объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-781

В.К.Мельников

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ВРИСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в Оргкомитет V Международного рабочего совещания "Нелинейные эволюционные уравнения и динамические системы", июль 1989 г., Греция

1989

В настоящем сообщении речь идет об интегрировании следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}(\phi_n\psi_n + \bar{\phi}_n\bar{\psi}_n),$$
$$(L - \lambda_n^2)\phi_n = (L - \lambda_n^2)\psi_n = 0, \quad n = 1,\dots, N, \qquad /1/$$

где $\lambda_n = \lambda_n(t)$ - непрерывные функции t, при любом $t \geq 0$ удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\lambda_n(t) > 0$, черта означает комплексное сопряжение, а оператор L имеет вид

$$L = \partial^2 + u, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}. \qquad /2/$$

Нас будет интересовать решение $u = u(x, t)$, $\phi_n = \phi_n(x, t)$, $\psi_n = \psi_n(x, t)$, $n = 1,\dots, N$, системы /1/, при любом $t \geq 0$ удовлетворяющее условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(|xu(x,t)| + \sum_{r=0}^{3} \left|\frac{\partial^r u(x, t)}{\partial x^r}\right|\right) dx < \infty, \qquad /3/$$

$\phi_n \to 0$, если $x \to -\infty$, $\psi_n \to 0$, если $x \to \infty$. Кроме того, функцию $u = u(x, t)$ будем считать принимающей только вещественные значения.

Нахождение указанного выше решения основано на следующем. Рассмотрим линейную систему уравнений

$$(L + \zeta^2) f_0 = 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \psi_n f_0, \quad n = 1, \dots, 2N, \qquad /4/$$

относительно неизвестных функций $f_0, f_1, \dots, f_{2N}$. Функции $\psi_1, \dots, \psi_{2N}$ будем считать пока неопределенными. Далее, с помощью решения $f_0, f_1, \dots, f_{2N}$ системы /4/ образуем ведичины $g_0, g_1, \dots, g_{2N}$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + A f_0 + \sum_{n=1}^{2N} \phi_n f_n,$$

$$g_n = \psi_n \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x} f_0 + (\zeta^2 - \zeta_n^2) f_n \ , \ n = 1, \dots, 2N, \qquad /5/$$

где оператор A имеет вид [1]:

$$A = 4\partial^3 + 3(u\partial + \partial \cdot u), \qquad /6/$$

а функции $\phi_1, \dots, \phi_{2N}$ также будем считать пока неопределенными. Потребуем теперь, чтобы определенные в соответствии с равенствами /2/ и /4/-/6/ величины $g_0, g_1, \dots, g_{2N}$ удовлетворяли услрвиям

$$(L + \zeta^2) g_0 = \sum_{n=1}^{2N} \phi_n g_n, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} \equiv 0, \ n = 1, \dots, 2N. \qquad /7/$$

С помощью несложных вычислений находим, что для справедливости условий /7/ необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 2\sum_{n=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial x}(\phi_n \psi_n),$$

$$(L + \zeta_n^2)\phi_n = (L + \zeta_n^2)\psi_n = 0, \quad n = 1, \dots, 2N. \qquad /8/$$

Система /1/ получается из системы /8/, если положить в ней

$$\phi_{N+n} = \bar{\phi}_n, \ \psi_{N+n} = \bar{\psi}_n, \ \zeta_n = i\lambda_n, \ \zeta_{N+n} = i\bar{\lambda}_n, \ n = 1, \dots, N. \qquad /9/$$

Однако нам будет удобнее рассматривать именно систему /8/ и только в самом конце наложить на полученное решение приведенные выше связи.

