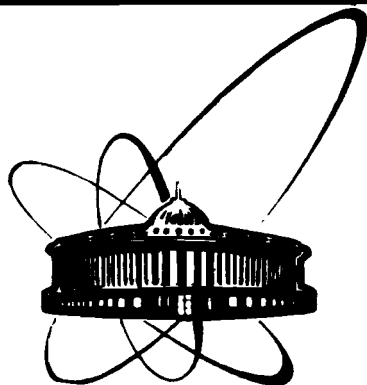


89-633



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

P2-89-633

C 408

**А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян\*, Г. С. Погосян\*,  
И. В. Луценко\***

**АТОМ ВОДОРОДА В РОЛИ ИНДИКАТОРА  
СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ  
КОЛЬЦЕОБРАЗНОГО ПОТЕНЦИАЛА**

Направлено в журнал "Теоретическая  
и математическая физика"

---

\* Ереванский государственный университет

**1989**

## 1. Введение

Сравнительно недавно вышли две статьи, посвященные проблеме скрытой симметрии кольцеобразного потенциала <sup>1,2/</sup>. В общем случае кольцеобразный потенциал в кулоновских единицах записывается в виде

$$V(z, \theta) = -\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2 \sin^2 \theta}, \quad (I.1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - положительные константы, берущиеся из опыта;  $z$  и  $\theta$  - сферические координаты, причем под  $\theta$  понимается полярный угол. При специальной параметризации констант  $\alpha$  и  $\beta$  (I.1) переходит в потенциал Хартмана, досконально изученный в работах <sup>3-5/</sup>. Очевидно, при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  из (I.1) получается кулоновское поле.

В силу аксиальной симметрии потенциала (I.1) вместе с энергией измеримо магнитное квантовое число  $m$ . Дискретный спектр задачи описывается формулой <sup>3/</sup>

$$E = -\alpha^2 / 2N^2. \quad (I.2)$$

Здесь  $N = N_0 + M$ ,  $N_0$  пробегает лишь целые положительные значения  $M = \sqrt{m^2 + 2\beta}$  - имеется в виду арифметический корень.

Объясним наш интерес к столь хорошо изученной задаче. Рассмотрим слагаемое  $\delta V = \beta z^{-2} \sin^{-2} \theta$  в потенциале  $V(z, \theta)$  как добавку к кулоновскому полю  $V_c = -\alpha z^{-1}$ . Казалось бы, эта, нарушающая геометрическую симметрию кулоновского поля, добавка должна разрушить случайное вырождение. На самом же деле спектр остается вырожденным - понижается лишь кратность его вырождения <sup>1/</sup>. Об этом говорит хотя бы тот факт, что переменные в уравнении Шредингера с потенциалом (I.1) разделяются (как и для атома водорода) в сферических и в параболических координатах. Если считать, что за указанное вырождение ответственна скрытая симметрия, то нужно признать, что ее наличие само по себе весьма уникально - ведь потенциал (I.1) всего лишь аксиально симметричен.

Группа скрытой симметрии кольцеобразного потенциала до сих пор еще не открыта. Не решен этот важный вопрос и в нашей статье. И все

же полученный нами здесь результат, помимо своей прикладной ценности - хорошая техника вычисления матричных элементов - может оказаться полезным и для будущей теории скрытой симметрии кольцеобразного потенциала. Поясним сказанное. В случае атома водорода одним из сигналов, свидетельствующих о скрытой симметрии, служит факт разделения переменных, о котором говорилось выше. На этом языке тип скрытой симметрии определяется явным видом, а точнее - математической структурой коэффициентов разложения параболического базиса по сферическому<sup>6-8/</sup>. С позиции такой идеологии вполне естественно считать, что математическая структура коэффициентов аналогичного разложения для кольцеобразного потенциала может также принести конкретную пользу. Именно исследованная в настоящей статье задача о разложении параболического базиса кольцеобразного потенциала по сферическому представляется нам весьма актуальной и своевременной.

