89-690

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-690

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛАКСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в Оргкомитет IV Международного рабочего совещания "Нелинейные и турбулентные процессы в физике", Киев, октябрь, 1989 г.

1989

В настоящее время существуют веские причины для выделения ряда нелинейных эволюционных уравнений в самостоятельный класс, именуемый всюду в дальнейшем уравнениями Лакса с самосогласованным источником. Хотя все эти уравнения сами по себе являются лаксовыми, т.е. все они обладают операторными представлениями и, следовательно, могут быть проинтегрированы с помощью метода обратной задачи рассеяния для соответствующих линейных операторов, их выделение в особый класс основано на ряде особенностей, которыми обладают только они. Прежде всего, их можно рассматривать как возмущение некоторых /более простых/ лаксовых уравнений путем добавления к ним некоторых дополнительных членов, которые, однако, сохраняют интегрируемость этих уравнений и после добавления возмущающих членов. При этом существует простой алгоритм для нахождения этих возмущений, именуемых в дальнейшем самосогласованными источниками. Далее, каждое из уравнений Лакса с самосогласованным источником может быть проинтегрировано с помощью метода обратной задачи рассеяния для того же самого оператора L, с помощью которого интегрируется соответствующее уравнение Лакса без источника. И, наконец, динамика решений уравнений Лакса с самосогласованным источником оказалась намного богаче динамики решений соответствующих уравнений Лакса без источника. В частности, обнаруженные в последнее время у этих уравнений решения, описывающие захват и удержание солитонов /1/, нерезонансный распад солитонов /2/ и ряд других процессов, в настоящее время встречаются только у этого класса нелинейных эволюционных уравнений.

§ 1. ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАКСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Переход от уравнений Лакса к уравнениям Лакса с самосогласованным источником имеет универсальный характер. Однако ради простоты мы ограничимся здесь наиболее изученным случаем. Именно, пусть L и A - линейные дифференциальные операторы вида

$$L = \Lambda\partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k\partial^k, \quad k_0 \geq 0, \tag{1}$$

$$A = \sum_{m=0}^{m_0+1} A_{m_0-m+1}\partial^m, \qquad m_0 \geq 0,$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, квадратные матрицы $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}$ и $A_1, \ldots, A_{m_0+1}$ имеют порядок $r_0 \geq 1$, а Λ и A_0 - диагональные матрицы порядка r_0 соответственно с элементами $\lambda_r \neq 0$ и $a_r \neq 0$ на главной диагонали, $r = 1, \ldots, r_0$. Рассмотрим линейную систему уравнений

$$c\frac{\partial f_0}{\partial y} = (L-\eta)f_0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \tilde{\psi} f_0, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

относительно неизвестных матриц $f_0, f_1, \ldots, f_N$. При этом мы будем предполагать, что c является константой, а η играет роль спектрального параметра. Кроме того, будем предполагать, что f_0 является квадратной матрицей порядка r_0, матрицы $f_1, \ldots, f_N$ имеют $r_1 \geq 1$ строк и r_0 столбцов, а матрицы $\psi_1, \ldots, \psi_N$ имеют, наоборот, r_0 строк и r_1 столбцов. Здесь и всюду в дальнейшем знак "~" означает транспонирование. С помощью решения $f_0, f_1, \ldots, f_N$ системы /2/ определим величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + Af_0 + \sum_{n=1}^{N}\phi_n f_n,$$

$$g_n = -c\frac{\partial f_n}{\partial y} + \sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\frac{\partial^k\tilde{\psi}_n}{\partial x^k}\Lambda\frac{\partial^{k_0-k}f_0}{\partial x^{k_0-k}} + \tag{3}$$

$$+\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\frac{\partial^s(\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^s}\frac{\partial^{k-s-1}f_0}{\partial x^{k-s-1}} - (\eta-\eta_n)f_n, \quad n=1,\ldots,N,$$

где $\phi_1, \ldots, \phi_N$ - некоторые /пока неопределенные/ матрицы, имеющие r_0 строк и r_1 столбцов, и, следовательно, g_0 является квадратной матрицей порядка r_0, а матрицы $g_1, \ldots, g_N$ имеют r_1 строк и r_0 столбцов.

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять матрицы $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}, \phi_1, \ldots, \phi_N$ и $\psi_1, \ldots, \psi_N$ для того, чтобы определенные посредством /1/-/3/ матрицы $g_0, g_1, \ldots, g_N$ подчинялись условиям

$$c\frac{\partial g_0}{\partial y} - (L-\eta)g_0 + \sum_{n=1}^{N}\phi_n g_n = 0, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n=1,\ldots,N. \tag{4}$$

С помощью несложных вычислений легко находим, что для справедливости условий /4/ необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c\frac{\partial A}{\partial y} + [A, L] = \Gamma, \tag{5}$$

$$c\frac{\partial\phi_n}{\partial y} - (L-\eta_n)\phi_n = c\frac{\partial\psi_n}{\partial y} + (\tilde{L}-\eta_n)\psi_n = 0, \quad n=1,\ldots,N, \tag{6}$$

где

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{k_0}\{\Lambda\partial^{k_0-k}\cdot(\frac{\partial^k\phi_n}{\partial x^k}\tilde{\psi}_n) -$$

$$-(-1)^k\phi_n\frac{\partial^k\tilde{\psi}_n}{\partial x^k}\Lambda\partial^{k_0-k}\} + \tag{7}$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}\{u_k\partial^{k-s-1}\cdot(\frac{\partial^s\phi_n}{\partial x^s}\tilde{\psi}_n) -$$

$$-(-1)^s\phi_n\frac{\partial^s(\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^s}\partial^{k-s-1}\},$$

