89 - 685

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Б 246

Р2-89-685

Б.М.Барбашов, А.Л.Кошкаров*

ОТКРЫТАЯ СТРУНА В ФОНОВОМ НЕАБЕЛЕВОМ ПОЛЕ

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

*Петрозаводский государственный университет

1989

Изучение взаимодействия струны с внешним полем представляет интерес в связи с исследованием низкоэнергетического предела в полевой теории струн. Например, из теории заряженной струны, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем, следует эффективное действие для внешнего поля в виде действия Борна - Инфельда /I/ .

Струна, взаимодействующая с внешним полем, интересна также и в физике адронов.

Много работ было посвящено струнам во внешнем электромагнитном (абелевом) поле. К примеру, изучение такой системы в работе /2/ показало. что внешнее электрическое поле должно быть ограничено, что указывает на нелинейность уравнений поля. В связи с этим интересно рассмотреть динамику струны, несущей неабелев заряд и находящейся в неабелевом внешнем поле; рассмотрение динамики такой системы может дать понимание механизма Чана - Патона в полевой теории струн.

Впервые уравнения, описывающие классическое поведение точечного неабелевого заряда во внешнем поле, были написаны Вонгом /3/, лагранжиан для такой системы - в работе /4/. Нетрудно выписать действие для струны с неабелевыми зарядами на концах, что и проделано в этой работе. Именно из вариационного принципа для функционала действия выводится нелинейная краевая задача, в которой неизвестными функциями являются координаты струны и вектор изоспина. Далее предлагается метод выбора калибровки мировой поверхности струны и обсуждается некоторое частное решение, описывающее свободное движение струны в поле.

Уравнения движения

Динамика струны с янг-миллсовскими зарядами на концах, находящейся в неабелевом внешнем поле, определим функционалом действия:

$$S=\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma\, \mathcal{L}_0(\dot{x},x')+\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2). \tag{I}$$

Здесь $\mathcal{L}_0=-\gamma\sqrt{(\dot{x}x')^2-\dot{x}^2x'^2}$ известный лагранжиан свободной безмассовой струны, $\dot{x}^\mu(\tau,\sigma)=\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$, $x'^\mu(\tau,\sigma)=\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}$, $\sigma_1(\tau)\leq\tau\leq\sigma_2(\tau)$; функции описывают положение концов струны на плоскости τ , σ , τ - эволюционный параметр. На концы струны помещены янг-миллсовские заряды, так что сохраняется репараметризационная инвариантность всего действия. Лагранжианы $\mathcal{L}_{1,2}$, описывающие взаимодействие неабелевых зарядов с внешним полем типа Янга - Миллса, имеют вид:

$$\mathcal{L}_i=\frac{1}{R}\,Sp\left\{K_i g^{-1}\left[\frac{d}{d\tau}-q_iA_\mu(x)\,\frac{dx^\mu(\tau,\sigma_i(\tau))}{d\tau}\right]g\right\}_{i=1,2}. \tag{2}$$

Здесь $g(\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_n^i)$ принадлежит представлению компактной связной n-параметрической группы Γ с простой алгеброй Ли γ. Пусть T_a, $a = 1,2,\ldots,n$ – базис алгебры γ, состоящий из антиэрмитовых генераторов со стандартными свойствами:

$$Sp(T_a T_b) = R\,\delta_{ab}\,, \quad [T_a, T_b] = f_{abc} T_c. \tag{3}$$

В (2) входит ковариантная производная, обеспечивающая инвариантность $\mathcal{L}_i$ относительно калибровочных преобразований поля $A_\mu(x)$ с группой Γ. Константы K_i и поля A_μ, входящие в (2), принимают значения в алгебре γ. Изоспин (неабелев заряд) на концах струны строится следующим образом:

$$I_i = g K_i g^{-1} \tag{4}$$

и преобразуется по присоединенному представлению Γ.

Входящая в (2) производная $\frac{dX^\mu}{d\tau}$ имеет вид:

$$\frac{d X^\mu(\tau, \sigma_i(\tau))}{d\tau} = \dot X^\mu(\tau, \sigma_i) + X'^\mu(\tau, \sigma_i)\,\dot\sigma_i(\tau).$$

Лагранжиан вида $\mathcal{L}_i$ для классической янг-миллсовской частицы в неабелевом поле $A_\mu(x)$ был предложен в работе /4/. Уравнения, описывающие эволюцию концов струны в неабелевом электрическом поле, получены в 5 .

