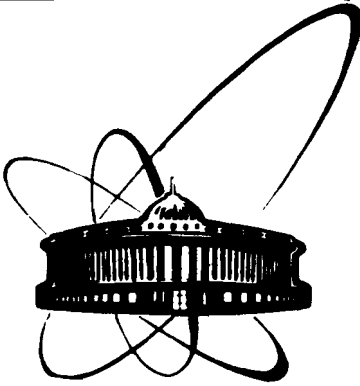


89-566



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

Ш 145

P2-89-566

Н. С. Шавохина

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФЕДОРОВА  
В ТЕОРИИ СТРУН И МЕМБРАН

Направлено в "International Journal  
of Modern Physics"

1989

Теория струн и мембран возникла из теории минимальных поверхностей в евклидовых пространствах. В результате умножения некоторых из декартовых координат евклидова пространства на мнимую единицу  $i$  получается переход к псевдоевклидовым пространствам. К числу последних относится пространство Минковского. Минимальные поверхности в пространстве Минковского особенно интересны. Времениподобные минимальные поверхности описывают свободное движение релятивистских струн и мембран. Пространственно-подобные минимальные поверхности описывают электрический потенциал в нелинейной электростатике Борна. Все такие поверхности являются мнимыми образами действительных минимальных поверхностей в евклидовых пространствах.

Большую пользу в теории минимальных поверхностей дает запись нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными в матричной форме Федорова. В 1968 году В.И. Федоров <sup>/1,2/</sup> установил замечательный факт: уравнения Эйнштейна  $R_{\alpha\beta} = 0$  для гравитационного поля можно привести к системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\sum_{\alpha=1}^4 B^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi = M \Psi + \frac{1}{2} \Psi \Lambda \Psi. \quad (1)$$

Здесь  $B^{\alpha}$  и  $M$  - постоянные квадратные матрицы порядка  $N \times N$ ,  $\Lambda$  - постоянная кубическая матрица порядка  $N \times N \times N$ ,  $\Psi$  -  $N$ -компонентный столбец искомых функций от координат  $x^{\alpha}$ ,  $\partial_{\alpha}$  - частная производная по  $x^{\alpha}$ . В случае гравитации  $N = 50$ . Столбцы  $B^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi$ ,  $M \Psi$  и  $\Psi \Lambda \Psi$  состоят из компонент

$$(B^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi)_k = B_{km}^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi_m, \quad (2)$$

$$(M \Psi)_k = M_{km} \Psi_m, \quad (\Psi \Lambda \Psi)_k = \Lambda_{kmn} \Psi_m \Psi_n,$$

где по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до  $N$ .

В работе <sup>/3/</sup> показано, что "эти уравнения замечательны своей универсальностью. Действительно, в такой форме могут быть представлены уравнения квантовой электродинамики, уравнения нелинейного поля Гейзенберга и множество других (см. <sup>/1,2/</sup>)". В работах <sup>/4,5/к</sup> виду (1) приведены нелинейные уравнения теории объединенного поля в скалярной электродинамике. В работе <sup>/6/</sup> этот подход был распространен на общие  $SU(n)$ -инвариантные уравнения для неабелевых калибровочных векторных полей и скалярных полей Хиггса, в работах <sup>/7,8/</sup> -

на уравнения в теории суперсимметрии Весса - Зумино и калибровочной суперсимметрии. Общий обзор универсальных нелинейных уравнений Федорова дан в книге /9/. В работе /10/ развит способ решения уравнений (I) в случае, когда одна из матриц  $B^\alpha$  единичная.

Покажем, что и уравнения минимальных гиперповерхностей в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах приводятся к виду (I).

Начнем с уравнения

$$(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy} = 0 \quad (3)$$

минимальных поверхностей в трехмерном пространстве Евклида. Эта задача представляется тем более привлекательной, что уравнения Эйнштейна в известной мере аналогичны этому уравнению /11/.