а оператор $\tilde{L}$ определяется равенством

$$\tilde{L} = (-1)^{k_0+1}\Lambda\partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\partial^k\cdot\tilde{u}_k. \tag{8}$$

Отсюда следует, что оператор Γ имеет вид

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{k_0} \gamma_{k_0-k}\, \partial^k, \quad \text{где} \quad \gamma_0 = \sum_{n=1}^{N} [\Lambda, \phi_n \tilde{\psi}_n].$$

Таким образом, если операторы L и A вида /1/ выбраны так, что порядок оператора $[A, L]$ не превосходит $\max(k_0, m_0)$, то правая и левая части уравнения /5/ имеют одинаковые структуры, и, следовательно, это уравнение записано в корректной форме. Более того, в том случае, когда оператор L обладает какой-либо симметрией, и, следовательно, оператор A может быть выбран так, чтобы этой же симметрией обладала вся левая часть уравнения /5/, удовлетворяющие уравнениям /6/ матрицы $\phi_1, \ldots, \phi_N$ и $\psi_1, \ldots, \psi_N$ всегда могут быть выбраны так, чтобы оператор Γ вида /7/ обладал той же самой симметрией. Это значит, что любому инвариантному многообразию уравнения Лакса без источника соответствует инвариантное многообразие уравнения Лакса с источником.

§ 2. УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ y ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ /5/, /6/

Не зависящее от y решение системы /5/, /6/, очевидно, обязано удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = \Gamma, \qquad /9/$$

$$(L - \eta_n)\phi_n = (\tilde{L} - \eta_n)\psi_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Оказывается, что в типичной ситуации эта система уравнений имеет глобальное решение только в том случае, когда все величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ не зависят от времени t. Ниже будет приведено доказательство этого факта для случая, когда элементы матриц $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}, \phi_1, \ldots, \phi_N$ и $\psi_1, \ldots, \psi_N$ стремятся достаточно быстро к нулю при $x \to \pm\infty$. Однако с незначительными изменениями это доказательство проходит и в других случаях, например, в случае, когда элементы матриц $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}, \phi_1, \ldots, \phi_N$ и $\psi_1, \ldots, \psi_N$ являются 2π-периодическими функциями x.

Действительно, в силу равенства

$$\partial^k \cdot (\phi_n \partial^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n) = \frac{\partial^k \phi_n}{\partial x^k} \partial^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n + \sum_{s=0}^{k-1} \partial^{k-s-1} \cdot \left(\frac{\partial^s \phi_n}{\partial x^s} \tilde{\psi}_n\right)$$

имеем

$$L \cdot (\phi_n \partial^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n) - (L\phi_n)\partial^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0} \Lambda \partial^{k_0-k} \cdot \left(\frac{\partial^k \phi_n}{\partial x^k} \tilde{\psi}_n\right) + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{s=0}^{k-1} u_k \partial^{k-s-1} \cdot \left(\frac{\partial^s \phi_n}{\partial x^s} \tilde{\psi}_n\right). \qquad /10/$$

Далее, справедливо равенство

$$\tilde{\psi}_n L - (\widetilde{\tilde{L}\psi_n}) = \tilde{\psi}_n \Lambda \partial^{k_0+1} + (-1)^{k_0} \frac{\partial^{k_0+1} \tilde{\psi}_n}{\partial x^{k_0+1}} \Lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_0} \left\{ \tilde{\psi}_n u_k \partial^k - (-1)^k \frac{\partial^k (\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^k} \right\}.$$

Поскольку для любой матрицы a имеет место равенство

$$a\partial^k - (-1)^k \frac{\partial^k a}{\partial x^k} = \partial \cdot \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \frac{\partial^s a}{\partial x^s} \partial^{k-s-1},$$

то с учетом предыдущего получаем соотношение

$$\phi_n \partial^{-1} \cdot \{\tilde{\psi}_n L - (\widetilde{\tilde{L}\psi_n})\} = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \phi_n \frac{\partial^k \tilde{\psi}_n}{\partial x^k} \Lambda \partial^{k_0-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \phi_n \frac{\partial^s (\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^s} \partial^{k-s-1}. \qquad /11/$$

Таким образом, на основании /7/, /10/ и /11/ выражение для оператора Γ может быть записано в следующем виде:

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{N} \{L \cdot (\phi_n \partial^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n) - (L\phi_n)\partial^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n\} -$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \phi_n \partial^{-1} \cdot \{\tilde{\psi}_n L - (\widetilde{\tilde{L}\psi_n})\}. \qquad /12/$$

Возьмем теперь убывающее достаточно быстро при $x \to \pm\infty$ решение системы /5/, /6/ и рассмотрим величину

$$J_m = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \Gamma \phi_m dx, \quad m = 1, \dots, N.$$

С помощью равенств /6/, /8/ и /12/ в результате несложных вычислений находим, что

$$J_m = -c \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y} \{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \phi_n \partial^{-1} (\tilde{\psi}_n \phi_m) dx \}.$$

Далее, согласно /6/ и /8/ величины

$$I_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \phi_n dx, \quad m, n = 1, \dots, N,$$

удовлетворяют уравнению

$$c \frac{\partial I_{m,n}}{\partial y} = (\eta_m - \eta_n) I_{m,n},$$

т.е. справедливо равенство

$$I_{m,n} = C_{m,n} \exp[c^{-1} (\eta_m - \eta_n) y], \quad m, n = 1, \dots, N,$$

где величины $C_{m,n}$ не зависят от x и y. В частности, отсюда следует, что величины $I_m = I_{m,m}$ от x и y не зависят, $m = 1, \dots, N$.

