однозначными в.п. при $\vec{A}=0$ и $\vec{A}\neq 0$. В этом случае отличие от нуля в.п. не приводит к наблюдаемым эффектам. Это случится, например, при наличии внутри сферы S бесконечного отталкивательного потенциала. Из условия (3.I) вовсе не следует, что $\Psi=0$ внутри S, поэтому преобразованием (3.2) воспользоваться не удается. К счастью, существует в.п. /9,I0/, отличный от нуля только в непосредственной окрестности тороидального соленоида и дающий то же магнитное поле, что и в.п., полученный в работе /I3/. Именно, отлична от нуля только одна компонента A'_z, равная $g\ln\frac{d+\sqrt{R^2-z^2}}{\rho}$ внутри соленоида. Вне соленоида она отлична только в области $|z|<R$, $0\le\rho\le d-\sqrt{R^2-z^2}$ (заштрихована на рисунке), где она равна $A'_z=g\ln\frac{d+\sqrt{R^2-z^2}}{d-\sqrt{R^2-z^2}}$. Для бесконечно тонкого соленоида ($R\ll d$) в.п. сводится к $A'_z=\Phi\cdot\Theta(d-\rho)\,\delta(z)$.



Вектор-потенциал тороидального соленоида в некулоновской калибровке. Область, где $H\neq 0$, зачернена. Вне соленоида вектор-потенциал отличен от нуля только в заштрихованной области.

в.п. $\vec{A}$ и $\vec{A}'$ связаны однозначным и непрерывным калибровочным преобразованием ($\oint A_l \, dl = \oint A'_l \, dl = \Phi$ для любого замкнутого контура, проходящего через отверстие соленоида): $\vec{A} = \vec{A}' + \mathrm{grad}\,\alpha$. В явном виде функция α приведена в работе /14/. Поскольку переход от в.п. $\vec{A}$ к $\vec{A}'$ (сосредоточенного в окрестности соленоида) совершается с помощью калибровочного преобразования, не изменяющего свойств непрерывности и однозначности в.ф., то при условии непроницаемости (3.1) отсутствуют наблюдаемые эффекты.

Литература

1. Aharonov Y. Bohm D. -Phys. Rev., 1959, 115, 485.
2. Takabajasi T. - Hadr. J. Suppl., 1985, 1, 219.
3. Levy - Leblond J.M. -Phys. Lett., 1987, A125, 441.
4. Razavy M. - Phys. Rev., 1989, A40, 1.
5. Bose S.K. - Indian J. Phys., 1987, B61, 274.
6. Percoco U. and Villalba V.M. - Phys. Lett., 1989, A140, 105.
7. Peshkin M. and Tonomura A.-The Aharonov - Bohm effect, 1989 (Berlin e.a., Springer).
8. Tassie L.J.-Phys. Lett., 1963, 5, 43.
9. Любошиц В.Л., Смородинский Я.А.-ЖЭТФ, 1978, 75, 40.
10. Afanasiev G.N.-J. Phys., 1988, A21, 2095.
11. Афанасьев Г.Н., Шилов В.М. -ОИЯИ, Р4-88-841, Дубна, 1988; Афанасьев Г.Н. - ОИЯИ, Р4-89-357, Дубна, 1989.
12. Thomas A.W.-In.: Adv. in Nucl. Phys., 1, 1984, v. 13, p. 1-137. (New York, Plenum).
13. Afanasiev G.N. - J. Comput Phys., 1987, 69, 196.
14. Афанасьев Г.Н. - ЭЧАЯ, 1990, т. 21, вып. 1, с. 172.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1989 года.

Афанасьев Г.Н. Р2-89-863
Как изменение условий непроницаемости
влияет на эффект Ааронова - Бома

Исследуется, как изменение условий непроницаемости в область, где магнитное поле $H \neq 0$, влияет на сечения рассеяния. Задача решается в рамках как релятивистской, так и нерелятивистской квантовой механики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Г.Г.Сандуковской

Afanas'ev G.N. P2-89-863
How Quantum Impenetrability Affects
the Aharonov-Bohm Scattering

We study how different definitions of quantum impenetrability change the Aharonov-Bohm cross sections. This fact should be taken into account in analysing the experimental data. Both the relativistic and nonrelativistic cases are considered and the simple mnemonic rule to obtain relativistic AB cross sections from the nonrelativistic ones is suggested.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989