Как известно /12/, уравнение (3) является условием экстремума интеграла

$$S = \iint \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \quad (4)$$

площади поверхности  $Z = Z(x, y)$ . Приравнявая нулю функциональную производную  $\delta S$  по  $\delta Z(x, y)$ , получаем уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = 0, \quad (5)$$

эквивалентное уравнению (3).

Уравнение (5) можно записать в виде системы шести уравнений

$$\begin{aligned} \partial_1 z &= p_1, & \partial_2 z &= p_2, \\ \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 &= 0, \\ p_1 &= (1+L)q_1, & p_2 &= (1+L)q_2, \\ 1+L &= \sqrt{1+p_1^2+p_2^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

последнее из которых при  $L > 0$  эквивалентно уравнению

$$2L = p_1^2 + p_2^2 - L^2. \quad (7)$$

Из шести компонент

$$\begin{aligned} \psi_1 &= q_1, & \psi_2 &= q_2, & \psi_3 &= z, \\ \psi_4 &= p_1, & \psi_5 &= p_2, & \psi_6 &= L \end{aligned} \quad (8)$$

составим столбец  $\Psi$  и введем квадратные матрицы порядка  $3 \times 3$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \beta^4 = \omega,$$

с помощью которых составим квадратные матрицы порядка  $6 \times 6$  в виде следующих блоков:

$$B^\alpha = \begin{pmatrix} \beta^\alpha & \omega \\ \omega & \omega \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \omega & \mu \\ \mu & -\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Нетрудно подсчитать, что столбец

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^4 B^\alpha \partial_\alpha \Psi - M \Psi \quad (11)$$

состоит из компонент

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \partial_1 z - p_1, & \Phi_2 &= \partial_2 z - p_2, \\ \Phi_3 &= \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2, \\ \Phi_4 &= p_1 - q_1, & \Phi_5 &= p_2 - q_2, & \Phi_6 &= L. \end{aligned} \quad (12)$$

Следовательно, при условии  $L > 0$  систему уравнений (6) можно записать в виде (I), полагая, что компоненты  $(\Psi \Lambda \Psi)_\kappa$  столбца  $\Psi \Lambda \Psi$  равны следующим квадратичным формам:

$$(\Psi \Lambda \Psi)_1 = 0, \quad (\Psi \Lambda \Psi)_2 = 0, \quad (\Psi \Lambda \Psi)_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (\Psi \Lambda \Psi)_4 &= 2Lq_1 = \psi_1 \psi_6 + \psi_6 \psi_1, \\
 (\Psi \Lambda \Psi)_5 &= 2Lq_2 = \psi_2 \psi_6 + \psi_6 \psi_2, \\
 (\Psi \Lambda \Psi)_6 &= 2L = \psi_4^2 + \psi_5^2 - \psi_6^2.
 \end{aligned}
 \tag{I3}$$

При условии

$$\Lambda_{kmn} = \Lambda_{knt} \tag{I4}$$

коэффициенты этих форм - они же элементы кубической матрицы  $\Lambda$  - определяются однозначно. Отличны от нуля только следующие элементы этой матрицы:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{416} = \Lambda_{461} = 1, \quad \Lambda_{526} = \Lambda_{562} = 1, \\
 \Lambda_{644} = \Lambda_{655} = 1, \quad \Lambda_{666} = -1.
 \end{aligned}
 \tag{I5}$$

Отметим, что как матрицы  $\beta$ , так и матрицы  $B$  удовлетворяют перестановочным соотношениям Деффина - Кеммера /I3/:

$$B^\alpha B^\lambda B^\nu + B^\nu B^\lambda B^\alpha = \delta^{\lambda\nu} B^\alpha + \delta^{\lambda\alpha} B^\nu. \tag{I6}$$

Аналогично приводится к виду (I) уравнение минимальных гиперповерхностей в  $K$ -мерном евклидовом пространстве. Наряду с рассмотренным случаем  $K = 3$  для физики большое значение имеют случаи  $K = 4$  и  $K = 5$ .

