сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-836

М.Н.Тентюков

СТРУКТУРА СОХРАНЯЮЩИХСЯ ТОКОВ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема энергии гравитационного поля продолжает привлекать к себе внимание специалистов. Удовлетворительного решения этой проблемы до сих пор не найдено, даже в определении интегральной энергии островной системы имеется ряд нерешенных вопросов /1,2/. Задача локализации импульсно-энергетических характеристик гравитационного поля в последнее время часто объявляется вообще бессмысленной /3-5/. Хотя и в этом направлении имеется некоторый прогресс, связанный с введением фоновой связности /6-8/, детальный анализ показывает, что трудности в теории остаются /9/.

В работах /9,10/ была предложена гипотеза о том, что гравитационное поле не переносит энергию, подобно тому, как электромагнитное поле, которое передает взаимодействие между зарядами, само зарядом не обладает. Эта гипотеза обосновывалась в /9/ таким образом: исследовалась структура сохраняющихся токов, получающихся в теории гравитации с фоновой связностью, после чего по аналогии с электромагнитным полем предполагалось, что наличие у токов Нетер подобной структуры означает отсутствие у поля соответствующего заряда. В настоящей работе это утверждение обосновывается более детально.

2. ТЕОРЕМА НЕТЕР И СТРУКТУРА СОХРАНЯЮЩИХСЯ ТОКОВ

Рассмотрим систему, описываемую полями ϕ^A, где A — коллективный индекс. Пусть уравнения для ϕ^A следуют из условия стационарности действия:

$$S = \int L\, d^4 x , \tag{1}$$

где L — лагранжиан.

В §1 знаменитой работы Э.Нетер /11/ было сформулировано следующее утверждение (первая теорема Нетер): если действие инвариантно относительно r — параметрической группы Ли G_r, то r линейно независимых комбинаций вариационных производных обращаются в дивергенции, то есть

$$\partial_j J^j_{(\lambda)} = \sum_A \Psi_A X^A_{(\lambda)}, \qquad \lambda = 1, \dots, r, \tag{2}$$

где $J^j_{(\lambda)}$ — выражения, впоследствии названные токами Нетер, $\Psi_A = \frac{\delta S}{\delta \phi^A}$ — вариационные производные, $X^A_{(\lambda)}$ — генераторы представления G_r, соответствующего преобразованиям ϕ^A под действием G_r.

Пусть действие (1) инвариантно относительно непрерывной группы, которая параметризуется p произвольными функциями координат. Будем обозначать такую группу $G_{p\infty}$. Если в группе $G_{p\infty}$ выделить подгруппу G_r, то согласно первой теореме Нетер будут иметь место r локальных законов сохранения.

В §6 той же работы [11] было сформулировано и доказано следующее утверждение: если G_r является подгруппой G_p, то токи $J^j_{(\lambda)}$ могут быть записаны в виде

$$J^j_{(\lambda)} = A^j_{(\lambda)} + B^j_{(\lambda)}, \tag{3}$$

где $A^j_{(\lambda)} = 0$ при $\Psi_A = 0$, а $B^j_{(\lambda)}$ обладает тем свойством, что $\partial_j B^j_{(\lambda)} \equiv 0$. Такие токи Нетер назвала несобственными. Если группа $G_{p\infty}$ не меняет функционального вида лагранжиана, что соответствует случаю отсутствия в лагранжиане фоновых полей, несобственные токи выражаются через производную антисимметричного суперпотенциала [12].

Пусть имеется некоторая группа G_Σ, содержащая в качестве подгрупп группы G_r и $G_{p\infty}$, причем действие G_r на динамические переменные должно получаться из действия $G_{p\infty}$ конкретизацией групповых параметров, то есть "представление" $G_{p\infty}$ в "пространстве" ϕ^A — это "подпредставление" $G_{p\infty}$.

В общем случае структура тока Нетер такова:

$$J^j_{(\lambda)} = A^j_{(\lambda)} + B^j_{(\lambda)} + C^j_{(\lambda)}, \tag{4}$$

где $A^j_{(\lambda)}$ и $B^j_{(\lambda)}$ были определены выше, а $C^j_{(\lambda)}$ — собственная часть тока. Заряд поля представляет собой первый интеграл уравнений движения, соответствующий некоторой однопараметрической группе инвариантности действия. Из (4) видно, что в случае $C^j_{(\lambda)} = 0$, то есть когда ток несобственный, формально вычисленный заряд становится тривиальным, так как он не связан с уравнениями движения.

