Объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-675

В.К.Мельников

О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ВРИСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в Оргкомитет V Международного симпозиума
по избранным проблемам статистической механики,
Дубна, 22-24 августа 1989 г.

1989

В 1967 году был обнаружен следующий замечательный факт, касающийся быстро убывающих по x решений уравнения Кортевега - де Вриса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \qquad /1/$$

Именно пусть $u = u(x, t)$ - решение уравнения /1/, удовлетворяющее условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ |xu(x, t)| + \sum_{r=0}^{3} | \frac{\partial^r u(x,t)}{\partial x^r} | \} dx < \infty \qquad /2/$$

при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Возьмем это решение и рассмотрим оператор Шредингера L вида

$$L = \partial^2 + u(x, t), \qquad /3/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по x, а $u = u(x, t)$ - упомянутое выше решение уравнения /1/. В работе [1] было установлено, что точки дискретного спектра $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, \ldots, N$, оператора Шредингера L вида /3/ с потенциалом $u = u(x, t)$, удовлетворяющим уравнению /1/ и условию /2/, не зависят от времени t, т.е. являются первыми интегралами уравнения Кортевега - де Вриса. В работе [2] было дано объяснение этого факта. Как было обнаружено совсем недавно, это свойство дискретного спектра оператора Шредингера сохраняется и в случае, если решение $u = u(x, t)$ уравнения /1/ заменить на решение $v = v(x, t)$ уравнения Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником.

Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, рассмотрим уравнение Кортевега - де Вриса с источником

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 6v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad /4/$$

где $V = V(x, t)$ - вещественная функция x и t, при любом $t \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right| dx < \infty . \qquad /5/$$

Пусть $v = v(x, t)$ - решение уравнения /4/, удовлетворяющее условию /2/. Пусть, далее, уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + v(x, t)\, \phi = \lambda \phi \qquad /6/$$

при $t = t'$ имеет точку $\lambda = \lambda_n > 0$ точкой дискретного спектра, т.е. при $t = t'$ и $\lambda = \lambda_n$ уравнение /6/ имеет решение $\phi = \phi_n(x)$, удовлетворяющее условию

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^2(x)\, dx < \infty . \qquad /7/$$

Продифференцируем теперь уравнение /6/ по времени t при $t = t'$. В результате получим соотношение

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + v(x, t')\, \psi_n - \lambda_n \psi_n = \left(\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \phi_n , \qquad /8/$$

где $\psi_n = \dfrac{\partial \phi_n}{\partial t}$ при $t = t'$. В силу /6/ и /8/ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \psi_n \right) = \left(\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \phi_n^2 .$$

Интегрируя это равенство по x от $-\infty$ до ∞, находим, что

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t'} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v(x, t')}{\partial t'} \phi_n^2(x)\, dx . \qquad /9/$$

Как известно [2], имеет место равенство

$$6v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = [A, L],$$

где операторы A и L имеют вид

$A = 4\partial^3 + 3(v\partial + \partial \cdot v)$, $L = \partial^2 + v$.

Отсюда следует, что согласно /4/ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v(x, t')}{\partial t'} \phi_n^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V(x, t')}{\partial x} \phi_n^2(x)\, dx -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\, [A, L]\, \phi_n(x)\, dx .$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства, как известно, равно нулю. Действительно, нетрудно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\, [A, L]\, \phi_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\, A \cdot (L - \lambda_n)\, \phi_n(x)\, dx -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\, (L - \lambda_n) \cdot A\, \phi_n(x)\, dx .$$

Легко видеть, что первое слагаемое в правой части написанного сейчас равенства равно нулю на основе /6/, а второе слагаемое после интегрирования по частям приводится к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\, (L - \lambda_n) \cdot A\, \phi_n(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [(L - \lambda_n)\, \phi_n(x)]\, [A\, \phi_n(x)]\, dx ,$$

и, следовательно, также равно нулю на основании /6/. Таким образом, равенство /9/ принимает вид

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x} \phi_n^2(x)\, dx . \qquad /10/$$

В силу /7/ из этого равенства следует, что равенство $\dfrac{\partial \lambda_n}{\partial t} = 0$ возможно, если только выполняется равенство

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x} \phi_n^2 (x)\, dx = 0 . \qquad /11/$$

Покажем, что равенство /11/ выполняется для любого самосогласованного источника, т.е. в случае, когда функция $V = V(x,t)$ имеет вид [3]:

$$V = \sum_{n=1}^{N} C_n(t)\, \phi_n^2(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t,\zeta)\, \psi(x,t,\zeta)\, d\zeta , \qquad /12/$$