В случае  $K = 4$  вместо (5) выступает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_x}{1+L} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{u_y}{1+L} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{u_z}{1+L} = 0, \tag{I7}$$

где

$$1+L = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \tag{I8}$$

При условии  $L > 0$  оно эквивалентно системе восьми уравнений

$$\begin{aligned}
 \partial_1 u = p_1, \quad \partial_2 u = p_2, \quad \partial_3 u = p_3, \\
 \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3 = 0, \\
 p_1 = (1+L)q_1, \quad p_2 = (1+L)q_2, \quad p_3 = (1+L)q_3, \\
 L = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - L^2).
 \end{aligned}
 \tag{I9}$$

Из восьми компонент

$$\begin{aligned}
 \psi_1 = q_1, \quad \psi_2 = q_2, \quad \psi_3 = q_3, \quad \psi_4 = u, \\
 \psi_5 = p_1, \quad \psi_6 = p_2, \quad \psi_7 = p_3, \quad \psi_8 = L
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

составим столбец  $\Psi$  и введем квадратные матрицы порядка  $4 \times 4$ :

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^4 = \omega,$$

с помощью которых составим квадратные матрицы порядка  $8 \times 8$  в виде блоков (I0). Нетрудно подсчитать, что в данном случае столбец (II) состоит из компонент

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 = \partial_1 u - p_1, \quad \Phi_2 = \partial_2 u - p_2, \quad \Phi_3 = \partial_3 u - p_3, \\
 \Phi_4 = \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3, \\
 \Phi_5 = p_1 - q_1, \quad \Phi_6 = p_2 - q_2, \quad \Phi_7 = p_3 - q_3, \quad \Phi_8 = L.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Следовательно, уравнения (19) можно записать в матричном виде (I), полагая

$$(\Psi \Lambda \Psi)_\kappa = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, 4,$$

$$\begin{aligned} (\Psi \Lambda \Psi)_5 &= 2L q_1 = \psi_1 \psi_8 + \psi_8 \psi_1, \\ (\Psi \Lambda \Psi)_6 &= 2L q_2 = \psi_2 \psi_8 + \psi_8 \psi_2, \\ (\Psi \Lambda \Psi)_7 &= 2L q_3 = \psi_5 \psi_8 + \psi_8 \psi_3, \\ (\Psi \Lambda \Psi)_8 &= 2L = \psi_5^2 + \psi_6^2 + \psi_7^2 - \psi_8^2. \end{aligned} \quad (23)$$

При условии (14) отличны от нуля только следующие элементы матрицы  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{518} = \Lambda_{881} = 1, \quad \Lambda_{628} = \Lambda_{882} = 1, \quad \Lambda_{738} = \Lambda_{883} = 1, \\ \Lambda_{855} = \Lambda_{866} = \Lambda_{877} = 1, \quad \Lambda_{888} = -1. \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что и в случае  $K=4$  как матрицы  $\beta$ , так и матрицы  $B$  удовлетворяют перестановочным соотношениям (16).

В случае  $K=5$  вместо (5) выступает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{v_x}{1+L} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v_y}{1+L} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{v_z}{1+L} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{v_u}{1+L} = 0, \quad (25)$$

где

$$1+L = \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + v_u^2}. \quad (26)$$

При условии  $L > 0$  оно эквивалентно системе десяти уравнений

$$\partial_1 v = p_1, \quad \partial_2 v = p_2, \quad \partial_3 v = p_3, \quad \partial_4 v = p_4,$$

$$\partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3 + \partial_4 q_4 = 0,$$

(27)

$$p_1 = (1+L) q_1, \quad p_2 = (1+L) q_2, \quad p_3 = (1+L) q_3, \quad p_4 = (1+L) q_4,$$

$$L = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - L^2).$$

Из десяти компонент

$$\psi_1 = q_1, \quad \psi_2 = q_2, \quad \psi_3 = q_3, \quad \psi_4 = q_4, \quad \psi_5 = v, \quad (28)$$

$$\psi_6 = p_1, \quad \psi_7 = p_2, \quad \psi_8 = p_3, \quad \psi_9 = p_4, \quad \psi_{10} = L$$