Итак, пусть f_0^- и f_0^+ - решения уравнения

$$(L + \zeta^2) f_0 = 0, \qquad /10/$$

при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяющие условиям

$$f_0^- \sim \exp(-i\zeta x), \quad \text{если } x \to -\infty,$$

$$f_0^+ \sim \exp(i\zeta x), \quad \text{если } x \to \infty.$$

При любом вещественном $\zeta \neq 0$ пара функций $f_0^-(x, \zeta)$ и $f_0^-(x, -\zeta)$ является линейно независимой. Следовательно, справедливо равенство

$$f_0^+(x, \zeta) = a(\zeta) f_0^-(x, -\zeta) + b(\zeta) f_0^-(x, \zeta), \qquad /11/$$

где величины $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ не зависят от x. Как известно, имеет место представление

$$a(\zeta) = \frac{1}{2i\zeta}\{f_0^-(x, \zeta)\frac{\partial f_0^+(x, \zeta)}{\partial x} - \frac{\partial f_0^-(x, \zeta)}{\partial x} f_0^+(x, \zeta)\}. \qquad /12/$$

Определенные выше решения f_0^- и f_0^+ уравнения /10/, как известно, допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$. При этом для любого ζ, принадлежащего верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, справедливы соотношения

$$\lim_{x \to -\infty} [f_0^-(x, \zeta) \exp(i\zeta x)] = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} [f_0^+(x, \zeta) \exp(-i\zeta x)] = 1. \qquad /13/$$

Отсюда следует, что функция $a(\zeta)$ также допускает аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$. Кроме того, на основе равенства /12/ получаем, что при любом ζ, лежащем в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, имеют место соотношения

$$\lim_{x \to \infty} [f_0^-(x, \zeta) \exp(i\zeta x)] = a(\zeta),$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f_0^+(x, \zeta) \exp(-i\zeta x)] = a(\zeta). \qquad /14/$$

Возьмем теперь 2N точек $\zeta_1, \dots, \zeta_{2N}$ в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ и положим при $n = 1, \dots, 2N$

$$\phi_n^- = p_n^- f_0^+(x, \zeta_n), \quad \psi_n^- = q_n^- f_0^-(x, \zeta_n),$$

$$\phi_n^+ = p_n^+ f_0^-(x, \zeta_n), \quad \psi_n^+ = q_n^+ f_0^+(x, \zeta_n), \qquad /15/$$

где величины $p_n^-, q_n^-, p_n^+, q_n^+$ не зависят от x и удовлетворяют условию

$$p_n^- q_n^- = p_n^+ q_n^+ = C_n, \quad n = 1, \dots, 2N. \qquad /16/$$

Далее, в соответствии с равенствами /4/ и /15/ положим при $n = 1, \dots, 2N$

$$f_n^- = \int_{-\infty}^{x} \psi_n^-(z) f_0^-(z, \zeta)\, dz = q_n^- \int_{-\infty}^{x} f_0^-(z, \zeta_n) f_0^-(z, \zeta)\, dz,$$

$$f_n^+ = -\int_{x}^{\infty} \psi_n^+(z) f_0^+(z, \zeta)\, dz = -q_n^+ \int_{x}^{\infty} f_0^+(z, \zeta_n) f_0^+(z, \zeta)\, dz. \qquad /17/$$

Подставляя определенные таким образом функции f_0^-, f_0^+, f_1^-, f_1^+, ..., f_{2N}^-, f_{2N}^+ и ϕ_n^-, ψ_n^-, ϕ_n^+, ψ_n^+, $n = 1,\dots,2N$, в равенства /5/, мы получим величины g_0^-, g_0^+, g_1^-, g_1^+, ..., g_{2N}^-, g_{2N}^+. Нетрудно видеть, что в силу /5/, /13/ и /17/ при $n = 1,\dots,2N$ и $\operatorname{Im}\zeta \geq 0$ справедливы асимптотики

