сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-738

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛАКСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

1989

В настоящем сообщении речь идет об уравнениях, получаемых следующим образом. Пусть L и A - линейные дифференциальные операторы вида

$$L = \Lambda \partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \partial^k, \quad k_0 \geq 0, \qquad /1/$$

$$A = \sum_{m=0}^{m_0+1} A_{m_0-m+1} \partial^m, \qquad m_0 \geq 0,$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, квадратные матрицы $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}$ и $A_1, \ldots, A_{m_0+1}$ имеют порядок $r_0 \geq 1$, а Λ и A_0 - диагональные матрицы того же порядка соответственно с элементами $\lambda_r \neq 0$ и $a_r \neq 0$ на главной диагонали, $r = 1, \ldots, r_0$. Рассмотрим линейную систему уравнений

$$c \frac{\partial f_0}{\partial y} = (L - \eta) f_0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \tilde{\psi}\; f_0, \quad n = 1, \ldots, N, \qquad /2/$$

относительно неизвестных матриц $f_0, f_1, \ldots, f_N$. При этом мы будем предполагать, что c является константой, а η играет роль спектрального параметра. Кроме того, будем предполагать, что f_0 является квадратной матрицей порядка r_0, матрицы $f_1, \ldots, f_N$ имеют r_1 строк и r_0 столбцов, а матрицы $\psi_1, \ldots, \psi_N$ имеют, наоборот, r_0 строк и r_1 столбцов. Здесь и всюду в дальнейшем знак "~" означает транспонирование. С помощью решения $f_0, f_1, \ldots, f_N$ системы /2/ определим величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + A f_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n,$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \frac{\partial^k \tilde{\psi}_n}{\partial x^k} \Lambda \frac{\partial^{k_0-k} f_0}{\partial x^{k_0-k}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\,\frac{\partial^s(\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^s}\,\frac{\partial^{k-s-1} f_0}{\partial x^{k-s-1}}\,- \qquad /3/$$

$$-\,c\,\frac{\partial f_n}{\partial y}-(\eta-\eta_n)\,f_n\,,\qquad n=1,\dots,N\,,$$

где $\phi_1, \dots, \phi_N$ - некоторые /пока неопределенные/ матрицы, имеющие r_0 строк и r_1 столбцов, и, следовательно, g_0 является квадратной матрицей порядка r_0, а матрицы $g_1, \dots, g_N$ имеют r_1 строк и r_0 столбцов.

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять матрицы $u_0, u_1, \dots, u_{k_0}, \phi_1, \dots, \phi_N$ и $\psi_1, \dots, \psi_N$ для того, чтобы определенные посредством /1/-/3/ величины $g_0, g_1, \dots, g_N$ подчинялись условиям

$$c\,\frac{\partial g_0}{\partial y}-(L-\eta)\,g_0+\sum_{n=1}^{N}\phi_n g_n=0,\qquad \frac{\partial g_n}{\partial x}\equiv 0,\qquad n=1,\dots,N. \qquad /4/$$

С помощью несложных вычислений легко находим, что для справедливости условий /4/ необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial L}{\partial t}+[A,L]+c\,\frac{\partial A}{\partial y}=\Gamma\,, \qquad /5/$$

$$c\,\frac{\partial \phi_n}{\partial y}-(L-\eta_n)\,\phi_n=c\,\frac{\partial \psi_n}{\partial y}+(\tilde{L}-\eta_n)\,\psi_n=0,\qquad n=1,\dots,N\,, \qquad /6/$$

где

$$\Gamma=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{k_0}\{\Lambda\partial^{k_0-k}\cdot\Big(\frac{\partial^k\phi_n}{\partial x^k}\,\tilde{\psi}_n\Big)-(-1)^k\,\phi_n\,\frac{\partial^k\tilde{\psi}_n}{\partial x^k}\,\Lambda\partial^{k_0-k}\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}\{u_k\partial^{k-s-1}\cdot\Big(\frac{\partial^s\phi_n}{\partial x^s}\,\tilde{\psi}_n\Big)- \qquad /7/$$

$$-(-1)^s\,\phi_n\,\frac{\partial^s(\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^s}\,\partial^{k-s-1}\}\,,$$

