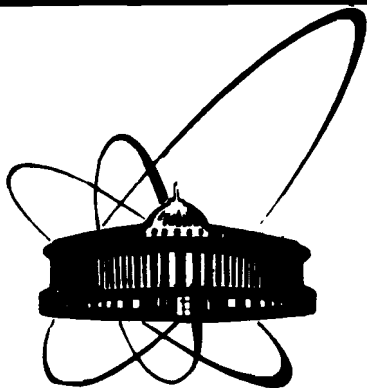


89-796



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

M 69

P2-89-796

С. В. Михайлов\*, А. В. Радюшкин

ПРОЦЕСС  $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$   
И НЕЛОКАЛЬНОСТЬ КОНДЕНСАТОВ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

---

\* Ростовский государственный университет,  
Ростов-на-Дону

1989

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается формфактор перехода  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0 F_{\gamma\pi}(Q^2)$  в  $\gamma^*\gamma^*$ -подпроцессе  $\ell\ell \rightarrow \ell\ell\pi^0$  при различных пространственно-подобных виртуальностях ( $q_1^2, q_2^2 < 0$ ) фотонов. Процессы этого типа ( $\gamma^*\gamma^* \rightarrow$  адроны) вызывают сейчас серьезный интерес со стороны экспериментаторов<sup>/1/</sup>, в частности, в DESY<sup>/2/</sup>. Например, формфактор  $F_{\gamma\pi}$  фиксирует амплитуду процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\pi^0$ . Первые расчеты формфактора  $\Phi/F_{\gamma\pi}$  были проведены в рамках пертурбативной КХД при асимптотически большой виртуальности одного из фотонов<sup>/3/</sup>. В работе<sup>/4/</sup> рассмотрен вариант равных виртуальностей  $|q_1^2| = |q_2^2|$ , симметричный случай/. Полные  $O(\alpha_s)$ -поправки в асимптотическом пределе  $F_{\gamma\pi}$  в общей кинематике получены в<sup>/5/</sup>. В работе<sup>/6/</sup> для симметричного случая сравнивается пертурбативный подход со стандартной версией КХД правил сумм /ПС/<sup>/7,8/</sup> применительно к ФФ  $F_{\gamma\pi}$ , продемонстрирована взаимосогласованность подходов в пограничной области. Наконец, в работе<sup>/9/</sup>, в несимметричном случае получены ПС для ФФ с учетом нелидирующего кваркового вакуумного среднего /BC/ размерности 8. Установлено, в частности, что такие ПС работают в ограниченной кинематической области  $\omega = (q_1^2 - q_2^2) / (q_1^2 + q_2^2) \lesssim 0,5$ .

Настоящая работа, развивая результаты<sup>/9/</sup>, является логическим продолжением наших статей<sup>/10,11/</sup>, в которых обосновывается необходимость введения нелокальных конденсатов и строятся обобщенные ПС для волновой функции /ВФ/ пиона. В работах<sup>/10,11/</sup> обнаружено, что моменты  $\Phi_\pi(x)$  весьма чувствительны к форме координатной зависимости нелокальных конденсатов. Даже грубый учет параметров, характеризующих форму этих функций, например их конечную ширину  $1/\lambda_q$ , существенно меняет вид  $\Phi_\pi(x)$ . Та же чувствительность характерна и для  $F_{\gamma\pi}$ . Ограниченные области применимости ПС /по  $\omega$ / является принципиальным для стандартного подхода. Нелокальная версия КХД ПС позволяет распространить метод почти на все  $\omega$ . Отмеченная чувствительность  $F_{\gamma\pi}$  от ширины  $1/\lambda_q$  проявляется при  $\omega \sim 0,9^*$ . А эксперимент по определению  $F_{\gamma\pi}$  в этой области мог бы служить "измерителем" параметра нелокальности  $\lambda_q^2$ .

\* На высокую чувствительность  $F_{\gamma\pi}$  от формы ВФ при  $\omega \sim 1$  обратили внимание авторы<sup>/3/</sup>

## 2. СТРУКТУРА ФОРМФАКТОРА

Формфактор  $F_{\gamma\pi}$  процесса  $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$  определяется из соотношения

$$i \int d^4 x e^{iq_1 x} \langle \pi^0(P) | T(J_\mu(x) J_\nu(0)) | 0 \rangle = \epsilon_{\mu\nu\rho\beta} q_1^\rho q_2^\beta F_{\gamma\pi}, \quad /1/$$

где  $q_1, q_2$  - импульсы фотонов ( $q_1^2, q_2^2 < 0$ ),  $P = q_1 + q_2$ ;  $J_\mu$  - кварковый электромагнитный ток

$$J_\mu = (e_u \bar{u} \gamma_\mu u - e_d \bar{d} \gamma_\mu d).$$

В основу ПС для формфактора  $F_{\gamma\pi}$  может быть положен трехточечный коррелятор  $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$  /см., например, <sup>6,9/</sup>, связанный с амплитудой /1/

$$\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}(q_1, q_2) = \int d^4 x d^4 y \exp(iq_1 x + iq_2 y) \langle T(J_\mu(x) J_\nu(y) j_\alpha(0)) \rangle, \quad /2/$$

где  $j_\alpha$  - аксиальный ток, проекция которого на однопионное состояние

$$j_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u} \gamma_5 \gamma_\alpha u - \bar{d} \gamma_5 \gamma_\alpha d); \quad \langle 0 | j_\alpha | \pi(P) \rangle = -i P_\alpha f_\pi$$