В нашем случае действие (I) описывает безмассовую струну, несущую на концах невзаимодействующие между собой, но взаимодействующие с внешним полем $A_\mu(x)$ неабелевы заряды.

Задача состоит в том, чтобы из действия (I) вывести уравнения движения для вектора $X^\mu(\tau,\sigma)$ и изоспина $I_i(\tau)$. С этой целью проварьируем (I) сначала по функциям $\xi_a^i(\tau)$ $i=1,2;\ a=1,2,\ldots,n$, а затем по $X^\mu(\tau,\sigma)$.

I. Варьирование по $\xi_a^i(\tau)$, a = I, ... n, i = I,2

В моменты $\tau_{1,2}$ положение струны фиксировано, и $\delta\xi_a^i(\tau_{1,2}) = 0$. Из (I) следуют уравнения Лагранжа – Эйлера:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_a^i} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot\xi_a^i}\right) = 0 \qquad i = 1,2;\ a = 1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Выпишем уравнения (5) в явной форме. Так как

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{R}\,Sp\left(K_i g^{-1}\frac{dg}{d\tau}\right) - \frac{q_i}{R}\,Sp\left(I_i A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau}\right), \tag{6}$$

то

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_a^i} = \frac{1}{R}\,Sp\left\{-K_i g^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi_a^i} + K_i g^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi_a^i}\frac{dg}{d\tau}\right\} - \frac{q_i}{R}\,Sp\left\{\frac{\partial I_i}{\partial \xi_a^i} A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau}\right\} \tag{7}$$

производные $\partial g/\partial \xi_a^i$ можно выразить через групповой элемент g и базисный элемент T_a. Для этого стандартным образом выберем параметризацию g :

$$g(\xi(\varepsilon)) = e^{\varepsilon_a T_a} g(\xi(0)).$$

Дифференцируя по ε_a, находим при $\varepsilon_a = 0$:

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_a}\frac{\partial \xi_a}{\partial \varepsilon_b}\Big|_{\varepsilon=0} \equiv \frac{\partial g}{\partial \xi_a} N_{ab} = T_b\, g(\xi(0)) = T_b\, g(\xi),\ \det N_{ab} = 0. \tag{8}$$

С учетом этого соотношения проектируем (7) на N_{ab} :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \xi_a^i} N_{ab} = -\frac{q_i}{R}\,Sp\left\{\frac{\partial I_i}{\partial \xi_a^i} N_{ab} A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau}\right\}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \xi_a^i} = \frac{\partial}{\partial \xi_a^i}\left(g K_i g^{-1}\right) = \frac{\partial g}{\partial \xi_a^i} K_i g^{-1} - g K_i g^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi_a^i} g^{-1}$$

и, следовательно:

$$\frac{\partial I_i}{\partial \xi_a^i} N_{ab} = T_b g K_i g^{-1} - T_b g g^{-1} = [T_b, I_i].$$

После этого

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \xi_a^i} N_{ab} = -\frac{q_i}{R}\,Sp\left([T_b, I_i] A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau}\right) = -\frac{q_i}{R}\,Sp\left([I_i, A_\mu] T_b \frac{dX^\mu}{d\tau}\right). \tag{9}$$

Так как $\frac{dg(\xi^i)}{d\tau} = \frac{\partial g}{\partial \xi_a^i}\dot\xi_a^i$, то из (6) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\xi_a^i} = \frac{1}{R}\,Sp\left(K_i g^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi_a^i}\right)$

или

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\xi}^i_a} N_{ab} = \frac{1}{R} Sp(K_i g^{-1} T_b g) = \frac{1}{R} Sp(I_i T_b).$$

Таким образом, уравнения движения (5), спроектированные на N_{ab}, имеют вид

$$Sp\left\{\left([I_i, q_i A_\mu \frac{dX^\mu}{d\tau}] + \dot{I}_i\right) T_b\right\} = 0$$

или

$$\dot{I}_i = q_i \frac{dX^\mu}{d\tau}[A_\mu, I_i] \qquad i=1,2. \qquad (10)$$

Для каждого значения i (10) представляет собой одно из уравнений Вонга, описывающее эволюцию изоспина каждого из концов струны. Проектируя (10) на вектор I в изоспиновом пространстве $I = I_a I_a$, находим:

$$\frac{d}{d\tau} I_i^2 = 0,$$

т.е. изоспин каждого из концов струны сохраняется по величине.