За существование нетривиального заряда "отвечает" член $C^j_{(\lambda)}$. Именно он не позволяет расширить группу динамической инвариантности до бесконечно параметрической. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Если $C^j_{(\lambda)} = 0$, данная группа G_r может быть включена в качестве подгруппы в группу G_Σ, относительно которой действие инвариантно. Если $C^j_{(\lambda)} \neq 0$, данная группа G_r не может быть включена в качестве подгруппы в группу G_Σ, относительно которой действие инвариантно.

Далее мы увидим это на примере гравитационного поля. Но для исследования уравнений Эйнштейна необходимо использование корректного вариационного принципа.

3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ С ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Рассмотрим уравнения Эйнштейна в вакууме:

$$G_{ik} = 0, \tag{5}$$

где $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}$ — тензор Эйнштейна, $R = R_{ab} g^{ab}$ — скаляр кривизны, $R_{ik} = R^p_{pik}$ — тензор Риччи,

$$R^p_{\ell ik} = \partial_\ell \Gamma^p_{ik} - \partial_i \Gamma^p_{\ell k} + \Gamma^p_{\ell s} \Gamma^s_{ik} - \Gamma^p_{is} \Gamma^s_{\ell k} -$$

— тензор Римана — Кристоффеля,

$$\Gamma^p_{ik} = \frac{1}{2} g^{pa} (\partial_i g_{ak} + \partial_k g_{ai} - \partial_a g_{ik}) -$$

— символ Кристоффеля для g_{ik}.

Для применения к этим уравнениям алгоритмов Нетер надо подобрать подходящий лагранжиан. И вот тут начинаются осложнения, которые в конце концов приводят к тому, что в теорию приходится вводить фоновую связность [9]. Коэффициенты фоновой связности $\tilde{\Gamma}^i_{km}$ предполагаются симметричными, $\tilde{\Gamma}^i_{km} = \tilde{\Gamma}^i_{mk}$. Разность

$$P^i_{km} = \tilde{\Gamma}^i_{km} - \Gamma^i_{km} \tag{6}$$

образует тензор, называемый тензором аффинной деформации. При варьировании по g_{mn} действия

$$\tilde{S} = \int \tilde{L}\, d^4 x \tag{7}$$

с лагранжианом

$$\tilde{L} = \sqrt{-g}\, g^{mn} (P^a_{mb} P^b_{an} - P^a_{ba} P^b_{mn}) \tag{8}$$

получаются уравнения, которые совпадают с уравнениями Эйнштейна (5), если на фоновую связность наложить условие

$$\breve{R}_{(ik)} = 0\,, \tag{9}$$

где $\breve{R}_{ik}$ — тензор Риччи фоновой связности.

Теперь рассмотрим лагранжиан общего вида

$$L = L\,(g_{mn}\,;\,\partial_k g_{mn}\,;\,\breve{\Gamma}^k_{mn})\,. \tag{10}$$

Фоновая связность предполагается симметричной.

Обозначим через $\breve{\nabla}_k$ производную, ковариантную по отношению к фоновой связности.

Определим формально следующие величины:

$$t^k_a = \frac{\partial L}{\partial g_{mn,k}}\,\breve{\nabla}_a g_{mn} - L\,\delta^k_a\,; \tag{11}$$

$$\sigma^{jk}_a = \frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}}\,(g_{ma}\,\delta^k_n + g_{na}\,\delta^k_m)\,; \tag{12}$$

$$\Psi^{mn} = 2\frac{\delta S}{\delta g_{mn}} = 2\left(\frac{\partial L}{\partial g_{mn}} - \partial_j\,\frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}}\right); \tag{13}$$

$$\Theta^{mn}_k = \frac{\delta S}{\delta \breve{\Gamma}^k_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial \breve{\Gamma}^k_{mn}}\,; \tag{14}$$

где

$$S = \int L\, d^4 x - \tag{15}$$

— функционал действия, запятая перед индексом означает частную производную. О смысле введенных величин см. /13/ или /9/.