отлична от нуля. Общая структура  $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$  в несимметричной кинематике имеет вид

$$\begin{aligned} & (P_\alpha \cdot \tilde{F}_1 + Q_\alpha \cdot \tilde{A}_1) \epsilon_{\mu\nu\beta\rho} q_1^\beta q_2^\rho + \epsilon_{\mu\nu\alpha\rho} [P^\rho ((PQ) \tilde{F}_3 + P^2 \tilde{A}_3) + Q^\rho ((PQ) \tilde{F}_2 + \\ & + P^2 \tilde{A}_2)] + [\epsilon_{\mu\alpha\beta\rho} (q_2 \tilde{F}_4 + q_1 \tilde{F}_5)_\nu - \epsilon_{\nu\alpha\beta\rho} (q_1 \tilde{F}_4 + q_2 \tilde{F}_5)_\mu] q_1^\beta q_2^\rho + \\ & + [\epsilon_{\mu\alpha\beta\rho} (q_2 \tilde{A}_4 + q_1 \tilde{A}_5)_\nu + \epsilon_{\nu\alpha\beta\rho} (q_1 \tilde{A}_4 + q_2 \tilde{A}_5)_\mu] q_1^\beta q_2^\rho. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{F}_i \equiv \tilde{F}_i(q_1^2, q_2^2)$  - симметричная функция аргументов,  $\tilde{A}_i$  - антисимметричная,  $Q_\nu = 1/2(q_1 - q_2)_\nu$ . Используя тождество

$$\begin{aligned} P_\alpha \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} q_1^\rho q_2^\delta - (q_{2\nu} \epsilon_{\mu\alpha\gamma\delta} - q_{1\mu} \epsilon_{\nu\alpha\gamma\delta}) q_1^\gamma q_2^\delta - (q_{1\nu} \epsilon_{\mu\alpha\gamma\delta} - \\ - q_{2\mu} \epsilon_{\nu\alpha\gamma\delta}) q_1^\gamma q_2^\delta + \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} Q^\rho P^2 + \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} P^\rho (PQ) = 0 \end{aligned} \quad /3/$$

и условия градиентной инвариантности  $q_1^\mu \mathcal{F}_{\alpha\mu\nu} = q_2^\nu \mathcal{F}_{\alpha\mu\nu} = 0$ , получим окончательное выражение для  $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$ :

$$(P_\alpha F_1 + Q_\alpha A_1) \epsilon_{\mu\nu\rho\beta} q_1^\rho q_2^\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\rho} \{ Q^\rho [2(PQ) A_2 + (q_1^2 + q_2^2) F_2] +$$

$$+ \frac{1}{2} P^\rho [(q_1^2 + q_2^2) A_3 - 2(PQ) F_3] \} + \quad /4/$$

$$+ \{ \epsilon_{\alpha\mu\beta\rho} q_{2\nu} (F_2 + A_3) - \epsilon_{\alpha\nu\beta\rho} q_{1\mu} (F_2 - A_3) \} q_1^\beta q_2^\rho.$$

Здесь  $F_1 = \tilde{F}_1 + \tilde{F}_5$ ,  $A_1 = \tilde{A}_1 + 2\tilde{A}_5$  и т.п. Далее, приводя выражения для различных диаграмм к виду /4/, будем выделять из  $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$  лишь структуру  $F_1$ , отвечающую ФФ  $F_{\gamma\pi}$  <sup>6,9/</sup>.

Воспользовавшись дисперсионным соотношением для  $F$  и проводя преобразование Бореля / $\hat{B}(s, M^2)$ ,  $M^2$  - борелевский параметр/, получим

$$\hat{B}(s, M^2) F_1(s = -P^2; q_1^2, q_2^2) = F_1(M^2) = \frac{1}{\pi M^2} \int_0^\infty d\sigma \rho(\sigma; q_1^2, q_2^2) e^{-\sigma/M^2}. \quad /5/$$

Для спектральной плотности  $\rho(\sigma)$  /в левой части ПС/ принимается стандартная феноменологическая модель <sup>6,9/</sup>

$$\rho(s) = \pi f_\pi^2 F_{\gamma\pi}(Q^2, \omega) \delta(s) + \theta(s - s_0) \rho_{pt}(s; Q^2, \omega), \quad /6/$$

где  $s_0$  - параметр, характеризующий начало континуума /к которому относим и  $A_1$ -мезон/;  $\omega = PQ/Q^2 \leq 1$  - параметр асимметрии сталкивающихся фотонов. Непосредственный расчет для пертурбативной части спектральной плотности  $\rho_{pt}$  дает <sup>9/</sup> ( $\bar{x} \equiv 1 - x$ ):

$$\rho_{pt} = -\sqrt{2} a_{em}^2 \int_0^1 \frac{dx x \bar{x} Q^4(x)}{[Q^2(x) + s x \bar{x}]^3}; \quad Q^2(x) = -Q^2(1 + \omega[\bar{x} - x]). \quad /7/$$

В дальнейшем будем рассматривать ФФ  $F_{\gamma\pi}$ , нормированный на  $F_{\gamma\pi}(0, 0) = -\sqrt{2} a_{em} / (\pi f_\pi)$  /см. <sup>4,6/</sup>. С учетом /5/-/7/ полные ПС для  $F_{\gamma\pi}$  имеют вид

$$f_\pi F_{\gamma\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} \rho_{pt}(s; Q^2, \omega) e^{-s/M^2} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \rho_{hpt}(s; Q^2, \omega) e^{-s/M^2} ds. \quad /8/$$

Нашей следующей задачей будет вычисление непертурбативной части спектральной плотности  $\rho_{hpt}$  в нелокальной версии КХД ПС <sup>10,11/</sup>.