составим столбец  $\Psi$  и введем квадратные матрицы порядка  $5 \times 5$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью этих матриц составим матрицы порядка  $10 \times 10$  в виде блоков ( $10$ ). В данном случае столбец (II) состоит из компонент

$$\Phi_1 = \partial_1 v - p_1, \quad \Phi_2 = \partial_2 v - p_2, \quad \Phi_3 = \partial_3 v - p_3, \quad \Phi_4 = \partial_4 v - p_4,$$

$$\Phi_5 = \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3 + \partial_4 q_4, \quad (30)$$

$$\Phi_6 = p_1 - q_1, \quad \Phi_7 = p_2 - q_2, \quad \Phi_8 = p_3 - q_3, \quad \Phi_9 = p_4 - q_4, \quad \Phi_{10} = L.$$

Следовательно, уравнения (25) можно записать в матричном виде (I), полагая

$$(\Psi \Lambda \Psi)_\kappa = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_6 = 2L q_1 = \psi_1 \psi_{10} + \psi_{10} \psi_1,$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_7 = 2L q_2 = \psi_2 \psi_{10} + \psi_{10} \psi_2, \quad (31)$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_8 = 2L q_3 = \psi_3 \psi_{10} + \psi_{10} \psi_3,$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_9 = 2L q_4 = \psi_4 \psi_{10} + \psi_{10} \psi_4,$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_{10} = 2L = \psi_6^2 + \psi_7^2 + \psi_8^2 + \psi_9^2 - \psi_{10}^2.$$

При условии (I4) отличны от нуля только следующие элементы матрицы  $\Lambda$ :

$$\Lambda_{61a} = \Lambda_{6a1} = 1, \quad \Lambda_{72a} = \Lambda_{7a2} = 1,$$

$$\Lambda_{83a} = \Lambda_{8a3} = 1, \quad \Lambda_{94a} = \Lambda_{9a4} = 1, \quad (32)$$

$$\Lambda_{a66} = \Lambda_{a77} = \Lambda_{a88} = \Lambda_{a99} = 1, \quad \Lambda_{aaa} = -1,$$

где  $a = 10$ . В данном случае мы располагаем полным набором пяти-рядных матриц Дарфина - Кемера.

Теперь нетрудно видеть, как в матричном виде (I) записывается уравнение минимальных гиперповерхностей в евклидовом пространстве

любой размерности. Переход к псевдоевклидовым пространствам получается в результате умножения некоторых из координат на мнимую единицу  $i$ . Особенно интересен случай пространства Минковского - как четырехмерного, так и трехмерного.

В четырехмерном пространстве Минковского гиперповерхность

$$t = t(x, y, z) \quad (33)$$

пространственно-подобна, если

$$c^2 (t_x^2 + t_y^2 + t_z^2) < 1, \quad (34)$$

и времениподобна, если

$$c^2 (t_x^2 + t_y^2 + t_z^2) > 1. \quad (35)$$

Времениподобная гиперповерхность описывает движение релятивистской мембраны. Пространственно-подобная гиперповерхность служит или может служить образом "настоящего".

В трехмерном пространстве Минковского поверхность

$$t = t(x, y) \quad (36)$$

пространственно-подобна, если

$$c^2 (t_x^2 + t_y^2) < 1, \quad (37)$$

и времениподобна, если

$$c^2 (t_x^2 + t_y^2) > 1. \quad (38)$$

Времениподобная поверхность описывает движение релятивистской струны. Пространственно-подобная поверхность может служить образом "двумерного настоящего". Во всех этих формулах  $c$  - скорость света.