а оператор $\tilde{L}$ определяется равенством

$$\tilde{L}=(-1)^{k_0+1}\,\Lambda\partial^{k_0+1}+\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\,\partial^k\cdot\tilde{u}_k\,. \qquad /8/$$

Отсюда следует, что оператор Γ имеет вид

$$\Gamma=\sum_{k=0}^{k_0}\gamma_{k_0-k}\,\partial^k\,,\quad \text{где}\quad \gamma_0=\sum_{n=1}^{N}[\,\Lambda,\,\phi_n\tilde{\psi}_n\,]\,.$$

Таким образом, если операторы L и A вида /1/ выбраны так, что порядок оператора $[A,L]$ не превосходит $\max(k_0, m_0)$, то правая и левая части уравнения /5/ имеют одинаковые структуры, и, следовательно, это уравнение записано в корректной форме. Более того, в том случае, когда оператор L обладает какой-нибудь симметрией, и, следовательно, оператор A может быть выбран так, чтобы этой же симметрией обладала вся левая часть уравнения /5/, удовлетворяющие уравнениям /6/ матрицы $\phi_1, \dots$ $\dots, \phi_N$ и $\psi_1, \dots, \psi_N$ всегда могут быть выбраны так, чтобы оператор Γ вида /7/ обладал той же самой симметрией. Это значит, что любому инвариантному многообразию уравнения Лакса без источника соответствует инвариантное многообразие уравнения Лакса с самосогласованным источником Γ вида /7/.

Как показано в работе [1], к исследованию системы уравнений /5/, /6/ применим метод обратной задачи рассеяния. При этом роль операторного представления типа Лакса для этой системы уравнений играют соотношения /4/. В действительности оказалось, что для системы уравнений /5/, /6/ существуют несколько типов операторных представлений. Каждое из них обладает своими достоинствами и недостатками, о которых будет сказано ниже.

Рассмотрим операторы σ_n и τ_n вида

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{k_0}\Lambda\partial^{k_0-k}\cdot\frac{\partial^k\phi_n}{\partial x^k}+\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}u_k\,\partial^{k-s-1}\cdot\frac{\partial^s\phi_n}{\partial x^s}\,,$$

$$/9/$$

$$\tau_n=\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\,\frac{\partial^k\tilde{\psi}_n}{\partial x^k}\,\Lambda\,\partial^{k_0-k}+\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\,\frac{\partial^s(\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^s}\,\partial^{k-s-1}\,.$$

Согласно /7/ нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n \cdot \tilde{\psi}_n - \phi_n \tau_n) . \qquad /10/$$

Далее, с помощью /1/ и /8/ легко находим, что

$$\sigma_n \partial = L \cdot \phi_n - L\phi_n , \quad \partial \cdot \tau_n = \tilde{\psi}_n L - (\widetilde{\tilde{L}\psi_n}) . \qquad /11/$$

Положим теперь

$$T = \frac{\partial}{\partial t} + A + \sum_{n=1}^{N} \phi_n \partial^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n , \quad \mathfrak{L} = c\frac{\partial}{\partial y} - L . \qquad /12/$$

В результате несложных вычислений получаем соотношение

$$[T, \mathfrak{L}] = \Gamma - c\frac{\partial A}{\partial y} - [A, L] - \frac{\partial L}{\partial t} -$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \phi_n \partial^{-1} \cdot [c\frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial y} + (\widetilde{\tilde{L}\psi_n}) - \eta_n \tilde{\psi}_n] - \qquad /13/$$

$$- \sum_{n=1}^{N} [c\frac{\partial \phi_n}{\partial y} - L\phi_n + \eta_n \phi_n] \partial^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n .$$

Таким образом, из этого соотношения следует, что определенные посредством /12/ операторы T и $\mathfrak{L}$ коммутируют между собой в силу уравнений /5/, /6/. Однако из условия коммутации этих операторов уравнения /5/, /6/ не следуют. Например, условие $[T, \mathfrak{L}] = 0$ сохранится, если уравнение /5/ оставить без изменения, а уравнения /6/ заменить на уравнения

$$c\frac{\partial \phi_n}{\partial y} - (L - \eta_n)\phi_n = \sum_{m=1}^{N} \phi_m C_{n,m} ,$$

$$c\frac{\partial \psi_n}{\partial y} + (\tilde{L} - \eta_n)\psi_n = - \sum_{m=1}^{N} \psi_m \tilde{C}_{m,n} ,$$

где элементы матриц $C_{m,n}$ не зависят от x. Тем не менее вытекающее из уравнений /5/, /6/ равенство $[T, \mathfrak{L}] = 0$ оказывается полезным при исследовании различных свойств решений этих уравнений.