Возьмем, наконец, уравнение

$$c \frac{\partial \phi_m}{\partial y} = (L - \eta_m) \phi_m,$$

продифференцируем его по t и умножим полученное равенство слева на решение $\tilde{\psi}_m$ уравнения

$$c \frac{\partial \tilde{\psi}_m}{\partial y} + (\widetilde{L \psi_m}) - \eta_m \tilde{\psi}_m = 0.$$

Далее, к полученному результату прибавим написанное выше уравнение для $\tilde{\psi}_m$, умноженное справа на матрицу $\partial \phi_m / \partial t$. В итоге получим равенство

$$c \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\psi}_m \frac{\partial \phi_m}{\partial t}) + (\widetilde{L \psi_m}) \frac{\partial \phi_m}{\partial t} - \tilde{\psi}_m (L \frac{\partial \phi_m}{\partial t}) = \tilde{\psi}_m (\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial \eta_m}{\partial t}) \phi_m,$$

из которого следует соотношение

$$c \frac{\partial}{\partial y} \{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \frac{\partial \phi_m}{\partial t} dx \} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m (\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial \eta_m}{\partial t}) \phi_m dx.$$

В результате несложных преобразований, основанных на уравнениях /5/ и /6/, приведенное выше соотношение принимает вид

$$\frac{\partial \eta_m}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \phi_m dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \Gamma \phi_m dx - c \frac{\partial}{\partial y} \{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m (\frac{\partial \phi_m}{\partial t} + A \phi_m) dx \}.$$

Левая часть этого равенства в силу сказанного ранее не зависит от y. Следовательно, и правая часть этого равенства не зависит от y. Таким образом, величина

$$\gamma_m = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m (\frac{\partial \phi_m}{\partial t} + A \phi_m) dx + \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \phi_n \partial^{-1} (\tilde{\psi}_n \phi_m) dx$$

является линейной функцией y, т.е.

$$\gamma_m = \alpha_m + \beta_m y, \quad m = 1, \dots, N,$$

где величины α_m и β_m не зависят от x и y. Предположим теперь, что при $y \to \infty$ справедливы асимптотики

$$\phi_m \sim \Phi_m \exp(-\zeta_m y), \quad \psi_m \sim \Psi_m \exp(\zeta_m y), \quad m = 1, \dots, N,$$

где элементы матриц Φ_m и Ψ_m не зависят от y, а величины ζ_m не зависят от x и y. В этом случае легко находим, что

$$\beta_m = -\frac{\partial \zeta_m}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \phi_m dx.$$

В том случае, когда при любом $t \in (t_0, t_1)$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_m \phi_m dx \neq 0, \quad m = 1, \dots, N,$$

на основе сказанного выше получаем, что при любом $t \in (t_0, t_1)$ справедливо равенство

$u_1(x,y)$, ..., $u_{k_0}(x,y)$ оператора L вида /1/ выбираются с соблюдением условия /14/.

Возьмем теперь оператор T вида

$$T = \frac{\partial}{\partial t} + A\,, \qquad /19/$$

где оператор A имеет вид /1/, а его коэффициенты $A_1,\dots,A_{m_0+1}$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{m=0}^{m_0} \zeta^{m_0-m} A_{m+1}\Lambda_0^{m_0-m} \exp(\zeta\Lambda_0 x) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{m_0}\sum_{s=0}^{m_0-m} A_m \frac{\partial^{m_0-m-s}}{\partial x^{m_0-m-s}}\Big\{ \frac{\partial^s K(x,y,z)}{\partial x^s}\Big|_{z=x} \exp(\zeta\Lambda_0 x)\Big\} - \qquad /20/$$

$$- \sum_{m=0}^{m_0} (-1)^m \zeta^{m_0-m} \frac{\partial^m K(x,y,z)}{\partial z^m}\Big|_{z=x} A_0\Lambda_0^{m_0-m} \exp(\zeta\Lambda_0 x) = 0$$

при любом ζ, принадлежащем некоторой области в комплексной плоскости. Далее, предположим, что элементы матрицы F, удовлетворяющей уравнению /17/, зависят еще и от времени t. Отсюда следует, что и элементы матрицы K, удовлетворяющей уравнению /18/, также будут зависеть от времени. Это значит, что элементы определенной посредством /15/ матрицы f_0 также зависят от времени. Более того, с помощью несложных вычислений нетрудно убедиться, что в силу /15/, /19/ и /20/ справедливо равенство

$$Tf_0 - \zeta^{m_0+1} f_0 A_0 \Lambda_0^{m_0+1} = \int_{-\infty}^{x} \hat K(t,x,y,z) \exp(\zeta\Lambda_0 z)\, dz\,, \qquad /21/$$

где

$$\hat K = \frac{\partial K(t,x,y,z)}{\partial t} + \sum_{m=0}^{m_0+1} A_{m_0-m+1} \frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial x^m} +$$

$$+ (-1)^{m_0} \frac{\partial^{m_0+1} K(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+1}} A_0\,. \qquad /22/$$