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ СКАЛЯРНОЙ МОДЕЛИ

Так как полные вычисления в КХД весьма громоздки, основные элементы задачи удобно проследить на модельном скалярном при-

мере. В основе КХД-анализа формфактора  $F_{\gamma\pi}$  лежит коррелятор электромагнитных  $J_\mu, J_\nu$  и аксиального  $j_a$  токов  $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$  /см. /2//; здесь этот объект имитируем коррелятором трех токов  $j =: \phi\phi$ :

$$\mathcal{F} = \int \langle |T(j(x) j(y) j(0))| \rangle e^{iq_1 x + iq_2 y} d^4 x d^4 y,$$

где  $\phi$  - скалярное поле. Первая из диаграмм, отвечающих  $\mathcal{F}$ , - простая треугольная петля на рис. 1а. Генерация диаграмм, соответствующих степенным поправкам к ней, проводится заменой

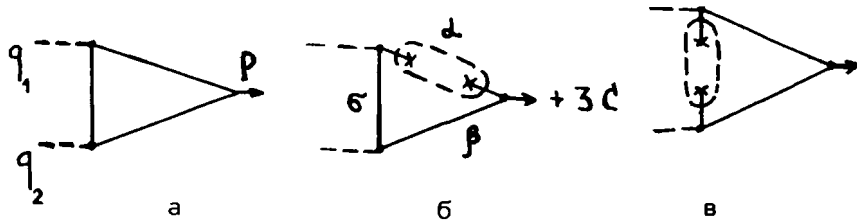


Рис. 1

всевозможных "мягких" линий и вершин в треугольной диаграмме на нелокальные ВС /НВС/ /10/ \*. Первые из этих диаграмм получаются просто заменой пропагаторов на НВС  $\langle: \phi(0) \phi(z): \rangle$  /см. рис. 1б, в: ЗС - зеркально-симметричная диаграмма/

$$\langle: \phi(0) \phi(z): \rangle = \langle: \phi(0) \phi(0): \rangle \int_0^\infty \exp\left(\frac{z^2}{4}\nu\right) f(\nu) d\nu. \quad /9/$$

Свойства и роль корреляционных функций  $f(\nu)$  были подробно рассмотрены нами в работах /11/. Явный вид  $f(\nu)$  определяется структурой вакуума. "Локальным" ВС отвечает, очевидно,  $f(\nu) = \delta(\nu)$ ; свободному пропагатору -  $f(\nu) \sim \text{constant}$ . Учесть конечную длину корреляции  $1/\lambda$  в вакууме можно, взяв  $f(\nu) = \delta(\nu - \lambda^2)$ .

Простые вычисления дают для борелизованного  $\mathcal{F}$  выражение

$$\hat{B}\mathcal{F} = \frac{1}{M^2} \int_0^\infty e^{-s/M^2} ds \int_0^1 \frac{dx}{(x\bar{x}s + Q^2(x))} a f_\sigma \left( \frac{M^2 Q^4(x)}{(x\bar{x}s + Q^2(x))} \right) \times \quad /10/$$

\* При выводе данных правил сумм всегда можно сделать виковский поворот, т.е. считать все координаты евклидовыми,  $z^2 < 0$ .

$$\times a f_\beta \left( \frac{M^2 \bar{x} Q^2(x)}{x\bar{x}s + Q^2(x)} \right) \cdot a f_\alpha \left( \frac{M^2 x Q^2(x)}{(x\bar{x}s + Q^2(x))} \right).$$

Здесь введены сокращения:  $a = \langle: \phi(0) \phi(0): \rangle$ ;  $Q^2(x) = -(q_1^2 \bar{x} + q_2^2 x)$ ;  $f_\sigma$  - корреляционная функция, отвечающая линии  $\sigma$ . Следовательно, вклад в непертурбативную спектральную плотность  $\rho_{\text{npt}}$ . В соответствии с /5/ и /10/ имеет вид /см. рис. 1б, в/ \*

$$\rho_{\text{npt}}(s) = \pi a \int_0^1 \frac{dx}{(x\bar{x}s + Q^2(x))} \left\{ f \left( M^2 \frac{Q^4(x)}{s(x\bar{x}s + Q^2(x))} \right) + \right. \quad /11/$$

$$\left. + \left[ f \left( x M^2 \frac{Q^2(x)}{(x\bar{x}s + Q^2(x))} \right) + x \rightarrow \bar{x} \right] \right\},$$

а в пертурбативную -

$$\rho_{\text{pt}}(s) = \pi \int_0^1 \frac{dx}{x\bar{x}s + Q^2(x)}.$$

Положим для простоты, что в нашей модели  $f_\pi = 1$ , и рассмотрим выражение для непертурбативной части формфактора  $F_{\gamma\pi}^{\text{npt}} = \hat{B}\mathcal{F}$  в приближении локальных ВС, т.е. при  $f(\nu) = \delta(\nu)$ :

$$F_{\gamma\pi}^{\text{npt}} = -\frac{a}{M^2} \left\{ \frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right\}. \quad /12/$$

Результат /12/ прямо соответствует факторизованному /12/ представлению формфактора  $F_{\gamma\pi}$  при  $-q_1^2 \gg M^2$

$$F_{\gamma\pi} = C(q_1^2, q_2^2, \mu^2; x) \Phi_\pi(x; \mu^2, M^2) (1 + O(1/-q_{\text{min}}^2)). \quad /13/$$

Здесь  $C$  - коэффициентная функция процесса  $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$ , определяемая динамикой малых расстояний. В данном случае, в борновском приближении,  $C = 1/Q^2(x)$ ;  $1/\mu$  - масштаб, разделяющий большие и малые расстояния;  $\Phi_\pi$  - волновая функция "пиона", построенная из пары скалярных "кварков", непертурбативный аналог которой в нашем случае есть /11/

\* Строго говоря,  $\rho$  должна зависеть лишь от  $s$ . Эта зависимость в /11/ восстанавливается заменой  $-1/M^2$  на  $(\partial_s)$ , где  $(\partial_s)$  действует только на  $\exp(-s/M^2)$ . Результат этого действия очевиден, поэтому в дальнейших примерах будем оставлять у  $\rho$  зависимость от  $1/M^2$ .

$$\Phi_{\pi \text{ прт}} = \frac{a}{M^2} (\delta(x) + \delta(\bar{x})) .$$

Интегральная свертка последнего выражения с  $1/Q^2(x)$  и приводит к формуле /12/. Вклад от диаграммы на рис. 1в в пределе локальных ВС равен нулю.