2. Варьирование по $X^\mu(\tau,\sigma)$

Варьирование (1) по координатам $X^\mu(\tau,\sigma)$ струны приводит к уравнениям движения для X^μ и граничным условиям для $X^\mu(\tau,\sigma_i(\tau))$. Мы с самого начала предполагаем, что положение концов струны описывается функциями $\sigma_1(\tau)$ и $\sigma_2(\tau)$, а для внутренних точек струны $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$. Пусть $\delta X^\mu(\tau_{1,2},\sigma) = 0$,

а остальные вариации произвольны. В уравнение движения дает вклад только член $\mathcal{L}_0$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0(\dot{X},X')}{\partial \dot{X}^\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial X'^\mu}\right) = 0, \qquad (11)$$

а в граничные условия дадут вклад все слагаемые действия (1), т.е. $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$. После применения известной формулы Грина к S_0 граничная вариация действия (1) может быть записана в виде:

$$\delta S_{\text{гр}} = \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \left\{\left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{X}^\mu}\dot{\sigma}_1 - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial X'^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \frac{dX^\mu}{d\tau}}\right)\right]\delta X^\mu(\tau,\sigma_1(\tau)) + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{X}^\mu}\dot{\sigma}_2 + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial X'^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial X^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \frac{dX^\mu}{d\tau}}\right)\right]\delta X^\mu(\tau,\sigma_2(\tau))\right\}.$$

Отсюда следуют граничные условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{X}^\mu}\dot{\sigma}_1 - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial X'^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial X^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \frac{dX^\mu}{d\tau}}\right) = 0 \Big/ \sigma=\sigma_1(\tau)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{X}^\mu}\dot{\sigma}_2 + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial X'^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial X^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \frac{dX^\mu}{d\tau}}\right) = 0 \Big/ \sigma=\sigma_2(\tau). \qquad (12)$$

Найдем явный вид этих условий с учетом обычных условий ортонормальной калибровки

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{X}^\mu} = -\gamma \dot{X}^\mu; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial X'^\mu} = \gamma X'^\mu.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} = -\frac{q_i}{R} Sp\left(I_i \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}\frac{dX^\nu}{d\tau}\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dX^\mu}{d\tau}} = -\frac{q_i}{R} Sp\,(I_i A_\mu)$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \frac{dX^\mu}{d\tau}} = \frac{q_i}{R} Sp\left(\dot{I}_i A_\mu + I_i \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu}\frac{dX^\nu}{d\tau}\right) =$$

$$= -\frac{q_i}{R} Sp\left(q_i \frac{dX^\nu}{d\tau}[A_\nu, I_i]A_\mu + I_i \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu}\frac{dX^\nu}{d\tau}\right).$$

Теперь можем получить выражение для

$$\frac{d\mathcal{L}_i}{dX^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \frac{dX^\mu}{d\tau}}\right) = -\frac{q_i}{R} Sp\left\{I_i(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + q_i[A_\mu A_\nu]\frac{dX^\nu}{d\tau}\right\} =$$

$$= \frac{q_i}{R} Sp(I_i F_{\mu\nu})\frac{dX^\nu}{d\tau}.$$

После этого (I2) принимают вид:

$$\gamma(\dot{x}_\mu \dot{\sigma}_1 + x'_\mu) = \frac{q_1}{R} Sp(I_1 F_{\mu\nu}) \frac{dx^\nu(\tau,\sigma_1)}{d\tau} = \frac{q_1}{R}(\dot{x}^\nu + x'^\nu \dot{\sigma}_1) Sp(I_1 F_{\mu\nu})$$

$$-\gamma(\dot{x}_\mu \dot{\sigma}_2 + x'_\mu) = \frac{q_2}{R} \frac{dx^\nu(\tau,\sigma_2)}{d\tau} Sp(I_2 F_{\mu\nu}) = \frac{q_2}{R}(\dot{x}^\nu + x'^\nu \dot{\sigma}_2) Sp(I_2 F_{\mu\nu}). \quad (I3)$$