$$g_n^-(x,\zeta) \to 0, \quad \text{если } x \to -\infty,$$

$$g_n^+(x,\zeta) \to 0, \quad \text{если } x \to \infty.$$

Отсюда согласно /7/ следует, что

$$g_1^- = \dots = g_{2N}^- = g_1^+ = \dots = g_{2N}^+ \equiv 0,$$

а величины g_0^- и g_0^+ удовлетворяют уравнению

$$(L + \zeta^2) g_0^- = (L + \zeta^2) g_0^+ = 0.$$

Это значит, что величина $g_0^-(x,\zeta)$ может быть представлена как линейная комбинация решений $f_0^-(x,\zeta)$ и $f_0^-(x,-\zeta)$, а величина $g_0^+(x,\zeta)$ может быть представлена как линейная комбинация решений $f_0^+(x,\zeta)$ и $f_0^-(x,-\zeta)$. С учетом этого замечания на основе равенств /5/, /6/ и /13/-/17/ получаем, что

$$g_0^-(x,\zeta) = [4i\zeta^3 + i\sum_{n=1}^{2N} \frac{C_n}{\zeta+\zeta_n} a(\zeta_n)]\, f_0^-(x,\zeta),$$

$$g_0^+(x,\zeta) = -[4i\zeta^3 + i\sum_{n=1}^{2N} \frac{C_n}{\zeta+\zeta_n} a(\zeta_n)]\, f_0^+(x,\zeta). \qquad /18/$$

Положим теперь

$$\hat g_0 = g_0^+(x,\zeta) - a(\zeta)\, g_0^-(x,-\zeta) - b(\zeta)\, g_0^-(x,\zeta).$$

В силу /11/ и /18/ имеем

$$\hat g_0 = i\sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{1}{\zeta-\zeta_n} - \frac{1}{\zeta+\zeta_n}\right) C_n\, a(\zeta_n)\, a(\zeta)\, f_0^-(x,-\zeta) -$$

$$- [8i\zeta^3 + 2i\sum_{n=1}^{2N} \frac{C_n}{\zeta+\zeta_n} a(\zeta_n)]\, b(\zeta)\, f_0^-(x,\zeta). \qquad /19/$$

С другой стороны, согласно /5/, /6/, /11/ и /13/-/17/ убеждаемся в справедливости равенства

$$\hat g_0 = \frac{\partial a}{\partial t} f_0^-(x,-\zeta) + \frac{\partial b}{\partial t} f_0^-(x,\zeta) +$$

$$+ i\sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{1}{\zeta-\zeta_n} - \frac{1}{\zeta+\zeta_n}\right) C_n\, a(\zeta_n)\, a(\zeta)\, f_0^-(x,-\zeta) +$$

$$+ i\sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{1}{\zeta-\zeta_n} - \frac{1}{\zeta+\zeta_n}\right) C_n\, a(\zeta_n)\, b(\zeta)\, f_0^-(x,\zeta).$$

Сравнивая это равенство с равенством /19/, немедленно получаем эволюционные уравнения для величин $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$. Они имеют вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + [8i\zeta^3 + i\sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{1}{\zeta-\zeta_n} + \frac{1}{\zeta+\zeta_n}\right) C_n\, a(\zeta_n)]\, b = 0. \qquad /20/$$

Очевидно, что первое из этих уравнений совпадает с аналогичным для уравнения Кортевега - де Вриса без источника, а второе из уравнений /20/ существенно отличается от аналогичного в случае уравнения Кортевега - де Вриса без источника /2/. Однако, если положить $a(\zeta_n) = 0$ при $n = 1,\dots,2N$, то второе из уравнений /20/ также будет совпадать с аналогичным для уравнения Кортевега - де Вриса без источника.