Для анализа нелокального случая выберем простейший анзац для  $f(\nu)$ , учитывающий ненулевую виртуальность  $\sigma^2$  скалярных вакуумных "кварков" /11/

$$f(\nu) = \delta(\nu - \sigma^2) . \quad /14/$$

Интегрирование в /11/ с использованием анзаца /14/ дает для непертурбативной части  $F_{\gamma\pi}$  выражения, не представимые через элементарные функции. Например, для вклада диаграммы на рис.1б имеем выражение

$$\frac{a}{M^2 \sigma^2} \int_0^1 \frac{dz}{1-z} \{ \exp[ -x_2 \frac{z}{1-z} - x_1 \frac{\bar{\Delta}}{\Delta} z ] + (1 \leftrightarrow 2) \} , \quad /15/$$

где

$$x_i = -\frac{q_i^2}{M^2}, \quad \Delta = \frac{\sigma^2}{M^2}, \quad \bar{\Delta} = 1 - \Delta .$$

Несложно получить ведущий член асимптотики выражения /15/ при  $x_i \gg 1$

$$F_{\gamma\pi}^{\text{прт}} = -\frac{a}{M^2} \left[ \frac{1}{\bar{\Delta} q_1^2 + \Delta q_2^2} + \frac{1}{\bar{\Delta} q_2^2 + \Delta q_1^2} \right] , \quad /16a/$$

или, в стандартных для процесса  $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$  обозначениях,

$$\frac{a}{M^2} \left[ \frac{1}{Q^2(1 + \omega[\bar{\Delta} - \Delta])} + \omega \rightarrow -\omega \right] . \quad /16b/$$

Формулы /16/, как и ожидалось, совпадают с факторизованным выражением для  $F_{\gamma\pi}$  /13/ при  $\Phi_{\pi \text{ прт}} \sim \frac{a}{M^2} (\delta(\Delta - x) + \delta(\Delta - \bar{x}))$ .

Представление /16/ по виду существенно отличается от того, которое отвечает случаю локальных ВС /12/. Причем отличие проявляется тем сильнее, чем выше асимметрия фотонов  $\omega$  и больше значение  $\Delta / \Delta \leq 0,5/$ . При равных виртуальностях фотонов нелокальность не проявляется в лидирующих членах асимптотики, и полный результат

$$2 \frac{a}{M^2 Q^2}$$

совпадает с результатом локального случая /12/. Наоборот, при большой асимметрии  $\omega$  величина формфактора начинает существенно зависеть от средней виртуальности  $\sigma^2(\Delta)$ .

Нелидирующий член асимптотики выражения /15/ равен

$$\frac{a}{M^2} \frac{1}{(q_1^2 \Delta + q_2^2 \Delta)} \sigma^2 \frac{(q_1^2 \bar{\Delta} - q_2^2 \Delta)}{(q_1^2 \bar{\Delta} + q_2^2 \Delta)^2} + (1 \leftrightarrow 2) ,$$

он имеет малость  $O(\sigma^2/Q^2(\Delta))$  по отношению к /16/. При характерных для рассматриваемого процесса условиях  $|q_1^2| \gg M^2 > \sigma^2$  вклад нелидирующего члена весьма мал. Прямое численное интегрирование в /15/ показывает, что при всех разумных значениях  $\sigma$  отклонение результата от асимптотической формы /16/ в широких пределах изменения асимметрии  $\omega / 0 \leq \omega \leq 0,95/$  составляет при  $Q^2/M^2 = 1$  около 15%, при  $Q^2/M^2 = 4$  около 5%, а при  $Q^2/M^2 = 10$  не более 1%. Иными словами, асимптотика в данной модели начинается довольно рано и выполняется тем лучше, чем больше величина средней виртуальности  $\sigma^2$ .

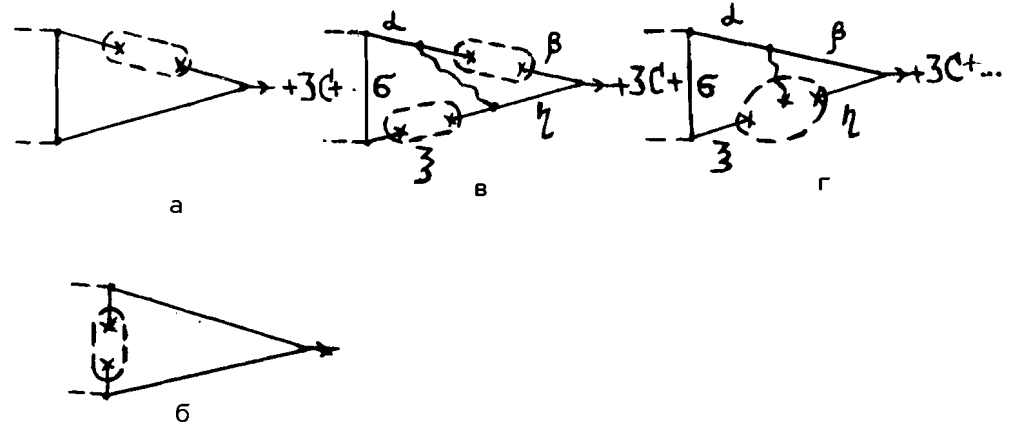


Рис. 2

Подобная картина подтверждается и в реальном КХД-случае. В частности, для вкладов в  $F_{\gamma\pi}$  диаграмм КХД, редуцирующихся при сжатии линии  $\sigma$  /см. рис. 2/ в диаграммы для ВФ. Рассмотрим это.