## 2. Базис

Определим сферические и параболические координаты обычным образом<sup>9/</sup>:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$x = \sqrt{\mu\nu} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\mu\nu} \sin \varphi, \quad z = (\mu - \nu)/2.$$

Тогда для сферического и параболического базиса кольцеобразного потенциала, следуя работам<sup>1,3/</sup>, имеем

$$\psi_{n_2, t, m}(z, \theta, \varphi) = R_{n_2, t}(\rho) Z_{t, m}(\cos \theta) e^{im\varphi} / \sqrt{2\pi}, \quad (2.1)$$

$$\Phi_{n_1, n_2, m}(\mu, \nu, \varphi) = \frac{\sqrt{2d^3}}{N^2} Y_{n_1, m} \left( \frac{\alpha\mu}{N} \right) Y_{n_2, m} \left( \frac{\alpha\nu}{N} \right) e^{im\varphi} / \sqrt{2\pi}. \quad (2.2)$$

Квантовые числа  $N$  и  $M$  были определены выше. Числа  $n_2, t, m_1, m_2$  являются целыми и положительными. Выполняется условие  $N_0 = n_2 + t + 1 = m_1 + m_2 + 1$ .

Дальнейшие обозначения таковы:

$$Z_{t, m} = 2^M \Gamma(M + 1/2) \sqrt{\frac{t! (t + M + 1/2)}{\pi \Gamma(t + 2M + 1)}} \quad (2.3)$$

$$(1 - \cos^2 \theta)^{M/2} C_t^{M+1/2}(\cos \theta).$$

$$Y_{p, m}(\varrho) = \sqrt{\frac{\Gamma(p + M + 1)}{p!}} \frac{e^{-\varrho/2} \varrho^{M/2}}{\Gamma(M + 1)} F(-p; M + 1; \varrho), \quad (2.4)$$

$$R_{n_2, t}(\rho) = \frac{2}{N^2} \sqrt{\frac{\Gamma(N + \lambda + 1)}{n_2!}} \frac{\alpha^{3/2}}{\Gamma(2\lambda + 2)} e^{-\alpha\rho/N} \left( \frac{2\alpha\rho}{N} \right)^\lambda F(-n_2; 2\lambda + 2; \frac{2\alpha\rho}{N}), \quad (2.5)$$

где  $\lambda = t + M$ , а  $C_N^q(x)$  - полиномы Гегенбауэра, для которых ниже используются следующие два представления<sup>10/</sup>

$$C_N^q(x) = \frac{\Gamma(2q + n) \Gamma(q + 1/2) (-1)^n}{\Gamma(2q) \Gamma(q + n + 1/2) 2^n n!} (1 - x^2)^{q-1/2} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n - q - 1/2}, \quad (2.6a)$$

$$C_n^q(x) = \frac{\Gamma(2q + n)}{\Gamma(2q) n!} F(-n, n + 2q; q + 1/2; \frac{1-x}{2}). \quad (2.6b)$$

Предлагается, что  $n$  - целое, а  $q$  - вещественно. Каждому уровню энергии (1.2) соответствуют  $N_0$  волновых функций типа (2.1) и (2.2). Поэтому разложение параболического базиса кольцеобразного потенциала по сферическому можем записать в виде

$$\Phi_{n_1, n_2, m}(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{t=0}^{n_1 + n_2} W_{n_1, n_2}^{t, m} \psi_{n_2, t, m}(z, \theta, \varphi). \quad (2.7)$$

Мы должны вычислить коэффициенты  $W$ .

## 3. Аналогия

Легко убедиться, что между волновыми функциями атома водорода и кольцеобразного потенциала имеется взаимно однозначное соответствие. В самом деле, сравнение формулы (2.6b) с формулой<sup>10/</sup>

$$P_S^v(x) = \frac{\Gamma(s + v + 1)}{\Gamma(s - v + 1)} \frac{(1 - x^2)^{v/2}}{(-2)^v} F(v - s, v + s + 1; v + 1; \frac{1-x}{2}), \quad (3.1)$$

обобщающей функции Лежандра на случай нецелых индексов (см. <sup>10/</sup>), убеждает, что функция  $Z_{t, m}(\cos \theta)$  выражается через присоединенные полиномы Лежандра

$$Z_{tM}(\cos\theta) = (-1)^M \frac{t!(2t+M+1)}{\sqrt{2}\Gamma(t+2M+1)} P_{t+M}^M(\cos\theta). \quad (3.2)$$

Теперь видно, что подстановка

$$Z \leftrightarrow \alpha, \quad |m| \leftrightarrow M = \sqrt{m^2 + 2\beta}, \quad \ell \leftrightarrow \lambda = t + M \quad (3.3)$$

переводит сферический и параболический базис водородоподобного атома (см., например, [11]) в сферический и параболический базис кольцеобразного потенциала, и наоборот. При этом квантовые числа  $n_1, n_2, n_2$  остаются неизменными. Сказанное нарушается лишь в части, связанной с собственной функцией  $Z$  - проекции орбитального момента, однако для разложения (2.7) это не существенно.