Операторное представление второго типа для уравнений /5/, /6/ получается следующим образом. Возьмем операторы θ, F и G вида

$$\theta = \begin{vmatrix} T_0 & \phi_1 & \dots & \phi_N \\ -\tilde{\psi}_1 & \partial & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\tilde{\psi}_N & 0 & & \partial \end{vmatrix} , \qquad /14/$$

$$F = \begin{vmatrix} \mathfrak{L} & \sigma_1 & \dots & \sigma_N \\ 0 & \alpha_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \alpha_N \end{vmatrix} , \quad G = \begin{vmatrix} \mathfrak{L} & 0 & \dots & 0 \\ -\tau_1 & \alpha_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\tau_N & 0 & & \alpha_N \end{vmatrix} ,$$

где

$$T_0 = \frac{\partial}{\partial t} + A , \quad \alpha_n = c\frac{\partial}{\partial y} - \eta_n , \quad n = 1, \dots, N , \qquad /15/$$

а операторы σ_n, τ_n и $\mathfrak{L}$ определены соответственно посредством равенств /9/ и /12/. На основании /10/ и /11/ получаем, что оператор

$$\Delta = F \cdot \theta - \theta \cdot G \qquad /16/$$

имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_{0,0} & \Delta_{0,1} & \dots & \Delta_{0,N} \\ \Delta_{1,0} & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \Delta_{N,0} & & & \end{vmatrix} , \qquad /17/$$

где

$$\Delta_{0,0} = \frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] + c\frac{\partial A}{\partial y} - \Gamma ,$$

$$\Delta_{0,n} = c\frac{\partial \phi_n}{\partial y} - (L - \eta_n)\phi_n , \quad n = 1, \dots, N, \qquad /18/$$

$$\Delta_{n,0} = -c\frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial y} - (\widetilde{\tilde{L}\psi_n}) + \eta_n \tilde{\psi}_n , \quad n = 1, \dots, N.$$

Таким образом, мы видим, что соотношение $\Delta = 0$ эквивалентно системе уравнений /5/, /6/. Именно с помощью этого соотношения впервые была доказана интегрируемость уравнения Кадомцева - Петвиашвили с самосогласованным источником [2]. Однако нахождение решений этого уравнения с помощью решения "прямой" и "обратной" задач рассеяния для оператора θ вида /14/ в настоящее время не является наиболее простым и естественным путем исследования уравнения Кадомцева - Петвиашвили с самосогласованным источником, хотя в свое время именно на этом пути был обнаружен ряд интересных свойств решений этого уравнения [3,4].

Наконец, операторное представление третьего типа имеет следующую структуру. Возьмем операторы T_1, T_2, X и Y вида

$$T_1 = \begin{vmatrix} T_0 & \phi_1 & \dots & \phi_N \\ r_1 & \beta_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ r_N & 0 & & \beta_N \end{vmatrix}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} T_0 & -\sigma_1 & \dots & -\sigma_N \\ -\tilde{\psi}_1 & \beta_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\tilde{\psi}_N & 0 & & \beta_N \end{vmatrix},$$

$$X = \begin{vmatrix} \mathfrak{L}+\eta & 0 & \dots & 0 \\ -\tilde{\psi}_1 & \partial & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\tilde{\psi}_N & 0 & & \partial \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} \mathfrak{L}+\eta & \phi_1 & \dots & \phi_N \\ 0 & \partial & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \partial \end{vmatrix},$$