#### 4. ПРАВИЛА СУММ

Как известно, доминирующий вклад в ПС для пиона вносит кварковый конденсат. Генерация соответствующих диаграмм с НВС проводится стандартно /10,11/ /см. раздел 3/. Ограничимся учетом лишь тех диаграмм, которые дают лидирующее поведение по  $1/Q^2$  /см. рис. 2а,в,г/. Наиболее близким к рассмотренному выше скалярному вкладу является вклад от векторного бислокального конденсата /10,11/ - рис. 2а,б. Он определяется функцией распределения  $f_0(\nu)$

$$\langle \bar{q}(0) \gamma_\mu q(z) \rangle = -iz_\mu \bar{f}_0(z^2) = -iz_\mu \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4}\nu} f_0(\nu) d\nu. \quad /17/$$

Простые вычисления дают для вклада диаграммы на рис. 2а выражение

$$\rho_{\text{prt}}^a(s) = \frac{4\pi}{M^2} f_\pi \int_0^1 \frac{Q^2(x) dx}{(Q^2(x) + \bar{x}\bar{x}s)^2} \left[ \bar{x} f_0(M^2 \bar{x} \frac{Q^2(x)}{Q^2(x) + \bar{x}\bar{x}s}) + x f_0(M^2 \bar{x} \frac{Q^2(x)}{Q^2(x) + \bar{x}\bar{x}s}) \right] + \omega \rightarrow -\omega, \quad /18а/$$

а для вклада диаграммы на рис. 2б -

$$\rho_{\text{prt}}^b(s) = \frac{8\pi}{M^2} f_\pi s \int_0^1 \frac{dx}{(Q^2(x) + \bar{x}\bar{x}s)^2} f_0(M^2 \frac{Q^4(x)}{s(Q^2(x) + \bar{x}\bar{x}s)}). \quad /18б/$$

Вклады в  $\rho_{\text{prt}}(F_{\gamma\pi})$  от прочих диаграмм на рис. 2 выражаются через многократные интегралы по  $\alpha$ -параметрам и имеют весьма громоздкий вид. Общее выражение для диаграммы на рис. 2в и элементов диаграммы 2г приведено в Приложении. Ниже рассмотрим ведущее приближение для  $F_{\gamma\pi}$ .

В стандартном случае локальных ВС  $f_0(\nu) = A_0 \delta'(\nu)$ , что соответствует учету лишь лидирующей степенной /по  $M^{-2}$ / поправки  $O(\langle \sqrt{\alpha_s} \bar{q}q \rangle^2)$ . Тогда функция  $\rho_{\text{prt}}^\delta$  равна нулю почти всюду /кроме  $\omega = 1/$ , а  $\rho_{\text{prt}}^a$  дается формулой

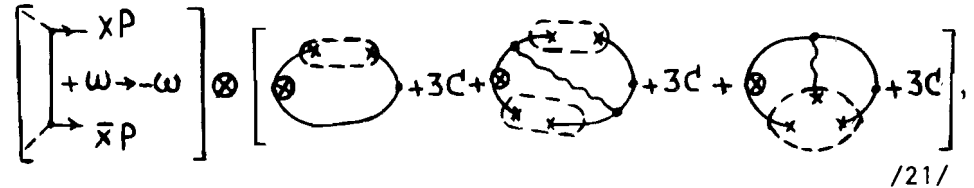
$$\rho_{\text{prt}}^a = \pi f_\pi A_0 \int_0^1 \left( \frac{4}{Q^2(x)} + \omega \rightarrow -\omega \right) (\bar{x} \delta'(M^2 \bar{x}) + x \delta'(M^2 \bar{x})) dx, \quad /19/$$

$$A_0 = \frac{2}{81} \pi \langle \sqrt{\alpha_s} \bar{q}q \rangle^2,$$

совпадающей по виду с факторизованным выражением для  $\rho$ . В приближении факторизации, когда  $\rho$  или  $F_{\gamma\pi}$  равно свертке коэффицентной функции процесса  $C = (4/Q^2(x) + \omega \rightarrow -\omega)$  с соответствующей волновой функцией пиона  $\Phi_\pi$  /см. /13//, равенство /18а/ принимает вид

$$\rho_{\text{prt}}^a = \pi f_\pi \int_0^1 \left( \frac{4}{Q^2(x)} + \omega \rightarrow -\omega \right) (\bar{x} f_0(x M^2) + x f_0(\bar{x} M^2)) dx + O\left(\frac{1}{Q^4}\right). \quad /20/$$

Вклад от диаграммы рис. 2б уничтожается, так как имеет более высокую асимптотику по  $1/Q^2$ . Все прочие диаграммы рис. 2 редуцируются следующим образом:



где второй сомножитель соответствует непертурбативной части ПС для  $\Phi_\pi$ . Структура факторизованного выражения для  $\rho$  позволяет регулярно получать и  $\alpha_s(\mu^2)$ -поправки к  $C$  и  $\Phi_\pi$ , однако для широких ВФ  $\Phi_\pi(x)$  их вклад незначителен /5/. Поправки, связанные с  $Q^2$ -эволюцией  $\Phi(x, Q^2)$ , также малы вплоть до  $Q^2 \leq 100 \text{ ГэВ}^2$ . Когда же справедливы факторизованные выражения для  $\rho$ ? Выборочный численный анализ точных /см. Приложение/ и факторизованных выражений /21/ /с использованием дельта-образных анзацев для  $f_1$ / дает, что при  $Q^2 \sim 8 \text{ ГэВ}^2 / M^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2/$  они отличаются на несколько процентов. Будем далее использовать факторизованную форму /21/ для определения  $\rho_{\text{prt}}$ . Еще одно ограничение на  $q_1^2$  связано с неприменимостью разложения по  $1/Q^2$  в области  $|q_1^2|$  или  $|q_2^2| < 1 \text{ ГэВ}^2$ . При малых  $|q_1^2| \leq m_\rho^2$  необходимо проводить дополнительное разбиение вкладов больших и малых расстояний, подобно тому, как это сделано в работе /13/ при анализе ФФ-пиона.