Нулям $\zeta = \hat\zeta_m$, $m = 1,\dots,m_0$, функции $a(\zeta)$, лежащим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, соответствуют точки дискретного спектра оператора L вида /2/, т.е. при $\zeta = \hat\zeta_m$ справедливо равенство

$$f_0^+(x,\hat\zeta_m) = B_m f_0^-(x,\hat\zeta_m), \quad m = 1,\dots,m_0, \qquad /21/$$

где величины B_m не зависят от x. Найдем зависимость величин B_m от времени t. С этой целью положим

$$\hat g_m = g_0^+(x,\hat\zeta_m) - B_m g_0^-(x,\hat\zeta_m), \quad m = 1,\dots,m_0.$$

С учетом /18/ и /21/ имеем

$$\hat g_m = -[8i\hat\zeta_m^3 + 2i\sum_{n=1}^{2N} \frac{C_n}{\hat\zeta_m+\zeta_n} a(\zeta_n)]\, B_m f_0^-(x,\hat\zeta_m).$$

С другой стороны, в соответствии с равенствами /5/, /6/, /13/-/17/ и /21/ находим, что

$$\hat{g}_m = \left[\frac{\partial B_m}{\partial t} + i\sum_{n=1}^{2N}\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_m - \zeta_n} - \frac{1}{\hat{\zeta}_m + \zeta_n}\right) C_n a(\zeta_n) B_m\right] f_0^-(x, \hat{\zeta}_m).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} + [8i\hat{\zeta}_m^3 + i\sum_{n=1}^{2N}\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_m - \zeta_n} + \frac{1}{\hat{\zeta}_m + \zeta_n}\right) C_n a(\zeta_n)] B_m = 0, \qquad /22/$$

т.е. эволюционное уравнение для нормировочных констант B_m получается из второго уравнения системы /20/ при $\zeta = \hat{\zeta}_m$, $m = 1, \ldots, m_0$.

Предположим теперь, что $m_0 \leq 2N$. Далее, положим $\zeta_m = \hat{\zeta}_m + \delta_m$ и перейдем к пределу при $\delta_m \to 0$, $m = 1, \ldots, m_0$. В результате уравнение /22/ при $m = 1, \ldots, m_0$ примет вид

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} + [8i\hat{\zeta}_m^3 - i a'(\hat{\zeta}_m) C_m] B_m = 0,$$

что с точностью до обозначений совпадает с результатом работы [3].

Система уравнений /20/ и /22/ определяет эволюцию во времени всех данных рассеяния для оператора L вида /2/. Таким образом, по произвольной функции $u_0 = u_0(x)$, удовлетворяющей условию /3/, мы находим данные рассеяния при $t = 0$, а затем с помощью системы /20/, /22/ определяем их эволюцию во времени. При этом величины C_n и ζ_n при $n = 1, \ldots, 2N$ могут быть взяты произвольными непрерывными функциями времени. Однако для того, чтобы решение $u = u(x,t)$ системы /8/ было вещественным при $t > 0$, нам нужно потребовать, кроме вещественности функции $u_0 = u_0(x)$, еще и выполнения условий /9/. С учетом /15/ и /16/ это требование приводит к тому, что величины C_n будут удовлетворять условию $C_{N+n} = \bar{C}_n$, $n = 1, \ldots, N$. В результате мы получим, что величина $b(\zeta)$ в силу /20/ при любых $t \geq 0$ и $\zeta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условию $b(-\zeta) = \overline{b(\zeta)}$, а величины B_m согласно /22/ будут вещественными при любом $t \geq 0$ и $m = 1, \ldots, m_0$. Таким образом, ядро интегрального уравнения Гельфанда - Левитана [4] в этом случае будет вещественным в нужной нам области изменения независимых переменных. Решив это уравнение, мы по известным формулам получаем интересующее нас решение системы /1/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lax P.D. - Commun.Pure Appl. Math., 1968, v.21, No.5, p.467.
2. Gardner C.S. et al. - Phys. Rev. Lett., 1967, v.19,No.19, p.1095.
3. Mel'nikov V.K. - Phys. Lett., 1988, v.A133, No.9, p.493.
4. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. - Известия АН СССР, сер.матем., 1951, т.15, № 4, с.309.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 ноября 1989 года.