Действие S инвариантно относительно вариаций Ли с произвольным векторным полем ξ^j:

$$\delta x^j = \epsilon\,\xi^j\,; \tag{16}$$

$$\delta \breve{\Gamma}^k_{mn} = -(\breve{\nabla}_m\breve{\nabla}_n(\epsilon\,\xi^k) + \breve{R}^k_{amn}\,(\epsilon\,\xi^a))\,; \tag{17}$$

$$\delta g_{mn} = -\,(g_{ma}\,\breve{\nabla}_n(\epsilon\,\xi^a) + g_{na}\,\breve{\nabla}_m(\epsilon\,\xi^a) + \epsilon\,\xi^a\,\breve{\nabla}_a g_{mn})\,. \tag{18}$$

Здесь ϵ — инфинитезимальный параметр, $\breve{R}^k_{amn}$ — тензор кривизны фоновой связности.

Однако инвариантность S относительно (16)-(18) точнее следовало бы назвать ковариантностью, поскольку группа симметрии, нетривиально действуя на нединамические поля (фоновую связность), меняет функциональный вид лагранжиана.

Пусть фоновая связность допускает r-параметрическую группу движений, а $\xi^j_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, \ldots, r$, генерируют эту группу, то есть удовлетворяют уравнению

$$\breve{\nabla}_m\breve{\nabla}_n\,\xi^k_{(\lambda)} + \breve{R}^k_{amn}\,\xi^a_{(\lambda)} = 0\,. \tag{19}$$

Тогда бесконечно малые преобразования группы инвариантности действия имеют вид

$$\delta x^j = \epsilon^{(\lambda)}\,\xi^j_{(\lambda)}\,; \tag{20}$$

$$\delta g_{mn} = -(g_{ma}\,\breve{\nabla}_n(\epsilon^{(\lambda)}\,\xi^a_{(\lambda)}) + g_{na}\,\breve{\nabla}_m(\epsilon^{(\lambda)}\xi^a_{(\lambda)}) + \epsilon^{(\lambda)}\xi^a_{(\lambda)}\,\breve{\nabla}_a g_{mn})\,. \tag{21}$$

Согласно первой теореме Нетер будут иметь место тождества /9/:

$$\partial_j\, J^j_{(\lambda)} = X_{mn(\lambda)}\,\Psi^{mn}\,, \tag{22}$$

где

$$J^j_{(\lambda)} = \sigma^{jk}_a\,\breve{\nabla}_k\,\xi^a_{(\lambda)} + t^j_a\,\xi^a_{(\lambda)}\,; \tag{23}$$

$$X_{mn(\lambda)} = -\frac{1}{2}\,\xi^a_{(\lambda)}\,\breve{\nabla}_a g_{mn} - g_{ma}\,\breve{\nabla}_n\,\xi^a_{(\lambda)}\,. \tag{24}$$

4. ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ И СТРУКТУРА ТОКОВ

Пусть теперь действие S инвариантно не только по отношению к (20)-(21), но и по отношению к группе, генерируемой бесконечно малыми преобразованиями динамических полей:

$$\delta_K g_{mn} = -(g_{ma}\,\breve{\nabla}_n(\delta\nu^{(\lambda)}\xi^a_{(\lambda)}) + g_{na}\,\breve{\nabla}_m(\delta\nu^{(\lambda)}\,\xi^a_{(\lambda)}) + \xi^a_{(\lambda)}\,\delta\nu^{(\lambda)}\breve{\nabla}_a g_{mn}). \tag{25}$$

где $\delta\nu^{(\lambda)}$ — произвольные инфинитезимальные функции координат, исчезающие на границе области интегрирования. Тогда

$$\delta_K S = \int \frac{\delta S}{\delta g_{mn}} \delta_K g_{mn} d^4 x = 0 . \tag{26}$$

Подставляя сюда выражение для $\delta_K g_{mn}$(25), получаем

$$\int \Psi^{mn}\left(-\frac{1}{2}\delta\nu^{(\lambda)}\xi^s_{(\lambda)}\check{\nabla}_s g_{mn} - g_{ms}\check{\nabla}_n(\delta\nu^{(\lambda)}\xi^s_{(\lambda)})\right) d^4 x = 0 . \tag{27}$$