Выбор калибровки

Уравнения (I0),(II) и (I3) описывают эволюцию изоспина на концах струны и координат струны в произвольной параметризации. Можно зафиксировать калибровку так, чтобы выполнялась

$$\dot{\sigma}_i(\tau) = 0. \quad (I4)$$

Для простоты рассмотрим случай равных, но противоположных по знаку неабелевых зарядов на концах: $q_1 = -q_2 = q$; $I_1 = I_2$ и затем спроектируем соотношения (I3) на некоторый постоянный вектор n^μ; тогда:

$$\dot{\sigma}_1\left[\gamma(n\dot{x}) - \frac{q}{R}(n^\mu x'^\nu) Sp(IF_{\mu\nu})\right] = \gamma(nx') + \frac{q}{R}(n^\mu \dot{x}^\nu) Sp(IF_{\mu\nu}) \quad (I5)$$

$$\dot{\sigma}_2\left[\gamma(n\dot{x}) - \frac{q}{R}(n^\mu x'^\nu) Sp(IF_{\mu\nu})\right] = -\gamma(nx') + \frac{q}{R}(n^\mu \dot{x}^\nu) Sp(IF_{\mu\nu}).$$

Потребуем теперь выполнение условий, которые играют роль калибровочных условий /2/

$$-\gamma(nx') + \frac{q}{R} n^\mu \dot{x}^\nu Sp(IF_{\mu\nu}) = 0$$

$$\gamma(n\dot{x}) - \frac{q}{R} n^\mu x'^\nu Sp(IF_{\mu\nu}) = 1. \quad (I6)$$

Тогда из (I5) следует, что $\dot{\sigma}_i(0) = 0$, и граничные условия приобретают более простой вид:

$$\gamma x'^\mu = \frac{q}{R}\dot{x}^\nu Sp(IF^\mu_\nu), \quad \sigma_1 = 0$$

$$\gamma x'^\mu = \frac{q}{R}\dot{x}^\nu Sp(IF^\mu_\nu), \quad \sigma_2 = \pi. \quad (I7)$$

Уравнения (I7) вполне аналогичны граничным условиям для струны с заряженными концами во внешнем электромагнитном поле /2/. В частности, правая часть (I7) есть сила Лоренца, действующая на заряженные концы струны со стороны внешнего поля, левая часть представляет силу натяжения, действующую со стороны струны на безмассовый , но несущий изоспин конец струны, в то время как в уравнении Вонга /3/ слева стоит произведение массы на ускорение, а в правой части - неабелева сила Лоренца.

В формулах (I3) можно положить $\dot{\sigma}_i(\tau) = 0$, если вообще не фиксировать калибровку, т.е. не накладывать условий (I6). Тогда краевую задачу можно решать в рамках так называемого ковариантного формализма, сохраняя некоторый произвол в выборе параметров τ, σ.

Решение краевой задачи

Как уже было отмечено, уравнения, описывающие эволюцию вектора $x^\mu(\tau,\sigma)$ во внешнем неабелевом поле, аналогичны соответствующей абелевой задаче. В абелевом случае краевую задачу для x^μ удалось решить в случае постоянного внешнего электромагнитного поля /2/. Было изучено движение струны в полях разной конфигурации, найдены динамические величины, выполнено квантование.

В данном случае задача выглядит гораздо сложнее. Выпишем все уравнения движения вместе (без фиксации калибровки)

$$\ddot{x}^\mu(\tau,\sigma) - x''^\mu(\tau,\sigma) = 0 \quad (I8)$$

$$\gamma x'^\mu(\tau,0) = \frac{q_1}{R}\dot{x}^\nu(\tau,0) Sp(I_1 F^\mu_\nu)$$

$$-\gamma x'^\mu(\tau,\pi) = \frac{q_2}{R}\dot{x}^\nu(\tau,\pi) Sp(I_2 F^\mu_\nu) \quad (I9)$$

$$\dot{I}^a_i(\tau) = q_i \dot{x}^\mu(\tau,\sigma_i)[A_\mu, I^a_i] \quad i = 1,2. \quad (20)$$

Отсюда надо найти функции $x^\mu(\tau,\sigma)$ и $I^a(\tau)$. Величина A_μ, входящая в (20), входит в уравнения (I9) нелинейно, поэтому даже для постоянного поля F^μ_ν решение (I8-20) не найдено.