В случае (36, 38) минимальная поверхность удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{t_x}{1+L} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{t_y}{1+L} = 0, \quad (39)$$

где

$$1 + L = i \sqrt{c^2(t_x^2 + t_y^2) - 1}, \quad (40)$$

а значит,

$$-2L = L^2 + c^2(t_x^2 + t_y^2). \quad (41)$$

Составим столбец  $\Psi$ , полагая

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{t_x}{1+L}, & \Psi_2 &= \frac{t_y}{1+L}, & \Psi_3 &= t, \\ \Psi_4 &= t_x, & \Psi_5 &= t_y, & \Psi_6 &= L, \end{aligned} \quad (42)$$

и введем матрицы (9) и (10). Столбец (II) состоит из компонент

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \partial_1 \Psi_3 - \Psi_4, & \Phi_2 &= \partial_2 \Psi_3 - \Psi_5, \\ \Phi_3 &= \partial_1 \Psi_1 + \partial_2 \Psi_2, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\Phi_4 = \Psi_4 - \Psi_1, \quad \Phi_5 = \Psi_5 - \Psi_2, \quad \Phi_6 = \Psi_6.$$

Из формул (39), (41) и (42) получаем

$$\begin{aligned} (\Psi \Lambda \Psi)_\kappa &= 0, & \kappa &= 1, 2, 3, \\ (\Psi \Lambda \Psi)_4 &= \Psi_1 \Psi_6 + \Psi_6 \Psi_1, \\ (\Psi \Lambda \Psi)_5 &= \Psi_2 \Psi_6 + \Psi_6 \Psi_2, \\ (\Psi \Lambda \Psi)_6 &= -c^2 \Psi_4^2 - c^2 \Psi_5^2 - \Psi_6^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Поэтому отличаются от нуля только следующие элементы матрицы  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{416} = \Lambda_{461} &= 1, & \Lambda_{526} = \Lambda_{562} &= 1, \\ \Lambda_{644} = \Lambda_{655} &= -c^2, & \Lambda_{666} &= -1. \end{aligned} \quad (45)$$

Если функция (36) зависит только от расстояния

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (46)$$

то

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -i \frac{x}{\rho} F, & \Psi_4 &= \frac{x}{\rho} t', \\ \Psi_2 &= -i \frac{y}{\rho} F, & \Psi_5 &= \frac{y}{\rho} t', \\ \Psi_3 &= t, & \Psi_6 &= -1 + i \sqrt{c^2 t'^2 - 1}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$F = \frac{t'}{\sqrt{c^2 t'^2 - 1}}. \quad (48)$$

Из уравнения (39) получаем

$$F + F' \rho = 0, \quad (49)$$

а значит,

$$F = \frac{A}{c \rho}, \quad (50)$$

где  $A = \text{const}$ . Из (48) и (50) следует, что

$$c t' = \frac{A}{\sqrt{A^2 - \rho^2}}, \quad (51)$$

а значит,

$$\rho = A \sin \frac{c(t-t_0)}{A}. \quad (52)$$

Впервые такое движение релятивистской струны - однако иным способом - рассмотрено в работе /14/.

В случае (33,35) минимальная гиперповерхность удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{t_x}{1+L} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{t_y}{1+L} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{t_z}{1+L} = 0, \quad (53)$$

где

$$1+L = i \sqrt{c^2(t_x^2 + t_y^2 + t_z^2) - 1}, \quad (54)$$

а значит,

$$-2L = L^2 + c^2(t_x^2 + t_y^2 + t_z^2). \quad (55)$$

Составим столбец  $\Psi$ , полагая

$$\Psi_1 = \frac{t_x}{1+L}, \quad \Psi_2 = \frac{t_y}{1+L}, \quad \Psi_3 = \frac{t_z}{1+L}, \quad \Psi_4 = t, \quad (56)$$

$$\Psi_5 = t_x, \quad \Psi_6 = t_y, \quad \Psi_7 = t_z, \quad \Psi_8 = L,$$

и с помощью матриц (2I) составим блочные матрицы (IO). В данном случае столбец (II) состоит из компонент

$$\Phi_1 = \partial_1 \Psi_4 - \Psi_5, \quad \Phi_2 = \partial_2 \Psi_4 - \Psi_6, \quad \Phi_3 = \partial_3 \Psi_4 - \Psi_7, \\ \Phi_4 = \partial_1 \Psi_1 + \partial_2 \Psi_2 + \partial_3 \Psi_3, \quad (57)$$

$$\Phi_5 = \Psi_5 - \Psi_1, \quad \Phi_6 = \Psi_6 - \Psi_2, \quad \Phi_7 = \Psi_7 - \Psi_3, \quad \Phi_8 = \Psi_8.$$