Из уравнения /18/ следует, что определенная посредством /22/ матрица $\hat K = \hat K(t,x,y,z)$ на основании /20/ удовлетворяет соотношению

$$\hat K(t,x,y,z) + \int_{-\infty}^{x} \hat K(t,x,y,\sigma)\, F(t,\sigma,y,z)\, d\sigma +$$

$$+ \hat F(t,x,y,z) + \int_{-\infty}^{x} K(t,x,y,\sigma)\, \hat F(t,\sigma,y,z)\, d\sigma = 0\,, \qquad /23/$$

где

$$\hat F = \frac{\partial F(t,x,y,z)}{\partial t} + A_0 \frac{\partial^{m_0+1} F(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0+1}} +$$

$$+ (-1)^{m_0} \frac{\partial^{m_0+1} F(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+1}} A_0\,. \qquad /24/$$

Предположим, наконец, что матрица F имеет вид

$$F = F_0(t,x,y,z) + \sum_{n=1}^{N} F_n(t,x,y,z)\,, \qquad /25/$$

где матрица F_0 удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial F_0(t,x,y,z)}{\partial t} + A_0 \frac{\partial^{m_0+1} F_0(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0+1}} +$$

$$+ (-1)^{m_0} \frac{\partial^{m_0+1} F_0(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+1}} A_0 = 0\,, \qquad /26/$$

а матрицы F_n при $n = 1,\dots,N$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial F_n(t,x,y,z)}{\partial t} + A_0 \frac{\partial^{m_0+1} F_n(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0+1}} +$$
$$+(-1)^{m_0} \frac{\partial^{m_0+1} F_n(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+1}} A_0 = F_n(t,x,y,z)\, C_n(t). \qquad /27/$$

При этом мы предполагаем, что элементы диагональных матриц $C_n = C_n(t)$ не зависят от переменных x,y,z. Здесь уместно отметить, что различие в условиях /26/ и /27/ является причиной существенной разницы между предложенной в работе [4] процедурой интегрирования уравнений Лакса и рассматриваемой сейчас схемой интегрирования уравнений Лакса с самосогласованным источником.

С помощью /24/-/27/ легко убеждаемся в справедливости равенства

$$\hat{F} = \sum_{n=1}^{N} F_n(t,x,y,z)\, C_n(t). \qquad /28/$$

Предположим теперь, что при $n = 1,\dots,N$ матрицы F_n допускают представление

$$F_n = \Phi_n(t,x,y)\, \tilde{\Psi}_n(t,z,y), \qquad /29/$$

где матрицы Φ_n и Ψ_n имеют по r_0 строк и r_1 столбцов и удовлетворяют уравнениям

$$c\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = \Lambda \frac{\partial^{k_0+1}\Phi_n}{\partial x^{k_0+1}} - \eta_n \Phi_n,$$
$$c\frac{\partial \Psi_n}{\partial y} = (-1)^{k_0}\Lambda \frac{\partial^{k_0+1}\Psi_n}{\partial z^{k_0+1}} + \eta_n \Psi_n. \qquad /30/$$

Тогда согласно /28/ и /29/ выполняется равенство

$$\hat{F}(t,x,y,z) + \int_{-\infty}^{x} K(t,x,y,\sigma)\, \hat{F}(t,\sigma,y,z)\, d\sigma =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \phi_n(t,x,y)\, \tilde{\Psi}_n(t,z,y)\, C_n(t), \qquad /31/$$

где

$$\phi_n = \Phi_n(t,x,y) + \int_{-\infty}^{x} K(t,x,y,\sigma)\, \Phi_n(t,\sigma,y)\, d\sigma. \qquad /32/$$

В соответствии с /13/, /14/ и /30/ нетрудно убедиться, что определенные посредством /32/ матрицы ϕ_n удовлетворяют уравнению

$$c\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = (L - \eta_n)\,\phi_n, \quad n = 1,\dots,N.$$

Определим теперь по аналогии с уравнениями /2/ матрицы $f_n = f_n(t,x,y,\zeta)$ с помощью равенств

$$f_n = \int_{-\infty}^{x} \tilde{\psi}_n(t,\sigma,y)\, f_0(t,\sigma,y,\zeta)\, d\sigma, \quad n = 1,\dots,N,$$

где матрицы ψ_n будем считать пока неопределенными. С учетом /15/ легко находим, что

$$f_n = \int_{-\infty}^{x} \{\tilde{\psi}_n(t,z,y) + \int_{z}^{x} \tilde{\psi}_n(t,\sigma,y)\, K(t,\sigma,y,z)\, d\sigma\} \exp(\zeta\Lambda_0 z)\, dz. \qquad /33/$$

Отсюда следует, что $f_n \to 0$ при $x \to -\infty$, $n = 1,\dots,N$. Значит, согласно /3/ при $x \to -\infty$ имеем $g_n \to 0$, $n = 1,\dots,N$. Таким образом, на основании /4/ в рассматриваемом нами случае имеем $g_1 = \dots = g_N \equiv 0$, а определенная посредством /3/ величина g_0 в этом случае в силу /4/ обязана удовлетворять уравнению

$$c\frac{\partial g_0}{\partial y} = (L - \eta)\, g_0, \quad \eta = \zeta^{k_0+1}. \qquad /34/$$