где $\phi_n = \phi_n(x,t)$ – удовлетворяющие условию /7/ решения уравнения /6/ при $\lambda = \lambda_n > 0$, $C_n = C_n(t)$ – непрерывные вещественные функции времени t, $n = 1, \ldots, N$, а $\phi = \phi(x,t,\zeta)$ и $\psi = \psi(x,t,\zeta)$ – решения уравнения /6/ с $\lambda = -\zeta^2$, $\zeta \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ |\phi(x,t,\zeta)|^2 + |\psi(x,t,\zeta)|^2 \} \zeta^2 d\zeta < \infty ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ \left| \frac{\partial \phi(x,t,\zeta)}{\partial \zeta} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi(x,t,\zeta)}{\partial \zeta} \right|^2 \} |\zeta| d\zeta < \infty .$$

Нетрудно убедиться, что эти условия гарантируют для функции $V = V(x,t)$ вида /12/ справедливость неравенства /5/.

Величины $\Phi_n = \phi_n^2(x)$ в силу /6/ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial x^3} + 4(v - \lambda_n) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \Phi_n = 0 . \qquad /13/$$

Это значит, что при любых m, $n = 1, \ldots, N$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} [\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} \Phi_n - \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \Phi_m \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} +$$

$$+ 4(v - \lambda_m) \Phi_m \Phi_n] + 4(\lambda_m - \lambda_n) \Phi_m \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = 0 .$$

Отсюда следует, что при $m \neq n$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m(x) \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x} dx = 0 . \qquad /14/$$

Поскольку при $m = n$ справедливость /14/ проверяется непосредственно, то в результате мы убеждаемся, что равенство /14/ выполняется при любых $m, n = 1, \ldots, N$. Далее, величина $\Phi = \phi(x,t,\zeta)\, \psi(x,t,\zeta)$ в соответствии с /6/ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + 4(v + \zeta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \Phi = 0 .$$

С учетом /13/ отсюда следует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} [\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Phi_n - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \Phi \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} +$$

$$+ 4(v - \lambda_n) \Phi \Phi_n] + 4(\zeta^2 + \lambda_n) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Phi_n = 0 .$$

Таким образом, при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ и $n = 1, \ldots, N$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x,t,\zeta)}{\partial x} \Phi_n(x,t)\, dx = 0 . \qquad /15/$$

Подставим теперь выражение /12/ в равенство /11/. На основе /14/ получаем

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x,t,\zeta)}{\partial x} d\zeta \} \phi_n^2(x,t)\, dx .$$

Изменив порядок интегрирования, находим, что

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x,t,\zeta)}{\partial x} \Phi_n(x,t)\, dx \} d\zeta ,$$

т.е. в силу /15/ имеем $J_n = 0$ при любом $n = 1, \ldots, N$ и $t \in (-\infty, \infty)$ и, таким образом, для любой функции $V = V(x,t)$ вида /12/ справедливость равенства /11/, а следовательно, и равенства $\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = 0$, $n = 1, \ldots, N$, доказана. Это значит, что в случае самосогласованного источника точки дискретного спектра $\lambda = \lambda_n$,

$n = 1, \ldots, N$, оператора Шредингера также не зависят от времени t, т.е. являются первыми интегралами.

В заключение нелишне отметить, что в случае произвольного источника $V = V(x, t)$, удовлетворяющего неравенству /5/, как это следует из равенства /10/, точки дискретного спектра $\lambda = \lambda_n$ оператора Шредингера будут, вообще говоря, зависеть от времени t. Это может привести к тому, что общее число точек дискретного спектра оператора Шредингера будет меняться со временем. Это значит, что в этой ситуации солитоны уравнения /4/ могут как рождаться, так и исчезать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C.S. et al. - Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, No.19, p.1095.
2. Lax P.D. - Commun.Pure Appl. Math., 1968, v.21, No.5, p.467.
3. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-290, Дубна, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 сентября 1989 года.

Мельников В.К. Р2-89-675

О первых интегралах уравнения Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником

Показано, что точки дискретного спектра оператора Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим уравнению Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником, не зависят от времени t и, таким образом, являются первыми интегралами этого уравнения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-89-675

On First Integrals of the Korteweg - de Vries Equation with a Self-Consistent Source

It is shown that the points of the discrete spectrum of the Schroedinger operator with the potential satisfying the Korteweg - de Vries equation with a self-consistent source are independent of time t and thus are first integrals of this equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989