Для преобразования подынтегральной величины воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$\begin{aligned}\Psi^{mn}\left(-\frac{1}{2}\delta\nu^{(\lambda)}\xi^s_{(\lambda)}\check{\nabla}_s g_{mn} - g_{ms}\check{\nabla}_n(\delta\nu^{(\lambda)}\xi^s_{(\lambda)})\right) &= \\ = \delta\nu^{(\lambda)}\xi^n_{(\lambda)}\nabla_m\Psi^m_n - \check{\nabla}_m(\Psi^m_n\delta\nu^{(\lambda)}\xi^n_{(\lambda)}) ,\end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\Psi^k_a = \Psi^{km} g_{ma} ; \tag{29}$$

∇_k — ковариантная по отношению к символам Кристоффеля производная. Поскольку Ψ^{mn} — тензорная плотность веса +1, последний член в правой части (28) имеет вид обычной дивергенции и, так как на границе области интегрирования $\delta\nu^{(\lambda)} = 0$, может быть отброшен. Остается

$$\int \delta\nu^{(\lambda)}\xi^j_{(\lambda)}\nabla_a\Psi^a_j d^4 x = 0 . \tag{30}$$

В силу произвольности $\delta\nu^{(\lambda)}$ отсюда следует, что

$$\xi^j_{(\lambda)}\nabla_a\Psi^a_j = 0 . \tag{31}$$

Если в (28) положить $\delta\nu^{(\lambda)} \equiv 1$, то левая часть (31) совпадает с правой частью (22). Следовательно,

$$\partial_j J^j_{(\lambda)} = \xi^j_{(\lambda)}\nabla_a\Psi^a_j - \check{\nabla}_k(\Psi^k_a\xi^a_{(\lambda)}) , \tag{32}$$

а так как справедливо (31), получаем, что

$$\partial_j J^j_{(\lambda)} = -\check{\nabla}_j(\Psi^j_a\xi^a_{(\lambda)}) \equiv \partial_j(-\Psi^j_a\xi^a_{(\lambda)}) . \tag{33}$$

Отсюда

$$J^j_{(\lambda)} = -\Psi^j_a\xi^a_{(\lambda)} + B^j_{(\lambda)} , \tag{34}$$

где

$$\partial_j B^j_{(\lambda)} \equiv 0 .$$

То есть из инвариантности действия относительно (25) следует, что токи Нетер, соответствующие (20)-(21), несобственные.

Теперь исследуем обращение этого утверждения. Рассмотрим нетеровский ток общего вида (12). Пусть $A^j_{(\lambda)} = -\Psi^j_a\xi^a_{(\lambda)}$. Покажем, что если $C^j_{(\lambda)} = 0$, то группа инвариантности действия G_r может быть расширена до группы G_Σ, определенной в конце раздела 2.

Преобразуем выражение (22) с учетом (29) в (32). Имеем

$$\partial_j J^j_{(\lambda)} = \xi^a_{(\lambda)}\nabla_k\Psi^k_a - \partial_j(\Psi^j_a\xi^a_{(\lambda)}) , \tag{35}$$

или

$$\partial_j(B^j_{(\lambda)} - \Psi^j_a\xi^a_{(\lambda)} + C^j_{(\lambda)}) = \xi^a_{(\lambda)}\nabla_k\Psi^k_a - \partial_j(\Psi^j_a\xi^a_{(\lambda)}) . \tag{36}$$

Так как $\partial_j B^j_{(\lambda)} \equiv 0$, выражение (36) в случае $C^j_{(\lambda)} = 0$ переходит в

$$\xi^a_{(\lambda)}\nabla_k\Psi^k_a = 0 . \tag{37}$$

Это означает, что между уравнениями $\Psi^{mn} = 0$ имеется r тождеств, которые можно символически записать в виде

$$\int \Psi^{mn}(x')\Lambda_{mn(\lambda)}(x', x) d^4 x' = 0 , \tag{38}$$

где $\Lambda_{mn(\lambda)}$ — генераторы, равные

$$\Lambda_{mn(\lambda)}(x', x) = -\xi_{(\lambda)(m}(x)\nabla_{n)}\delta(x' - x) . \tag{39}$$