Мы заведомо удовлетворим это уравнение, если потребуем, чтобы определенные посредством /22/ и /33/ величины K и $f_n, n=1,\dots,N$, удовлетворяли соотношению

$$\int_{-\infty}^{x} \hat{K}(t,x,y,z) \exp(\zeta\Lambda_0 z)\, dz = -\sum_{n=1}^{N} \phi_n(t,x,y)\, f_n(t,x,y,\zeta). \qquad /35/$$

Действительно, в этом случае в соответствии с /3/, /19/ и /21/ имеем

$$g_0 = \zeta^{m_0+1} f_0 A_0 \Lambda_0^{m_0+1} .$$

Поэтому справедливость /34/ непосредственно вытекает из уравнения /16/. Далее, в соответствии с /33/ и /35/ легко убеждаемся в справедливости соотношения

$$\hat{K}(t,x,y,z) + \int_{-\infty}^{x} \hat{K}(t,x,y,\sigma)\, F(t,\sigma,y,z)\, d\sigma =$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} \phi_n(t,x,y)\{\tilde{\psi}_n(t,z,y) - \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,\sigma,y) K(t,\sigma,y,z)\, d\sigma\}. \qquad /36/$$

При этом матрица $K = K(t,x,y,z)$ при $x<z$ определяется по значениям этой матрицы в полуплоскости $x \geq z$ с помощью равенства

$$K(t,x,y,z) = -F(t,x,y,z) - \int_{-\infty}^{x} K(t,x,y,\sigma)\, F(t,\sigma,y,z)\, d\sigma .$$

Сравнивая равенства /31/ и /36/, мы видим, что определенная посредством /35/ матрица K будет заведомо удовлетворять равенству /23/, если при $n = 1,\dots,N$ выполняются соотношения

$$\tilde{\psi}_n(t,z,y) - \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,\sigma,y) K(t,\sigma,y,z)\, d\sigma = \tilde{\Psi}_n(t,z,y)\, C_n(t) . \qquad /37/$$

Заметим, что в силу единственности решения уравнения /18/ выражение /22/ и полученное с помощью /35/ выражение для матрицы K в рассматриваемом нами случае /т.е. при выполнении условий /37// обязаны совпадать. Поскольку уравнение /37/ является уравнением вольтерровского типа, то проблема существования и единственности решения $\psi_n = \psi_n(t,z,y)$ для него решается тривиально.

Покажем теперь, что решение $\psi_n = \psi_n(t,z,y)$ уравнения /37/ удовлетворяет уравнению

$$c\,\frac{\partial \psi_n}{\partial y} + (\tilde{L} - \eta_n)\,\psi_n = 0 , \quad n = 1,\dots,N , \qquad /38/$$

где оператор $\tilde{L}$ определен посредством /8/. Действительно, согласно /37/ имеем

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_n(t,z,y)}{\partial y} - \int_{-\infty}^{z} \frac{\partial \tilde{\psi}_n(t,\sigma,y)}{\partial y} K(t,\sigma,y,z)\, d\sigma -$$

$$- \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,\sigma,y)\, \frac{\partial K(t,\sigma,y,z)}{\partial y}\, d\sigma = \frac{\partial \tilde{\Psi}_n(t,z,y)}{\partial y}\, C_n(t) ,$$

$$\frac{\partial^{k_0+1} \tilde{\psi}_n(t,z,y)}{\partial z^{k_0+1}} - \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,\sigma,y)\, \frac{\partial^{k_0+1} K(t,\sigma,y,z)}{\partial z^{k_0+1}}\, d\sigma -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\partial^{k_0-k}}{\partial z^{k_0-k}} \{\tilde{\psi}_n(t,z,y)\, \frac{\partial^k K(t,\sigma,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{\sigma=z}\} =$$

$$= \frac{\partial^{k_0+1} \tilde{\Psi}_n(t,z,y)}{\partial z^{k_0+1}}\, C_n(t) , \quad n = 1,\dots,N.$$

Воспользуемся теперь предположением, что матрицы $C_n(t)$ - диагональные. Тогда из приведенных выше соотношений после несложных преобразований, основанных на уравнениях /13/ и /30/, следует, что величины

$$R_n = c\,\frac{\partial \psi_n}{\partial y} + (\tilde{L} - \eta_n)\,\psi_n , \quad n = 1,\dots,N , \qquad /39/$$

удовлетворяют равенству

$$\tilde{R}_n(t,z,y) - \int_{-\infty}^{z} \tilde{R}_n(t,\sigma,y)\, K(t,\sigma,y,z)\, d\sigma = Q_n(t,z,y) ,$$

где

$$Q_n = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{\tilde{\psi}_n(t,z,y)\, u_k(t,z,y)\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^{k-s}\frac{\partial^{k-s-1}}{\partial z^{k-s-1}}\{\tilde{\psi}_n(t,z,y)\,u_k(t,z,y)\}\,\frac{\partial^s K(t,\sigma,y,z)}{\partial\sigma^s}\Big|_{\sigma=z}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^{k_0-k}\,\frac{\partial^{k_0-k}\tilde{\psi}_n(t,z,y)}{\partial z^{k_0-k}}\,\Lambda\,\frac{\partial^k K(t,\sigma,y,z)}{\partial\sigma^k}\Big|_{\sigma=z}-$$

$$-(-1)^{k_0}\sum_{k=0}^{k_0}\frac{\partial^{k_0-k}}{\partial z^{k_0-k}}\{\tilde{\psi}_n(t,z,y)\,\frac{\partial^k K(t,\sigma,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{\sigma=z}\}\,\Lambda\,.$$