Локальный случай КХД ПС для  $F_{\gamma\pi}$  перестает работать при  $\omega \geq 0,5$  из-за сильного роста степенных поправок /9/. Это прямое проявление того факта, что стандартный подход /8/, основанный на учете лишь лидирующих ВС /см. /19//, не адекватен задаче и не позволяет определить следующие моменты  $\langle (2x-1)^N \rangle$  от  $\Phi_\pi(x)$ . Метод отказывает именно тогда, когда роль таких моментов с ростом  $\omega$  возрастает, что, в свою очередь, требует учета в ПС также и далеких членов операторного разложения /10,11/ ,

т.е. нелокальности конденсатов. На необходимость учета нелокальности при определении ВФ указывает относительно большая по сравнению с  $v_0 \approx 0,75 \text{ ГэВ}^2$  величина средней виртуальности вакуумных кварков /14/

$$\lambda_q^2 = \frac{\langle \bar{q} \nabla^2 q \rangle}{\langle \bar{q} q \rangle} = 0,4 \pm 0,1 \text{ (ГэВ}^2\text{)}, \quad /22/$$

дающая характерный масштаб нелидирующих ВС. Ясно, что включение в /19/ одной нелидирующей степенной поправки не устранил расходимость при  $\omega \sim 1 \text{ /см}^{9/8}$ . Каждое отдельное ВС в разложении дает пропорциональный  $\delta^{(k)}(M^2 x)^{11/}$  /размерность ВС =  $\theta + 2k/$  вклад в ПС для  $\Phi_\pi(x)$ , что порождает сингулярный при  $\omega \rightarrow 1$  вклад в  $F_{\gamma\pi} \sim 1/(1 - \omega^2)^{k+1}$ . Только рассмотрение нелокального конденсата, эквивалентного учету всего ряда степенных поправок в целом, может обеспечить применимость метода во всей области  $\omega$ . Причем значения  $F_{\gamma\pi}$  при  $\omega \sim 1$  будут зависеть от пространственной ширины  $1/\sigma_i$  каждой из конденсатных функций  $f_i$ . Например, используя для  $f_0$  анзац, явно учитывающий, что  $\sigma_0^2 \sim \lambda_q^2$

$$f_0 = A_0 \delta'(\sigma_0^2 - \nu), \quad \tilde{f}_0(z^2) \sim \frac{z^2}{4} \exp\left(\frac{z^2}{4} \sigma_0^2\right), \quad /23/$$

получим для выражения /20/

$$p_{\text{prt}}^a \sim \frac{8A_0}{Q^2 M^4} \left\{ \frac{2}{1 - (\omega\gamma_0)^2} + \frac{8\omega^2 \gamma_0 \bar{\Delta}_0}{(1 - (\omega\gamma_0)^2)^2} \right\}_{\omega \rightarrow 1} = \frac{4A_0}{Q^2 \sigma_0^4} (1 + O(\frac{\sigma_0^2}{M^2})). /24/$$

Аналогичное поведение по  $\sigma_0^2$  получается и при подстановке /23/ в точное выражение для диаграммы 2а. Здесь и далее  $\sigma_0^2 = 0,35 \lambda_q^2$ ,  $\Delta_i = \sigma_i^2/M^2$ ;  $\bar{\Delta}_i = 1 - \Delta_i$ ;  $\gamma_i = 1 - 2\Delta_i$  /все численные оценки параметров нелокальности  $\sigma_i^2$  взяты из работы /11/. Как видно из /24/, рост степенных поправок ограничен величиной  $1/\sigma_0^4$ .

Нелокальная версия КХД ПС для непертурбативной части  $f_{\pi\Phi}^2(x)$  с учетом только доминирующих кварковых конденсатов имеет вид

$$4x f_0(M^2 \bar{x}) + \frac{16}{9} \pi \langle \sqrt{\alpha_s} \bar{q} q \rangle^2 \bar{x} \int_0^1 dy \int_0^1 da db f_4\left(\frac{x}{a} M^2\right) f_4\left(\frac{\bar{y}}{b} M^2\right) \times /25/$$

$$\times \left[ \frac{\theta(x > y) \theta(a > b) + \theta(y > x) \theta(b > a)}{|x\bar{y}a\bar{b} - \bar{x}y\bar{a}b|} \right] + \text{трилокальные вклады } (f_{1,2,3}) + (x \rightarrow \bar{x}),$$

где  $f_i$  - вакуумные корреляционные функции /10, 11/. Трилокальные вклады в /25/ определяются диаграммой рис. 2г с трилокальными

ВС и в общем случае имеют весьма громоздкую форму /см. Приложение и /11/. Используя /25/ в формуле /21/ /или /13//, получим правую часть для  $p_{\text{prt}}(F_{\gamma\pi})$ , зависящую от вакуумных функций  $f_i$ . Для дальнейшего продвижения нужен явный вид этих функций.

## 5. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРАВИЛ СУММ

Воспользуемся предложенными в /11/ дельта-образными анзацами для  $f_i$  ( $i > 0$ ), минимальным образом учитывающими ширину функций  $f_i$

$$f_i(\nu) = A_i \delta(\sigma_i^2 - \nu), \quad A_i \sim \langle \sqrt{\alpha_s} \bar{q} q \rangle^2. \quad /26/$$

В этом случае непертурбативная правая часть ПС /25/ принимает вид

$$\frac{8}{81} \pi \frac{\langle \sqrt{\alpha_s} \bar{q} q \rangle^2}{M^4} \{ x \delta'(\bar{\Delta}_0 - x) + \frac{18\theta(\Delta_4 > x)}{\bar{\Delta}_4 (\Delta_4)^2} \theta(1 > 2\Delta_4) \bar{x} \times$$

$$\times (x + (\Delta_4 - x) \ln(\bar{x})) + 3\bar{\Delta}_1 \delta'_1(\bar{\Delta}_1 - x) + 3 \frac{\theta(\Delta_3 > \bar{x})}{\Delta_3} +$$

$$+ 2x \left[ \frac{2\bar{x} \theta(\Delta_2 > \bar{x})}{(\Delta_2)^2} \right]'_x + (x \rightarrow \bar{x}) \} + \langle \frac{\alpha_s}{\pi} \bar{q} q \rangle \frac{1}{24M^2} (\delta(\Delta_5 - x) + x \rightarrow \bar{x})$$

$$\Delta_4 = \frac{\lambda_q^2}{2M^2}; \quad \Delta_1 = 0,18 \frac{\lambda_q^2}{M^2}; \quad \Delta_2 = 0,54 \frac{\lambda_q^2}{M^2}; \quad \Delta_3 = 0,27 \frac{\lambda_q^2}{M^2}; \quad \Delta_5 = 0,2 \frac{\lambda_q^2}{M^2}. \quad /27/$$

В выражении /27/ модельным образом включен нелокальный глюонный конденсат путем модификации стандартного выражения по аналогии с кварковым /см /11/. Обработка ПС /8/ с использованием /7/ и  $p_{\text{prt}}$ , полученной путем подстановки /27/ в /21/, приводит к следующим выводам:

1. Значение величины  $Q^2 F_{\gamma\pi}$  слабо меняется с  $Q^2$  начиная с  $Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$ .