Из формул (53), (55) и (56) получаем

$$(\Psi \Lambda \Psi)_\kappa = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, 4,$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_5 = \Psi_1 \Psi_8 + \Psi_8 \Psi_1, \quad (58)$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_6 = \Psi_2 \Psi_8 + \Psi_8 \Psi_2,$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_7 = \Psi_3 \Psi_8 + \Psi_8 \Psi_3,$$

$$(\Psi \Lambda \Psi)_8 = -c^2 \Psi_5^2 - c^2 \Psi_6^2 - c^2 \Psi_7^2 - \Psi_8^2.$$

Поэтому отличаются от нуля только следующие элементы матрицы  $\Lambda$ :

$$\Lambda_{518} = \Lambda_{581} = 1, \quad \Lambda_{628} = \Lambda_{682} = 1, \quad \Lambda_{738} = \Lambda_{783} = 1,$$

$$\Lambda_{855} = \Lambda_{866} = \Lambda_{877} = -c^2, \quad \Lambda_{888} = -1. \quad (59)$$

Если функция (33) зависит только от расстояния

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (60)$$

то

$$\Psi_1 = -i \frac{x}{r} F, \quad \Psi_5 = \frac{x}{r} t', \\ \Psi_2 = -i \frac{y}{r} F, \quad \Psi_6 = \frac{y}{r} t', \\ \Psi_3 = -i \frac{z}{r} F, \quad \Psi_7 = \frac{z}{r} t', \\ \Psi_4 = t, \quad \Psi_8 = -1 + i \sqrt{c^2 t'^2 - 1}, \quad (61)$$

где  $F$  обозначает выражение (50). Из уравнения (53) получаем

$$2F + rF' = 0, \quad (62)$$

а значит,

$$F = \frac{B}{c r^2}, \quad (63)$$

где  $B = const$ . Из (48) и (63) следует, что

$$c t' = \frac{B}{\sqrt{B^2 - r^4}}. \quad (64)$$

С помощью лемнискатной функции (/15/, с.375)

$$x = \sin \text{lemn} \varphi, \quad (65)$$

определяемой интегралом



$$\varphi = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}, \quad (66)$$

находим

$$r = \sqrt{B} \sin \ell m n \frac{c(t-t_0)}{\sqrt{B}}. \quad (67)$$

В рассмотренных случаях кольцевидная струна и сферическая мембрана пульсируют.

В случае (33,34) минимальная гиперповерхность удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{t_x}{1-L} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{t_y}{1-L} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{t_z}{1-L} = 0, \quad (68)$$

где

$$1-L = \sqrt{1-c^2(t_x^2+t_y^2+t_z^2)}, \quad (69)$$

а значит,

$$2L = L^2 + c^2(t_x^2+t_y^2+t_z^2). \quad (70)$$

Составим столбец  $\Psi$ , полагая

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{t_x}{1-L}, & \Psi_2 &= \frac{t_y}{1-L}, & \Psi_3 &= \frac{t_z}{1-L}, & \Psi_4 &= t, \\ \Psi_5 &= t_x, & \Psi_6 &= t_y, & \Psi_7 &= t_z, & \Psi_8 &= L. \end{aligned} \quad (71)$$

Рассматривая столбец (II) с компонентами (57), из формул (68), (70) и (71) находим, что в данном случае матрица  $\Lambda$  противоположна матрице (59).

Как было замечено в работе /16/, в данном случае функция (33) может быть следующим образом связана с потенциалом  $\varphi$  нелинейной электростатики Борна /17,18/:

$$t = t_0 + \frac{\alpha}{c} \varphi(x, y, z), \quad (72)$$

где  $\alpha$  - константа нелинейности,  $t_0$  - константа, отмечающая положение источника на оси времени.