Пусть P_r - квадратная матрица порядка r_0, у которой на пересечении r-го столбца и r-й строки стоит единица, а все остальные элементы равны нулю, $r=1,\dots,r_0$. Пусть, далее, $\lambda'_1,\dots$ $\dots,\lambda'_{r_0}$ - диагональные элементы матрицы Λ_0. Пусть, наконец, L_r - прямая в комплексной плоскости ζ, такая, что для любого $\zeta\in L_r$ справедливо равенство $\mathrm{Re}(\zeta\lambda'_r)=0$. Тогда в соответствии с условиями $u_k(t,x,y)\to 0$, $k=0,1,\dots,k_0$, $\psi_n(t,x,y)\to 0$, $n=1,\dots,N$, если $x\to\pm\infty$, при любом $\zeta\in L_r$ справедливы равенства

$$\zeta^k\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)\,\Lambda_0^k\exp(\zeta\Lambda_0 x)\,P_r\,dx=$$

$$=(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\{\tilde{\psi}_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)\}\exp(\zeta\Lambda_0 x)\,P_r\,dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)\,\frac{\partial^{k-s-1}}{\partial x^{k-s-1}}\{\frac{\partial^s K(t,x,y,z)}{\partial x^s}\Big|_{z=x}\exp(\zeta\Lambda_0 x)\}P_r\,dx=$$

$$=(-1)^{k-s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{k-s-1}}{\partial x^{k-s-1}}\{\tilde{\psi}_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)\}\,\frac{\partial^s K(t,x,y,z)}{\partial x^s}\Big|_{z=x}\exp(\zeta\Lambda_0 x)\,P_r\,dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_n(t,x,y)\,\Lambda\,\frac{\partial^{k_0-k}}{\partial x^{k_0-k}}\{\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial x^k}\Big|_{z=x}\exp(\zeta\Lambda_0 x)\}P_r\,dx=$$

$$=(-1)^{k_0-k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{k_0-k}\tilde{\psi}_n(t,x,y)}{\partial x^{k_0-k}}\,\Lambda\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial x^k}\Big|_{z=x}\exp(\zeta\Lambda_0 x)\,P_r\,dx\,,$$

$$\zeta^{k_0-k}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_n(t,x,y)\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{z=x}\Lambda_0^{-k-1}\exp(\zeta\Lambda_0 x)\,P_r\,dx=$$

$$=(-1)^{k_0-k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{k_0-k}}{\partial x^{k_0-k}}\{\tilde{\psi}_n(t,x,y)\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{z=x}\}\,\Lambda\exp(\zeta\Lambda_0 x)\,P_r\,dx\,.$$

Предположим теперь, что матрицы $u_0(t,x,y)$, $u_1(t,x,y)$, ..., $u_{k_0}(t,x,y)$ выбраны так, что соотношение /14/ справедливо при любых t, x, $y\in(-\infty,\infty)$ и $\zeta\in\mathbf{C}$. Отсюда следует, что величины $Q_n(t,x,y)$ при любых $t,y\in(-\infty,\infty)$ и $\zeta\in L_r$ удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(t,x,y)\exp(\zeta\Lambda_0 x)\,P_r\,dx=0,\qquad r=1,\dots,r_0\,.$$

Это значит, что при любых $t,x,y\in(-\infty,\infty)$ справедливо тождество $Q_n(t,x,y)\equiv 0$. Таким образом, определенная посредством /39/ величина R_n удовлетворяет равенству

$$\tilde{R}_n(t,z,y)-\int_{-\infty}^{z}\tilde{R}_n(t,\sigma,y)\,K(t,\sigma,y,z)\,d\sigma=0\,.$$

В силу единственности решения уравнения /37/ отсюда следует, что $R_n(t,x,y)\equiv 0$ при любых $t,x,y\in(-\infty,\infty)$. Таким образом, определенная с помощью /37/ матрица $\psi_n(t,z,y)$ удовлетворяет уравнению /38/. Этот факт завершает построение решения системы уравнений /5/, /6/.

§ 4. N-ВОЛНОВОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ /5/,/6/

Рассмотрим теперь один важный частный случай решения системы /5/, /6/. Именно, положим в равенство /25/ $F_0\equiv 0$ и в соответствии с /29/ будем искать решение $K=K(t,x,y,z)$ уравнения /18/ в следующем виде:

$$K(t,x,y,z) = \sum_{n=1}^{N} K_n(t,x,y)\,\tilde{\Psi}_n(t,z,y)\,. \qquad /40/$$

Подставляя это равенство в уравнение /18/, легко получаем, что равенство /40/ определяет решение уравнения /18/, если матрицы $K_1(t,x,y),\dots,K_N(t,x,y)$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$K_m(t,x,y) + \Phi_m(t,x,y) + \sum_{n=1}^{N} K_n(t,x,y)\,R_{n,m}(t,x,y) = 0\,, \qquad /41/$$

где матрицы $R_{n,m}$ определены посредством равенства

$$R_{n,m} = \int_{-\infty}^{x} \tilde{\Psi}_n(t,z,y)\,\Phi_m(t,z,y)\,dz\,. \qquad /42/$$

Возьмем теперь матрицы P, Q и R вида

$$P = |K_1 \dots K_N|,\quad Q = |\Phi_1 \dots \Phi_N|,\quad R = \begin{vmatrix} R_{1,1} & \dots R_{1,N} \\ \dots & \dots \\ R_{N,1} & \dots R_{N,N} \end{vmatrix}\,. \qquad /43/$$