2. Метод ПС применим при всех  $\omega \leq 0,95$ ; область стабильности лежит в пределах  $v_0 \sim 0,7 \div 1 \text{ ГэВ}^2$ ,  $M^2 \sim 0,6/0,8/-1,4 \text{ ГэВ}^2$ .

3. Область  $\omega > 0,8$  весьма чувствительна к значениям эффективной виртуальности "вакуумных кварков"  $\sigma_i^2$ . Действительно,

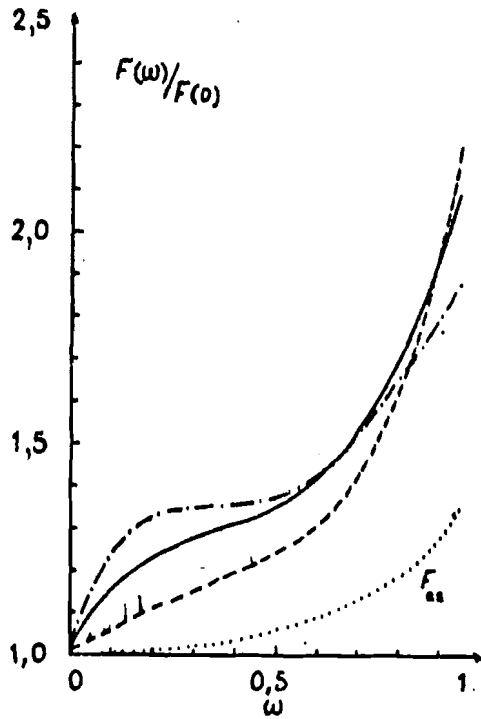


Рис. 3. Сплошная линия соответствует расчету с  $\lambda_q^2 = 0,4 \text{ ГэВ}^2$ , штриховая -  $\lambda_q^2 = 0,3 \text{ ГэВ}^2$ ; штрихпунктирная -  $\lambda_q^2 = 0,55 \text{ ГэВ}^2$ .

при  $\omega \sim 0$  конденсатная часть ведет себя как  $1/M^4$ , а при  $\omega \sim 1$  как  $1/\sigma^4 (1 + O(\sigma^2/M^2))$ , и значение величины  $Q^2 F_{\gamma\pi} = F(\omega)$  определяется тогда виртуальностью  $\sigma^2$ .

На рис. 3 приведены кривые  $F(\omega)/F(0)$  при следующих вариациях величины  $\lambda_q^2 = 0,3; 0,4; 0,55 \text{ ГэВ}^2$ , для  $Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$ . Как видно, выход за коридор крайних /по  $\lambda_q^2$ / случаев может быть экспериментально определен. Для сравнения на том же графике приведена кривая для асимптотического случая

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{1 + \omega(\bar{x} - x)} + \omega \rightarrow -\omega \right) \phi_{as}(x); \quad \phi_{as} = \theta x \bar{x},$$

лежащая значительно ниже всех прочих. Отметим, что наши выводы довольно устойчивы к форме анзаца и начинают сильно зависеть от его деталей лишь в малой окрестности предельной точки  $\omega = 1$ , где не работает сам метод ПС. Выводы 1-3 носят качественный характер, связанный с нелокальной сутью конденсатов, и не изменятся при дальнейшем уточнении  $p_{\text{нрп}}$ .

Мы благодарны В.А.Нестеренко за обсуждение работы и полезные критические замечания.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим вклад в ПС для  $F_{\gamma\pi}$  от диаграммы "дважды-разрывного" типа /рис. 2в/ со скалярным кварковым конденсатом

\* Значение верхнего предела для  $\lambda_q^2$ , полученное в решеточных расчетах /15/.

$$\langle \bar{q}(0) q(z) \rangle = \langle \bar{q}(0) q(0) \rangle \int_0^\infty e^{-z^2 \nu^2 / 4} f_4(\nu) d\nu. \quad /П.1/$$

Переходя в исходном выражении в  $\alpha$ -представление, интегрируя с использованием представления /П.1/ и проводя преобразование Бореля  $B(M^2 \rightarrow -P^2)$ , приходим к результату

$$-18 \frac{N_q}{M^2} \int_0^\infty d\sigma \int_0^\infty d\Gamma \delta\left(1 - \frac{A_+}{\mathcal{D}}\right) \left(\frac{\bar{A}_\alpha}{\mathcal{D}}\right) \left(\frac{A_\beta + \sigma\gamma/2}{\mathcal{D}}\right) \times \quad /П.2/$$

$$\times \left[ \exp\left[\left(\frac{q_1^2}{M^2} \frac{A_\alpha}{\mathcal{D}} + \frac{q_2^2}{M^2} \frac{\bar{A}_\alpha}{\mathcal{D}}\right)\sigma\right] + (1 \rightarrow 2) \right] \left(f_4\left(\frac{M^2}{\beta}\right) f_4\left(\frac{M^2}{\xi}\right) + \beta \rightarrow \eta, \xi \rightarrow \alpha\right).$$