Здесь $\xi_{(\lambda)m} = g_{ma}\xi^a_{(\lambda)}$; $\nabla_n\delta(x' - x)$ — ковариантная производная четырехмерной δ-функции по x'. Рассмотрим бесконечно малые преобразования

$$\delta_\Lambda g_{mn}(x) = \int \Lambda_{mn(\lambda)}(x, x')\delta\nu^{(\lambda)}(x')d^4 x , \tag{40}$$

где $\delta\nu^{(\lambda)}$ — произвольные инфинитезимальные функции координат, исчезающие на границе области интегрирования. Подставляя (39) в (40) и беря интеграл, получаем

$$\delta_\Lambda g_{mn}(x) = -\frac{1}{2}\left(g_{ma}\nabla_n(\delta\nu^{(\lambda)}\xi^a_{(\lambda)}) + g_{na}\nabla_m(\delta\nu^{(\lambda)}\xi^a_{(\lambda)})\right). \qquad (41)$$

Найдем вариацию действия

$$\delta_\Lambda S = \int \frac{1}{2}\Psi^{mn}\delta_\Lambda g_{mn} d^4x. \qquad (42)$$

Подставляя в (42) выражение (40), получаем, что

$$\delta_\Lambda S = \int \delta\nu^{(\lambda)}(x')\, d^4x' \int \frac{1}{2}\Psi^{mn}(x)\Lambda_{mn(\lambda)}(x,x')\, d^4x = 0.$$

То есть действие инвариантно относительно группы, генерируемой преобразованиями (41). Однако не все генераторы (39) независимы и не все параметры $\delta\nu^{(\lambda)}$ существенны. Независимыми генераторы будут, если система уравнений

$$\int \Lambda_{mn(\lambda)}(x,x')\,\delta\nu^{(\lambda)}(x')\, d^4x' = 0 \qquad (43)$$

имеет для произвольных значений g_{mn} единственное решение $\delta\nu^{(\lambda)} = 0$.

Подставляя в (43) определение (39) и беря интеграл, получаем

$$\nabla_{(n}(\xi_{(\lambda)m)}\delta\nu^{(\lambda)}) = 0. \qquad (44)$$

Как видим, левая часть (44) с точностью до множителя совпадает с правой частью (41). Следовательно, условие того, что все параметры $\delta\nu^{(\lambda)}$ в преобразованиях (41) существенны, совпадает с условием единственности решения $\delta\nu^{(\lambda)} = 0$ системы (44).

Рассмотрим произвольную точку M, принадлежащую области интегрирования. Обозначим через Q_M орбиту точки M, то есть множество всех точек области, которые могут быть переведены в точку M преобразованиями группы G_r.

Пусть среди векторных полей $\xi_{(\lambda)}$ имеются ровно m, равных нулю в точке M. Без потери общности можно считать, что равны нулю поля $\xi_{(\rho)}$, $\rho = 1, \ldots, m$. Это означает, что $\xi_{(\rho)}$ образуют алгебру Ли стационарной подгруппы точки M. В дифференциальной геометрии стационарная подгруппа чаще называется группой изотропии точки M. Будем обозначать ее через H_M.

Итак, векторные поля $\xi_{(\gamma)}$, $\gamma = m+1, \ldots, r$, не равны нулю в точке M. Следует заметить, что в общем случае эти векторные поля не образуют алгебру Ли. Докажем, что в некоторой окрестности точки M они образуют базис орбиты Q_M.

В самом деле, поскольку $\xi_{(\lambda)}$ образуют алгебру Ли, по теореме Фробениуса /14/ их интегральные кривые составляют семейство подмногообразий исходного многообразия, каждая точка которого принадлежит какому-то подмногообразию семейства. Это подмногообразие — не что иное, как орбита точки. Линейная оболочка, натянутая на $\xi_{(\lambda)}$ в точке M, будет касательным к Q_M пространством. Обозначим его через T_M. Поскольку $\xi_{(\rho)}|_M = 0$, T_M будет совпадать с линейной оболочкой $\xi_{(\gamma)}|_M$. Далее, Q_M, по определению, однородно относительно действия G_r. Поэтому Q_M изоморфно G_r/H_M — фактор-пространству группы движений по группе изотропии. Значит, $\dim Q_M = \dim G_r - \dim H_M = r - m = p$. Следовательно, размерность линейной оболочки $\xi_{(\gamma)}|_M$ равна количеству векторов $\xi_{(\gamma)}$, а это значит, что они образуют в точке M базис T_M.