Рецепт (3.3) имеет эвристическую ценность. Действительно, для атома водорода разложение параболического базиса по сферическому базису имеет вид [6-8]

$$\Phi_{n_1 n_2 m}^c(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{\ell=|m|}^{n_1+n_2} e^{iq_\ell} C_{j_1 m_1; j_2 m_2}^{\ell m} \psi_{n_2 \ell m}^c(z, \theta, \varphi). \quad (3.4)$$

Здесь  $C_{j_1 m_1; j_2 m_2}^{\ell m}$  - коэффициенты Клебша-Гордана группы  $SU(2)$ , а индексы  $j_1 m_1, j_2 m_2$  выражаются через квантовые числа  $n_1, n_2, m$  следующим образом:

$$j_1 = j_2 = \frac{n_1 + n_2 + |m|}{2}, \quad m_1 = \frac{|m| + n_1 - n_2}{2}, \quad m_2 = \frac{|m| + n_2 - n_1}{2}. \quad (3.5)$$

Фазовый фактор  $q_\ell$  определяется фазовыми множителями перед волновыми функциями. Поэтому мы его не фиксируем.

Из (3.3)-(3.5) следует, что разложение (2.7) должно иметь вид

$$\Phi_{n_1 n_2 m}(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{t=0}^{n_1+n_2} e^{iq_t} C_{J_1 M_1; J_2 M_2}^{\lambda, M} \psi_{n_2 t M}^c(z, \theta, \varphi), \quad (3.6)$$

где приняты обозначения

$$J_1 = J_2 = \frac{n_1 + n_2 + M}{2}, \quad M_1 = \frac{M + n_1 - n_2}{2}, \quad M_2 = \frac{M + n_2 - n_1}{2}. \quad (3.7)$$

Мы видим, что замеченная выше аналогия предсказывает вид коэффициентов  $W$ . Согласно (3.6) и (3.7), с точностью до фазового множителя,

коэффициенты разложения параболического базиса кольцеобразного потенциала по сферическому базису совпадают с коэффициентами Клебша-Гордана группы  $SU(2)$ , продолженными по своим индексам в область произвольных вещественных чисел.

#### 4. Метод асимптотик

Схема предыдущих рассуждений кажется вполне убедительной. И все же мы сочли разумным дать ей строгое математическое обоснование. Это позволит нам получить формулы (5.1) и (6.2), из которых ясно, каким образом вычислить коэффициенты  $W$  при конкретных значениях входящих в них индексов.

Обратимся к методу асимптотик [8, 12, 13], а именно:

- перейдем к функции (2.2) от параболических координат к сферическим  $\mu = z(1 + \cos\theta)$ ,  $\nu = z(1 - \cos\theta)$ ;
- устремим  $z \rightarrow \infty$  и заменим все вырожденные гипергеометрические полиномы их асимптотиками

$$F(-n; \kappa; x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\kappa)}{\Gamma(n+\kappa)} x^n;$$

- воспользуемся тем, что функции  $Z_{tM}$  ортогональны, т.е.

$$\int_{-1}^1 Z_{tM}(x) Z_{t'M}(x) dx = \delta_{t,t'}.$$

После этого можно показать, что справедливо интегральное представление

$$W_{n_1 n_2}^{tM} = \frac{(-1)^t}{g_{n_1+n_2+M-1/2}} \frac{\sqrt{n_2! \Gamma(n_2+2t+2M+2)}}{\sqrt{n_1! n_2! \Gamma(n_1+M+1) \Gamma(n_2+M+1)}} P_{n_1 n_2}^{tM}, \quad (4.1)$$

$$P_{n_1 n_2}^{tM} = \int_{-1}^1 (t+x)^{n_1 + \frac{M}{2}} (1-x)^{n_2 + \frac{M}{2}} Z_{tM}(x) dx. \quad (4.2)$$