Здесь  $N = \frac{8}{81} \pi \langle \sqrt{\alpha_s} \bar{q} q \rangle^2$ ;  $d\Gamma = \frac{d\alpha d\beta d\gamma d\eta d\xi}{\mathcal{D}}$ ,  $\mathcal{D}$  - детерминант диаграммы рис. 2в,  $D = \mathcal{D}|_{\sigma \rightarrow 0}$  - детерминант редуцированной диаграммы /см. /21//;  $A_\alpha = \xi(\beta + \gamma + \eta) + \eta\gamma$ ,  $\bar{A}_\alpha = D - A_\alpha$ ,  $A_\beta = \eta(\alpha + \sigma + \xi + \gamma) + \gamma\xi$  - функции двудеревьев диаграмм рис. 2в, г;  $A_+ = \beta A_\beta + \alpha A_\alpha$ . Сомножитель  $\delta\left(1 - \frac{A_+}{\mathcal{D}}\right)$  в /П.2/ возникает при преобразовании Бореля:  $\hat{B}_{(M^2)} \exp\left(P^2 \frac{A_+}{\mathcal{D}}\right) = \delta\left(1 - \frac{A_+}{\mathcal{D}} M^2\right)^{\beta/\mathcal{D}}$ . В случае локальных ВС  $f(\nu) = \delta(\nu)$  для формулы /П.2/ получим выражение /ср./12//

$$- \frac{36 N_q}{M^4} \left\{ \frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right\}.$$

Факторизованная форма для вклада /П2/ получается при  $\sigma \rightarrow 0$  во всех функциях деревьев, при этом трехточечная функция переходит в свертку коэффицентной и двухточечной /ср. /21// функций. Для записи окончательного результата удобно применить тождество

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta\left(x - \frac{A_\alpha}{\mathcal{D}}\right) \delta\left(y - \frac{A_\beta}{\mathcal{D}}\right) \equiv 1. \quad /П.3/$$

Тогда, подставив /П.3/ в /П.2/ при  $\sigma \rightarrow 0$ , получим

$$\int_0^1 dx \left[ \frac{1}{Q^2(x)} + \omega \rightarrow -\omega \right] \Phi_{2в}(x), \quad /П.4а/$$



$$f_{\pi^2 \Phi_{2B}}(x) = \frac{16}{9} \pi x^{-1} \int_0^1 y dy \int_0^\infty d\Gamma \delta(1 - (\beta y + \alpha x)) \delta(x - \frac{A\alpha}{D}) \times$$

$$\times \delta(y - \frac{A\beta}{D}) [f_4(\frac{M^2}{\beta}) f_4(\frac{M^2}{\xi}) + \beta \rightarrow \eta, \xi \rightarrow \alpha]$$

/П.46/

- вклад в ПС для  $\Phi_\pi(x)$  от диаграммы 2в. Дальнейшее интегрирование по  $d\Gamma$  в /П.46/ дает второе слагаемое в выражении /25/ '11/. А использование в /25/ анзаца  $f_4 = \delta(\nu - \sigma_4)$  приводит ко второму слагаемому в формуле /27/.

Трилокальные вклады в /25/ определяются трилокальным ВС /принята калибровка Фока - Швингера /16/:  $y^\mu A_\mu(y) = 0$ , который параметризуется тремя независимыми функциями /см. рис. 2г/

$$\langle \bar{q}_k(0) \hat{A}_\mu(y) q_j(z) \rangle = \frac{1}{4} [(z_\mu \hat{y} - \gamma_\mu(z y)) f_1 +$$

$$+ (y_\mu \hat{y} - \gamma_\mu y^2) f_2 + i \epsilon_{\mu\beta\rho\lambda} y^\beta z^\rho y^\lambda f_3]_{jk},$$

/П.5а/

причем

$$\tilde{f}_i = a_i \langle \sqrt{a_s} \bar{q} q \rangle^2 \int_0^\infty da_1 da_2 da_3 \exp\{ \frac{z^2}{4} a_1 + \frac{y^2}{4} a_2 +$$

$$+ \frac{(z-y)^2}{4} a_3 \} f_i(a_1, a_2, a_3).$$

Случай локальных ВС реализуется с помощью анзаца  $f_i(a_1, a_2, a_3) = \delta(a_1) \delta(a_2) \delta(a_3)$ ; в нелокальном случае аргументы дельта-функций меняются  $a_i \rightarrow a_i - \sigma_i$ . В остальном вычисление вкладов от трилокальных ВС аналогично предыдущему случаю диаграммы рис. 2в и подробно описано в /11/.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург И.Ф. - ЯФ, 1987, т.46/9/, с.840; 46/10/, с.1142; Гинзбург И.Ф., Сербо В.Г. - В сб.: Материалы 23 Зимней школы ЛИЯФ. Л.: ЛИЯФ, 1988, с.137.
2. Grunhaus J. - Preprint DESY 86-098, 1986; Olsson J. - Preprint DESY 87-137, 1987.
3. Brodsky S.J., Lepage G.P. - Phys. Rev., 1980, D22, p.2157; D24, p.1808.
4. Voloshin M.V. - Preprint IТЕР-8, М., 1982.

5. Каданцева Е.П., Михайлов С.В., Радюшкин А.В. - ЯФ, 1986, т.44/2/, с.507. De1 Aguila F., Chase M.K. - Nucl. Phys., 1981, B193, p.517.
6. Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. - ЯФ, 1984, т.39, с.1287.
7. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. - Nucl. Phys. B, 1979, v.B147, p.385.
8. Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R. - Phys. Rep., 1984, v.112, p.173.
9. Горский А.С. - ЯФ, 1987, т.46/9/, с.938.
10. Михайлов С.В., Радюшкин А.В. - Письма в ЖЭТФ, 1986, т.43 /12/, с.551.
11. Михайлов С.В., Радюшкин А.В. - Препринты ОИЯИ P2-88-103, P2-88-104, Дубна, 1988; ЯФ, 1989, т.49/3/, с.794.
12. Efremov A.V., Radyushkin A.V. - Phys. Lett., 1980, v.94B, p.245. Ефремов А.В., Радюшкин А.В. - ТМФ, 1980, т.42, с.147.
13. Нестеренко А.В., Радюшкин А.В. - Письма в ЖЭТФ, 1984, т.39, с.576.
14. Овчинников А.А., Пивоваров А.А. - ЯФ, 1988, т.48, с.1135.
15. Kremer M., Schierholz G. - Preprint DESY 87-024, MZ-TH/87-03.
16. Fock V.A. - Sov. Phys., 1937, v.12, p.404. Швингер Ю. - Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1976, т.1.

Рукопись поступила в издательский отдел  
27 ноября 1989 года.