где операторы σ_n, r_n, $\mathfrak{L}$ и T_0 определены соответственно посредством /9/, /12/ и /15/, а $\beta_n = -c\dfrac{\partial}{\partial y} - \eta + \eta_n$, $n = 1, \dots, N$.
С помощью несложных вычислений согласно /10/ и /11/ убеждаемся, что оператор

$$\Delta = Y \cdot T_1 - T_2 \cdot X \qquad /19/$$

имеет структуру, определяемую равенствами /17/ и /18/. Отсюда следует, что равенство $\Delta = 0$ эквивалентно системе уравнений /5/, /6/. Нетрудно видеть, что равенство $\Delta = 0$ означает следующее. Пусть f - решение уравнения $Xf = 0$. Положим $g = T_1 f$. Тогда из равенства $\Delta = 0$ в силу /19/ следует, что $Yg = 0$, т.е. оператор T_1 переводит произвольное решение f уравнения $Xf = 0$ в решение $g = T_1 f$ уравнения $Yg = 0$. Сравнивая это рассуждение с утверждением, полученным нами ранее на основе равенств /2/-/4/, мы убеждаемся в их полной идентичности. Однако существенная разница между этими двумя подходами состоит в следующем. Если подход, основанный на равенствах /2/-/4/, без труда переносится на континуальный случай, т.е. на случай, когда индекс n принадлежит какому-нибудь континууму, например вещественной оси [5], то в подходе, основанном на операторном представлении, такой переход вызывает существенные трудности.

В заключение выясним, почему два весьма различных определения оператора Δ /одно - с помощью равенства /16/, а другое определение посредством /19// приводят к одним и тем же нелинейным эволюционным уравнениям. С этой целью положим

$$T_1 = \theta + R_1, \quad T_2 = \theta + R_2,$$

где

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\psi}_1 + r_1 & \beta_1 - \partial & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{\psi}_N + r_N & 0 & & \beta_N - \partial \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\phi_1 - \sigma_1 & \dots & -\phi_N - \sigma_N \\ 0 & \beta_1 - \partial & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \beta_N - \partial \end{vmatrix}.$$

Согласно /19/ имеем

$$\Delta = Y \cdot \theta - \theta \cdot X + \Delta_1, \qquad /20/$$

где

$$\Delta_1 = Y \cdot R_1 - R_2 \cdot X.$$

В результате несложных вычислений находим, что

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\Gamma & \phi_1\beta_1 + \sigma_1\partial & \dots & \phi_N\beta_N + \sigma_N\partial \\ \beta_1 \cdot \tilde{\psi}_1 + \partial \cdot r_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \beta_N \cdot \tilde{\psi}_N + \partial \cdot r_N & & & \end{vmatrix}.$$

Далее, положим

$$X = G + Q + \eta 1, \quad Y = F + P + \eta 1,$$

где I - единичная матрица, а операторы P и Q имеют вид

$$P = \left| \begin{array}{cccc} 0 & \phi_1 - \sigma_1 & \dots & \phi_N - \sigma_N \\ 0 & \partial + \beta_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \partial + \beta_N \end{array} \right| ,$$

$$Q = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_1 - \tilde{\psi}_1 & \partial + \beta_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ r_N - \tilde{\psi}_N & 0 & & \partial + \beta_N \end{array} \right| .$$

С учетом равенства /20/ получаем

$$\Delta = F \cdot \theta - \theta \cdot G + \Delta_1 + \Delta_2 ,$$

где

$$\Delta_2 = P \cdot \theta - \theta \cdot Q .$$

После несложных вычислений убеждаемся, что $\Delta_2 = -\Delta_1$, и, следовательно, равенства /16/ и /19/ очевидным образом эквивалентны между собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-690, Дубна, 1989.
2. Mel'nikov V.K. - Lett. Math. Phys., 1983, v.7, No.2, p.129.
3. Mel'nikov V.K. - Commun. Math. Phys., 1989, v.120, No.3, p.451.
4. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-171, Дубна, 1989.
5. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-418, Дубна, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 октября 1989 года.

Мельников В.К.

Р2-89-738

Об уравнениях Лакса с самосогласованным источником

Для уравнений Лакса с самосогласованным источником найдены операторные представления трех видов. Показано, что два из них эквивалентны между собой.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K.

P2-89-738

On the Lax Equations with a Self-Consistent Source

Three types of operator representations are found for the Lax equations with a self-consistent source. Two of them are shown to be equivalent.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989