Отсюда легко вывести формулу (3.6). Воспользуемся для функций Гегенбауэра, входящих в определение функции  $Z_{tM}$ , формулой Родрига (2.6а). Тогда из (4.1) и известной формулы для коэффициентов Клебша-Гордана [14]

$$C_{a, \nu}^{c, \sigma} = \frac{(-1)^{a+\beta-c} \Delta}{2^{a+\beta+c+1}} \int_{-1}^1 (1+x)^{a-x} (1-x)^{\beta-x} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{x^{c-\sigma}} (1-x)^{\beta+c-a} (1+x)^{\sigma+c-\beta} \right\} dx,$$

$$\Delta = \left\{ \frac{(2c+1) \Gamma(c+\sigma+1) \Gamma(a+\beta-c+1) \Gamma(a+\beta+c+2)}{\Gamma(a+\alpha+1) \Gamma(a-\alpha+1) \Gamma(\beta+\rho+1) \Gamma(\beta-\rho+1) \Gamma(\beta+c-a+1) \Gamma(a+c-\beta+1) \Gamma(c-\sigma+1)} \right\}^{1/2}$$

переходим к результату (3.6) с  $Q_t = \mathcal{F}(n_2 - t)$ , т.е. подтверждаем предсказание, сделанное на основе аналогии между кулоновским и кольцеобразным потенциалами. Итак,

$$W_{n_1 n_2}^{tM} = (-1)^{n_2-t} C_{J_1 M_1; J_2 M_2}^{\lambda, M} \quad (4.3)$$

где  $J_1 M_1, J_2 M_2$  даются выражениями (3.7).

### 5. ЯВНЫЙ ВИД КОЭФФИЦИЕНТОВ

Формула (4.3) указывает на связь проблемы межбазисного разложения в кольцеобразном потенциале с проблемой сложения моментов. Однако для вычисления значений коэффициентов  $W$  при конкретных значениях индексов эта формула не приспособлена. В этом смысле она несет на себе скорее символическую, чем вычислительную нагрузку.

Подставим в формулу (4.1) вместо функции  $Z^{tM}$ , а точнее вместо входящего в нее полинома Гегенбауэра выражение (2.6б), разложим гипергеометрическую функцию в ряд и проведем интегрирование. Результат таков

$$W_{n_1 n_2}^{tM} = (-1)^t \frac{n_2! \Gamma(n_2 + 2M + 2) (2t + 2M + 1)}{\sqrt{n_1! n_2! \Gamma(n_1 + M + 1) \Gamma(n_2 + M + 1)}} \quad (5.1)$$

$$\sum_{s=0}^t \frac{\Gamma(-t+s) \Gamma(t+2M+s) \Gamma(n_1+M+1) \Gamma(n_2+M+1)}{\Gamma(-t) \Gamma(M+s+1) \Gamma(n_1+n_2+2M+s+1) s!}.$$

Эта формула позволяет составить таблицы коэффициентов  $W$  (см. таблицы 1, 2, 3). В каждой из таблиц сумма  $n_1 + n_2 = n_2 + t$  фиксиро-

Таблица 1  $n_1 + n_2 = 1$

$n_1 \backslash t$	0	1
0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
1	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$

Таблица 2  $n_1 + n_2 = 2$

$n_1 \backslash t$	0	1	2
0	$\sqrt{\frac{M+2}{2(2M+3)}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{M+1}{2(2M+3)}}$
1	$\sqrt{\frac{M+1}{2M+3}}$	0	$\sqrt{\frac{M+2}{2M+3}}$
2	$\sqrt{\frac{M+2}{2(2M+3)}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{M+1}{2(2M+3)}}$

Таблица 3  $n_1 + n_2 = 3$

$n_1 \backslash t$	0	1	2	3
0	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+1}{2M+1}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+9}{2M+5}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+3}{2M+3}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+3}{2M+3}}$
1	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+3}{2M+3}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+1}{2M+5}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+3}{2M+3}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+9}{2M+5}}$
2	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+3}{2M+3}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+1}{2M+5}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+3}{2M+3}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+9}{2M+5}}$
3	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+1}{2M+5}}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+9}{2M+5}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3M+3}{2M+3}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M+3}{2M+3}}$