Векторные поля $\xi_{(\gamma)}$ предполагаются дифференцируемыми, поэтому существует некоторая окрестность U_M точки M, в которой они остаются линейно независимыми, а так как их интегральные кривые целиком принадлежат Q_M, то в U_M векторные поля $\xi_{(\gamma)}$ образуют базис Q_M.

Рассмотрим векторное поле $\eta^m = \xi^m_{(\gamma)}\delta\nu^{(\gamma)}$. В U_M любое векторное поле, касательное к Q_M, может быть разложено с некоторыми (переменными) коэффициентами по векторным полям $\xi_{(\gamma)}$. Следовательно, любое наперед заданное векторное поле, касательное к Q_M, в окрестности точки M может быть получено из η^m подходящим выбором $\delta\nu^{(\gamma)}$. Это означает, что генератор произвольного диффеоморфизма Q_M имеет в точке M вид $\xi_{(\gamma)}\delta\nu^{(\gamma)}$.

Вернемся к (44). Как только что было показано, в окрестности точки M любое векторное поле, касательное к Q_M, может быть разложено по полям $\xi_{(\gamma)}$. Поле $\xi_{(\lambda)}\delta\nu^{(\lambda)}$ для любых $\delta\nu^{(\lambda)}$ будет касательным к Q_M, так как все $\xi_{(\lambda)}$ касательны к Q_M. Поэтому для любого $\delta\nu^{(\lambda)}$ можно подбирать такие $\delta\overset{*}{\nu}^{(\gamma)}$, что $\xi_{(\lambda)}\delta\nu^{(\lambda)} = \xi_{(\gamma)}\delta\overset{*}{\nu}^{(\gamma)}$ в некоторой окрестности точки M. Тогда (44) примет вид

$$\nabla_{(n}(\xi_{(\gamma)m)}\delta\overset{*}{\nu}^{(\gamma)}) = 0. \qquad (45)$$

Но (45) — это уравнение Киллинга для ковекторного поля $\overset{*}{\eta}_m = \xi_{(\gamma)m}\delta\overset{*}{\nu}^{(\gamma)}$. Так как у произвольного метрического тензора векторов Киллинга нет, единственным решением (45) будет $\overset{*}{\eta}_m = 0$, откуда в силу линейной независимости $\xi_{(\gamma)}$ получаем $\delta\overset{*}{\nu}^{(\gamma)} = 0$.

Резюмируя сказанное, заключаем, что группа, генерируемая бесконечно малыми преобразованиями (41), имеет p существенных параметров, зависящих от координат, то есть это группа $G_{p\infty}$. Она представляет собой группу таких отображений метрики, которые соответствуют произвольным диффеоморфизмам орбит. Под диффеоморфизмами орбит понимаются диффеоморфизмы всего многообразия, такие, что интегральные кривые генерирующих векторных полей не покидают орбит. Следует подчеркнуть, что элементы группы $G_{p\infty}$ — не диффеоморфизмы, поскольку они не действуют на координаты. Это именно отображения метрики.

Итак, если $C^{j}_{(\lambda)} = 0$, группа G_r может быть расширена до группы G_Σ, включающей в качестве подгруппы $G_{p\infty}$. Нетрудно убедиться в том, что $G_\Sigma = G_r \rtimes G_{p\infty}$, где значок $\rtimes$ означает полупрямое произведение. В самом деле, $G_{p\infty}$ инвариантна в G_Σ, декартово произведение $G_r \times G_{p\infty}$ снабжается умножением с системой автоморфизмов $G_{p\infty}$, зависящих от G_r, а пересекаться G_r и $G_{p\infty}$ как подгруппы G_Σ могут только по единице, так как $G_{p\infty}$ не действует на координаты.