Согласно /40/ и /42/ матрицы P и Q имеют r_0 строк и Nr_1 столбцов, а R является квадратной матрицей порядка Nr_1. На основании /41/ справедливо равенство

$$P = -Q\,(I+R)^{-1}\,, \qquad /44/$$

где I - единичная матрица порядка Nr_1. Пусть $K_{m,r,s}$ - элемент матрицы K_m, стоящий на пересечении r-й строки и s-го столбца. В силу /44/ при любых $m = 1,\dots,N$, $r = 1,\dots,r_0$ и $s = 1,\dots,r_1$ справедливо равенство

$$K_{m,r,s} = \frac{1}{\det(I+R)}\det\begin{vmatrix} 0 & Q_r \\ e_{(m-1)r_1+s} & I+R \end{vmatrix}\,, \qquad /45/$$

где Q_r - вектор-строка с Nr_1 компонентами, образованный элементами r-й строки матрицы Q вида /43/, а e_r - вектор-столбец с Nr_1 компонентами $\epsilon_{r,s} = \delta_{r,s}$, $r,s = 1,\dots,Nr_1$, т.е. у вектора e_r единственная отличная от нуля компонента равна единице и стоит на r-м месте. Таким образом, элемент $K_{r,s}$ матрицы K, стоящий на пересечении r-й строки и s-го столбца, $r,s = 1,\dots,r_0$, с учетом /45/ может быть представлен в следующем виде:

$$K_{r,s} = \frac{1}{\det(I+R)}\det\begin{vmatrix} 0 & Q_r \\ \tilde{M}_s & I+R \end{vmatrix}\,, \qquad /46/$$

где M_s - вектор-строка с Nr_1 компонентами, образованный элементами s-й строки матрицы M вида

$$M = |\Psi_1 \dots \Psi_N|\,. \qquad /47/$$

Далее, с помощью несложных вычислений в соответствии с равенствами/32/ и /46/ легко находим, что элемент $\phi_{n,r,s}$ матрицы ϕ_n, стоящий на пересечении r-й строки и s-го столбца, $r = 1,\dots,r_0$, $s = 1,\dots,r_1$, допускает представление

$$\phi_{n,r,s} = \Phi_{n,r,s} + \frac{1}{\det(I+R)}\det\begin{vmatrix} 0 & Q_r \\ F_{n,s} & I+R \end{vmatrix}\,,$$

где $F_{n,s}$ - вектор-столбец с Nr_1 компонентами, образованный элементами $[(n-1)r_1+s]$-го столбца матрицы R вида /43/, а $\Phi_{n,r,s}$ - элемент матрицы Φ_n, стоящий на пересечении r-го столбца и s-й строки, $r = 1,\dots,r_0$, $s = 1,\dots,r_1$. Это равенство, очевидно, может быть записано в следующем виде:

$$\phi_{n,r,s} = \frac{1}{\det(I+R)}\det\begin{vmatrix} \Phi_{n,r,s} & Q_r \\ F_{n,s} & I+R \end{vmatrix}\,. \qquad /48/$$

Нетрудно видеть, что $[(n-1)r_1+s]$-я компонента вектора Q_r равна $\Phi_{n,r,s}$, а $[(n-1)r_1+s]$-й столбец матрицы $I+R$ равен сумме векторов $F_{n,s}$ и $e_{(n-1)r_1+s}$. Согласно /45/ и /48/ отсюда следует равенство

$$\phi_{n,r,s}(t,x,y) = -K_{n,r,s}(t,x,y)\,. \qquad /49/$$

Наконец, нам осталось найти решение $\psi_n(t,z,y)$ уравнения /37/. На основе /40/ и /49/ из уравнения /37/ вытекает равенство

$$\tilde{\psi}_n(t,z,y) = \tilde{\Psi}_n(t,z,y)\, C_n(t) -$$

$$- \sum_{m=1}^{N} \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, \phi_m(t,x,y)\, dx\, \tilde{\Psi}_m(t,z,y), \qquad /50/$$

и, таким образом, мы получим явное выражение для матрицы $\psi_n(t,z,y)$, если сможем найти интегралы

$$J_{n,m} = \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, \phi_m(t,x,y)\, dx. \qquad /51/$$

Найдем их. С этой целью возьмем уравнение /37/, заменим в нем переменную z на z', затем умножим его справа на матрицу $\Phi_m = \Phi_m(t,z',y)$ и проинтегрируем по z' от $-\infty$ до z. В результате получим равенство

$$\int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,z',y)\, \Phi_m(t,z',y)\, dz' = \int_{-\infty}^{z} \tilde{\Psi}_n(t,z',y)\, C_n(t)\, \Phi_m(t,z',y)\, dz' +$$

$$+ \int_{-\infty}^{z} \Big\{ \int_{-\infty}^{z'} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, K(t,x,y,z')\, dx \Big\}\, \Phi_m(t,z',y)\, dz'. \qquad /52/$$

С другой стороны, в силу /32/ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, \phi_m(t,x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, \Phi_m(t,x,y)\, dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{z} \Big\{ \tilde{\psi}_n(t,x,y) \int_{-\infty}^{x} K(t,x,y,z')\, \Phi_m(t,z',y)\, dz' \Big\}\, dx.$$