вана. Магнитное число  $m$ , а вместе с ним параметр  $M$  произвольны. Пользуясь табличными данными, можно получить следующие конкретные разложения для  $n_1 + n_2 = 0, 1, 2$  и произвольным  $m$ :

$$P_{00m} = \psi_{00m}, \quad n_1 + n_2 = 0,$$

$$P_{10m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{10m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{01m}, \quad n_1 + n_2 = 1,$$

$$P_{01m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{10m} - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{01m}.$$

$$P_{11m} = \sqrt{\frac{M+1}{2M+3}} \psi_{20m} - \sqrt{\frac{M+2}{2M+3}} \psi_{02m}, \quad n_1 + n_2 = 2,$$

$$P_{20m} = \sqrt{\frac{M+2}{2(2M+3)}} \psi_{20m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{11m} + \sqrt{\frac{M+2}{2M+3}} \psi_{02m},$$

$$P_{02m} = \sqrt{\frac{M+2}{2(2M+3)}} \psi_{20m} - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{11m} + \sqrt{\frac{M+2}{2M+3}} \psi_{02m}.$$

Каждое из этих разложений справедливо для серии с бесконечным числом уровней, т.к. при фиксированной сумме  $n_1 + n_2$  магнитное число  $m$  произвольно.

Из формулы (4.3) и (5.1) видно, что коэффициенты  $W$  не зависят от параметра  $\alpha$  в потенциале (I.I). Это связано с тем, что согласно (4.1)  $W$  выражается через угловую функцию  $Z^{tM}$ , зависящую только от параметра  $\beta$ .

## 6. Связь $W$ с функцией ${}_3F_2$

Выражение (5.1) может быть свернуто в обобщенную гипергеометрическую функцию  ${}_3F_2$ . По определению,

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ \kappa, e \end{matrix} \middle| x \right\} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)\Gamma(\kappa)\Gamma(e)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(\kappa+s)\Gamma(e+s)} \frac{x^s}{s!}. \quad (6.1)$$

Сравнение формул (5.1) и (6.1) убеждает, что коэффициенты можно записать в виде

$$W_{n_1 n_2}^{tM} = A_{n_1 n_2}^{tM} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -t, t+2M+1, n_2+M+1 \\ n_1+n_2+2M+2, M+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}, \quad (6.2)$$

где константа  $A$  определяется следующим выражением

$$A_{n_1 n_2}^{tM} = (-1)^t \frac{\sqrt{\Gamma(n_1+n_2-t-M-1)\Gamma(n_1+n_2+2M+t)}}{\Gamma(M+1)\Gamma(n_1+n_2+2M+2)}.$$

$$\sqrt{\frac{(2t+2M+1)\Gamma(t+2M+1)\Gamma(n_1+M+1)\Gamma(n_2+M+1)}{t! n_1! n_2!}}$$

Формула (6.2) обобщает аналогичный результат в теории атома водорода и переходит в него в пределе  $\beta \rightarrow 0$ , если заведомо согласованы фазовые множители в базисах.

## 7. Симметрия и правило отбора

Справедливо свойство симметрии

$$W_{n_1 n_2}^{tM} = (-1)^t W_{n_2 n_1}^{tM}, \quad (7.1)$$

из которого, в частности, следует, что  $W=0$ , если  $n_1 = n_2$  и  $t$  нечетно. Это правило отбора, как и само свойство симметрии (7.1), доказывается следующим образом. Базис (2.2) не меняется, если наряду с заменой  $\mu \leftrightarrow \nu$  поменять индекс  $n_1 \leftrightarrow n_2$ . Замена  $\mu \leftrightarrow \nu$  эквивалентна замене  $\cos \theta \leftrightarrow -\cos \theta$ , при которой  $Z^{t\mu} \leftrightarrow (-1)^t Z^{t\mu}$ . Таким образом, чтобы базис  $\Phi_{n_1 n_2 m}$  не менялся, должно соблюдаться условие (7.1).

Формулы (4.3), (5.1) и (6.2) не содержат в себе симметрии (7.1) явным образом. Ее можно получить из (6.2), если учесть тождество [15]

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, s', -N \\ a', a+s \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a+s+N)}{\Gamma(a+s)\Gamma(a+N)} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, a'-s', -N \\ a', a+s \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (7.2)$$

Литература

В самом деле, приняв  $S = t + 2M + 1$ ,  $S' = n_2 + M + 1$ ,  $d' = n_1 + n_2 + 2M + 1$ ,  $N = t$ , находим из условия  $M + 1 = 1 - t - a$  параметр  $a$ .