Мы укажем одно специальное частное решение, которое существует и в абелевом случае /6/. Пусть в постоянном поле F^μ_ν выполняется условие для изотропного поля:

$$x^\nu F^\mu_{a\nu} = 0 \qquad a = 1,2,\dots,n, \quad (2I)$$

смысл которого мы разъясним ниже. Тогда краевые условия (I9) превращаются в краевые условия для свободной струны

$$\gamma x'^\mu(\tau,\sigma_i) = 0 \qquad \sigma_i = 0, \pi.$$

Решением этих краевых условий и уравнения (I8) является свободное движение.

Естествен вопрос: почему поле F^μ_ν не взаимодействует с зарядами на концах струны?

Здесь надо обратиться к условию (2I), оно выполнимо в полях изотропных

$$\det F^\mu_{a\nu} = 0 \qquad a = 1,2,\dots,n. \tag{22}$$

Размерность пространства решений уравнения (22) (размерность вектора X^ν) определяется разностью $D - r$, где D - размерность пространства-времени, а r - ранг матрицы $F^\mu_{a\nu}$. Таким образом, обсуждаемое решение есть свободное движение заряженной струны в подпространстве, где на заряженные концы не действует поле $F^\mu_{a\nu}$ специальной конфигурации (аналогия: частица с электрическим зарядом, движущаяся вдоль силовых линий однородного постоянного магнитного поля, ведет себя как свободная).

В заключение отметим , что остается актуальной проблема решения краевой задачи (I8-20) для постоянного внешнего поля F^μ_ν в ковариантном или в нековариантном (т.е. с наложением калибровочных условий (I6)) формализме.

Авторы благодарны В.В.Нестеренко за многочисленные обсуждения.

Литература

1. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. Nucl. Phys. B26I (I985) I.
2. Barbashov B.M., Koshkarov A.L., Nesterenko V.V. JINR preprint E2-9975, Dubna, I976.
3. Wong S. Nuovo Cimento 65A (I970) 689.
4. Balachandran A. et al. Phys. Rev., DI5, I977, 2308.
5. Ryang S., Ishida J. Progr. Theor. Phys., v. 66, 685 (I98I).
6. Koskarov A., Nesterenko V. JINR preprint E2-89-555, Dubna, (I989).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 сентября I989 года.

Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. Р2-89-685

Открытая струна в фоновом неабелевом поле

Взаимодействие заряженных струн с внешним полем представляет интерес в связи с низкоэнергетическим пределом в полевой теории струн. Из теории заряженной струны, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем, следует эффективное действие Борна - Инфельда для внешнего поля [1], т.е. внешнее поле должно быть ограничено, что является следствием нелинейности. Здесь рассматривается динамика струны во внешнем поле Янга - Миллса, несущей неабелев заряд на концах. Находится функция действия. Из вариационного принципа выводятся краевая задача и уравнение движения для координат струны и вектора изоспина. Предлагаются калибровочные условия для такой системы и обсуждается одно частное решение, отвечающее свободному движению струны в поле.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Barbashov B.M., Koshkarov A.L. P2-89-685

An Open String in a Background Non-Abelian Field

Interaction of charged strings with an external field is of interest in connection with the low-energy limit in the string field theory.The theory of a charged string interacting with an external electromagnetic field gives the Born-Infeld effective action for the external field [1], i.e. the external field should be bounded, which is a result of nonlinearity. Here we consider dynamics of a string with non-Abelian charges at ends in the Yang-Mills external field. The action function is determined; the boundary-value problem and equation of motion for the string coordinates and isospin vector are deduced from the variational principle. Gauge conditions are proposed for this system, and a particular solution is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989