Декартово произведение G_r и $G_{p\infty}$ представляет собой множество всевозможных (упорядоченных) пар $(g; g_\infty)$, где g — элемент G_r, а g_∞ — элемент $G_{p\infty}$. Пусть g_1 и g_2 — элементы G_r, $g_{1\infty}$ и $g_{2\infty}$ — элементы $G_{p\infty}$. Действие пары $(g; g_\infty)$ на $\{x^j; g_{mn}(x)\}$ состоит в последовательном применении к $\{x^j; g_{mn}(x)\}$ операций g_∞ и g. Поэтому для получения групповой структуры декартово произведение $G_r \times G_{p\infty}$ следует снабдить умножением по схеме

$$(g_1; g_{1\infty}) \rtimes (g_2; g_{2\infty}) = (g_1 g_2; g_{1\infty}^{g_2} g_{2\infty}), \tag{46}$$

где $g_{1\infty}^{g_2} = g_2^{-1} g_{1\infty} g_2$ — внутренний автоморфизм $G_{p\infty}$. Декартово произведение с умножением (46) как раз и означает полупрямое произведение.

Уравнения Эйнштейна (5) получаются в результате варьирования действия с лагранжианом (8) при условии (9) на фоновую связность. Наличие группы движений фоновой связности обеспечивает существование некоторых законов сохранения, связанных с пространственно-временными симметриями. Но, как показано в /9/, соответствующие токи будут несобственными, следовательно, эти законы сохранения вырождаются в тривиальные. При этом действие группы движений на динамические переменные может быть расширено до бесконечнопараметрической группы преобразований. Если мы хотим среди законов сохранения иметь такие, которые при желании можно было бы интерпретировать как законы сохранения энергии-импульса, группа движений должна содержать четыре абелевых подгруппы, а это значит, что она будет действовать транзитивно. Орбитой произвольной точки окажется все многообразие, и бесконечномерным расширением группы движений будут действия на g_{mn} произвольных диффеоморфизмов. Это хорошо известная динамическая инвариантность уравнений Эйнштейна, обычно понимаемая как следствие их общей ковариантности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на наличие хорошо известной динамической инвариантности уравнений Эйнштейна вопрос о построении законов сохранения оставался открытым, так как для применения алгоритмов Нетер необходимо было подобрать подходящий лагранжиан. После того, как выяснилось, что в лагранжиан обязательно должна войти фоновая связность, появились надежды на то, что проблема локализации импульсно-энергетических характеристик гравитационного поля будет решена. Как видим, эти надежды не оправдались: $G_{4\infty}$ — инвариантность уравнений Эйнштейна остается справедливой и для действия, что приводит к несобственности сохраняющихся величин

Вопрос о физическом смысле фоновой связности остается открытым, хотя попытки дать ей физическую интерпретацию уже предпринимаются /15, 16/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мицкевич Н.В. и др. — Динамика полей в общей теории относительности. М.: Энергоатомиздат, 1985, с. 169.
2. Нестеров А.И. — Препринт № 461Ф ИФ СО АН СССР, Красноярск, 1987.
3. Девитт Б.С. — Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987, с.178.
4. Penrose R. — In: Semunar on Differential Geometry, by Shing-Ting Yau, Princeton, USA, 1982, p. 631.
5. Фаддеев Л.Д. — УФН, 1982, т. 136, вып. 3, с.435.
6. Черников Н.А. — Сообщение ОИЯИ Р2-87-683, Дубна, 1987.
7. Черников Н.А. — Препринт ОИЯИ Р2-88-27, Дубна, 1988.
8. Черников Н.А. — Препринт ОИЯИ Р2-88-778, Дубна, 1988.
9. Тентюков М.Н. — Препринт ОИЯИ Р2-89-95, Дубна, 1989.
10. Леффельхольц Ю., Пестов А. — Acta Physica Polonica, 1988, v. B19, No.7, p.553; Препринт ОИЯИ Р2-87-503, Дубна, 1987.
11. Нетер Э. — В кн.: Вариационные принципы механики. М.: Госиздат физ-мат. лит-ры, 1959, с. 611.
12. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. — Fortschr. Phys., 1983, 31, 10, p. 535.
13. Тентюков М.Н. — Сообщение ОИЯИ Р2-88-182, Дубна, 1988.
14. Шутц Б. — Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984, с.106.
15. Капусцик Э. — В сб.: Гравитационная энергия и гравитационные волны.ОИЯИ, Р2-89-138, Дубна, 1989, с.24.
16. Капусцик Э. — Труды рабочего совещания по разработке и созданию излучателя и детектора гравитационных волн. ОИЯИ, Д4-89-221, Дубна, 1989, с.18.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 декабря 1989 года.