Затем, конкретизируя по этим данным функцию  ${}_3F_2$  в правой части (7.2), легко убедиться, что она совпадает с гипергеометрической функцией в (6.2), но с заменой  $n_1 \leftrightarrow n_2$ . Что касается фактора, составленного из гамма-функций в правой части (7.2), то он после учета тождества  $\Gamma(-n+2)/\Gamma(2) = (-1)^n \Gamma(1-2)/\Gamma(1+2+n)$  легко преобразуются к виду  $(-1)^t$ .

8. Заключение

Итак, мы выяснили, что кольцеобразный потенциал аналогичен атому водорода и что эта аналогия конкретизируется правилом соответствия (3.3). Отсюда нами было предсказано, а затем и строго обосновано методом асимптотик важное следствие: переход от параболического базиса кольцеобразного потенциала к его сферическому базису получается аналитическим продолжением коэффициентов Клебша-Гордана группы  $SU(2)$  в область произвольных вещественных индексов.

В теории скрытой симметрии атома водорода первостепенное значение имеют операторы орбитального момента  $L$  и вектор Рунге-Ленца  $A$ . Последний играет роль добавочного интеграла движения кулоновом поле<sup>/9/</sup>. Именно эти операторы реализуют генераторы группы скрытой симметрии  $O(4)$  атома водорода в дискретном спектре.

Как можно использовать эту информацию? Нужно выяснить вид операторов, заменяющих оператор орбитального момента и оператор Рунге-Ленца. После этого можно было бы воспользоваться методом Паули<sup>/16/</sup> и вывести генераторы группы скрытой симметрии кольцеобразного потенциала. Аналог оператора Рунге-Ленца можно, видимо, построить из повышающих и понижающих операторов, введенных в работе<sup>/1/</sup>. Как получить аналог оператора момента, мы не знаем.

Мы уже говорили, что правило соответствия (3.3) не применимо к собственным функциям  $X$  - проекции орбитального момента. Это обстоятельство отражается и на числе координатных систем, в которых переменные разделяются. В атоме водорода, как известно<sup>/17/</sup>, их четыре - сферические, параболические, сфероидальные и сфероконические, а в кольцеобразном потенциале, как легко убедиться, три - сферические, параболические и сфероидальные. Отсутствие сфероконических координат в списке координат, разделяющих переменные в уравнении Шредингера, - это плата за нарушение центральной симметрии при переходе от кулонова потенциала к кольцеобразному.

Как видно из сказанного, кольцеобразный потенциал разумно именовать аксиально-симметричным аналогом атома водорода.

1. Kibler M. and Winternitz P., J.Phys. A20, 1987, 4097.
2. Gerry C. Phys. Lett. A118, 1986, 445.
3. Hartmann H. Theor. Chim. Acta, 24, 1972, 201.
4. Hartmann H., Schuck R., Radtke J. Theor.Chim.Acta, 42, 1976, 1.
5. Hartmann H., Schuck R. Inter. J.Quantum Chem. XVIII, 1980, 125.
6. Park D. Zs. of Phys., 159, 1960, 155.
7. Tarter C.V. J.Math.Phys., 11, 1970, 3192.
8. Арутюнян А.Г., Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. Изв. АН Арм. ССР, Физика, 13, 1978, 152.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, "Наука", Москва, 1974.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том I, II, "Наука", Москва 1966.
11. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. "Физматгиз", Москва 1960.
12. Mardoyan L.G., Pogoyan G.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M., J.Phys. A16, 1982, 711.
13. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ТМФ, 40, 1979, 140.
14. Варшалович Д.А., Москалев А.Н. Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Ленинград, 1975.
15. Bailey W.M. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge Tracts. N 32, Cambridge, 1935.
16. Pauli W. Z.Phys. 36, 1926, 336.
17. Kalnina E.G., Miller W.Jr., Winternitz P. SIAM J. Appl. Math., 1976, 30, 630.

Рукопись поступила в издательский отдел  
I сентября 1989 года.