Поменяем теперь в последнем слагаемом этого равенства порядок интегрирования. Нетрудно видеть, что в результате получим равенство

$$\int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, \phi_m(t,x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, \Phi_m(t,x,y)\, dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{z} \Big\{ \int_{z'}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, K(t,x,y,z')\, dx \Big\}\, \Phi_m(t,z',y)\, dz'.$$

С учетом равенства /52/ отсюда следует справедливость соотношения

$$\int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, \phi_m(t,x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{z} \tilde{\Psi}_n(t,x,y)\, C_n(t)\, \Phi_m(t,x,y)\, dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} \tilde{\psi}_n(t,x,y)\, K(t,x,y,z')\, \Phi_m(t,z',y)\, dx\, dz'.$$

С помощью /40/, /49/ и /51/ это соотношение может быть записано в следующем виде:

$$J_{n,m} + \sum_{\alpha=1}^{N} J_{n,\alpha}\, R_{\alpha,m} = \hat{R}_{n,m}, \qquad /53/$$

где матрицы $R_{\alpha,m}$ определены посредством равенства /42/, а матрицы $\hat{R}_{n,m}$ имеют вид

$$\hat{R}_{n,m} = \int_{-\infty}^{z} \tilde{\Psi}_n(t,x,y)\, C_n(t)\, \Phi_m(t,x,y)\, dx. \qquad /54/$$

Возьмем теперь матрицы

$$J_n = | J_{n,1} \ \dots J_{n,N} \ |, \quad \hat{R}_n = | \hat{R}_{n,1} \ \dots \hat{R}_{n,N} \ |. \qquad /55/$$

В соответствии с равенством /53/ имеет место равенство

$$J_n = \hat{R}_n\, (I + R)^{-1}.$$

Согласно этому равенству элемент $J_{n,r,s}$ матрицы J_n, стоящий на пересечении r-й строки и s-го столбца, $r = 1,\dots, r_1$, $s = 1,\dots, Nr_1$, имеет вид

$$J_{n,r,s} = -\frac{1}{\det(I+R)} \det \begin{vmatrix} 0 & \hat{Q}_{n,r} \\ e_s & I+R \end{vmatrix}, \qquad /56/$$

где $\hat{Q}_{n,r}$ - вектор-строка с Nr_1 компонентами, образованными элементами r-й строки матрицы $\hat{R}_n$ вида /55/, а e_s - вектор-столбец с Nr_1 компонентами $\epsilon_{s,s'} = \delta_{s,s'}$. На основании /50/ и /56/ получаем, что элемент $\psi_{n,r,s}$ матрицы ψ_n, стоящий на пересечении r-й строки и s-го столбца, $r = 1,\dots, r_0$, $s = 1,\dots, r_1$, имеет вид

$$\psi_{n,r,s} = \Psi_{n,r,s}\, C_{n,r} + \frac{1}{\det(I+R)} \det \begin{vmatrix} 0 & \hat{Q}_{n,s} \\ \tilde{M}_r & I+R \end{vmatrix},$$

где M_r - вектор-строка с Nr_1 компонентами, образованный элементами r-й строки матрицы M вида /47/, $\Psi_{n,r,s}$ - элемент матрицы Ψ_n, стоящий на пересечении r-й строки и s-го столбца, $r = 1,\dots, r_0$, $s = 1,\dots, r_1$, а $C_{n,r}$ - элемент матрицы C_n, стоящий на пересечении r-й строки и r-го столбца, $r = 1,\dots$ $\dots, r_0$. В том случае, когда $C_{n,1} = \dots = C_{n,r_0}$, согласно /54/ отсюда следует равенство

$$\psi_{n,r,s} = -\frac{C_{n,1}}{\det(I+R)} \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{e}_{(n-1)r_1+s} \\ \tilde{M}_r & I+R \end{vmatrix}.$$

Таким образом, интересующее нас решение системы /5/, /6/ найдено. Оно описывает взаимодействие N волн на плоскости x,y.

В заключение необходимо отметить, что изложенная здесь схема интегрирования системы /5/, /6/ в конкретных случаях позволяет получить решение при весьма общем выборе самосогласованного источника. Более того, многие понятия, возникающие при исследовании уравнений Лакса с самосогласованным источником, могут быть с успехом использованы при изучении уравнений Лакса с произвольным источником.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mel'nikov V.K. - Commun. Math. Phys., 1989, v.120, No.3, p.451.
2. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-89-171, Дубна, 1989.
3. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. - Изв. АН СССР, сер.матем., 1951, т.15, № 4, с.309.
4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. - Функц. анализ, 1974, т.8, вып.3, с.43.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 сентября 1989 года.

Мельников В.К. Р2-89-690

Об уравнениях Лакса с самосогласованным источником

Показано, что для любой нелинейной эволюционной системы, обладающей операторным представлением (представлением Лакса с помощью L-A-пары), существует возмущение (именуемое самосогласованным источником), которое порождается собственными функциями оператора L и которое не нарушает интегрируемости исходной системы. Для широкого класса операторов L приведена схема интегрирования возмущенной системы с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-89-690

On the Lax Equations with a Self-Consistent Source

It is shown that for any nonlinear evolution equation having the operator representation (Lax representation by using L-A pair) there exists perturbation (named a self-consistent source) generated by the eigenfunctions of the operator L such that the pertubed equation can also be integrated by the inverse scattering method for the operator L. The scheme of integrating these equations is found for a wide class of operators L.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989