Если потенциал  $\varphi$  зависит только от расстояния (60), то компоненты (71) равны

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{\alpha}{c} \frac{x}{r} F, & \Psi_5 &= \frac{\alpha}{c} \frac{x}{r} \varphi', \\ \Psi_2 &= \frac{\alpha}{c} \frac{y}{r} F, & \Psi_6 &= \frac{\alpha}{c} \frac{y}{r} \varphi', \\ \Psi_3 &= \frac{\alpha}{c} \frac{z}{r} F, & \Psi_7 &= \frac{\alpha}{c} \frac{z}{r} \varphi', \\ \Psi_4 &= t_0 + \frac{\alpha}{c} \varphi, & \Psi_8 &= 1 - \sqrt{1-\alpha^2 \varphi'^2}, \end{aligned} \quad (73)$$

где

$$F = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\alpha^2 \varphi'^2}}. \quad (74)$$

Из уравнения (68) получаем, что функция  $F$  подчиняется уравнению (62). Следовательно, она равна

$$F = -\frac{e}{r^2}, \quad (75)$$

где константа  $e$  согласно Борну равняется заряду электрона. Из (74) и (75) следует, что

$$\varphi' = -e/\sqrt{r_0^4+r^4}, \quad (76)$$

где  $r_0 = \sqrt{\alpha e}$ . Значит, с точностью до константы интегрирования потенциал  $\varphi$  равен

$$\varphi = \frac{e}{r_0} \int_{r/r_0}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{1+s^4}}, \quad (77)$$

константу же можно отнести к входящей в (72) константе  $t_0$ . Потенциал (77) впервые был получен Борном /17/. Заменяя  $s$  на  $1/s$ , получаем

$$\varphi = \frac{e}{r_0} \int_0^{r_0/r} \frac{ds}{\sqrt{1+s^4}}. \quad (78)$$

Отсюда нетрудно видеть, что при больших  $r$  борновский потенциал становится кулоновским.

Таким образом, одним из решений уравнения Федорова (I) является восьмикомпонентный столбец (73). В этом столбце собрана следующая

информация об электроде Борна: компонента  $\psi_1$  представляет электростатический потенциал, компонента  $\psi_2$  - функцию Лагранжа электрического поля, компоненты  $\psi_3, \psi_4, \psi_5$  представляют электрическую индукцию, а компоненты  $\psi_6, \psi_7, \psi_8$  - электрическую напряженность [19].

В случае (36,37) минимальная поверхность удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{t_x}{1-L} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{t_y}{1-L} = 0, \quad (79)$$

где

$$1-L = \sqrt{1 - c^2(t_x^2 + t_y^2)}, \quad (80)$$

а значит,

$$2L = L^2 + c^2(t_x^2 + t_y^2). \quad (81)$$

Составим столбец  $\psi$ , полагая

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{t_x}{1-L}, & \psi_2 &= \frac{t_y}{1-L}, & \psi_3 &= t, \\ \psi_4 &= t_x, & \psi_5 &= t_y, & \psi_6 &= L. \end{aligned} \quad (82)$$

Рассматривая столбец (II) с компонентами (43), из формул (79), (81) и (82) находим, что в данном случае матрица  $\Lambda$  противоположна матрице (45).

В данном случае аналогично (72) полагаем

$$t = t_0 + \frac{a}{c} \varphi(x, y), \quad (83)$$

где  $\varphi$  - потенциал в двумерной электродинамике Борна. Если  $\varphi$  зависит только от расстояния (46), то компоненты (82) равны

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{a}{c} \frac{x}{\rho} F, & \psi_4 &= \frac{a}{c} \frac{x}{\rho} \varphi', \\ \psi_2 &= \frac{a}{c} \frac{y}{\rho} F, & \psi_5 &= \frac{a}{c} \frac{y}{\rho} \varphi', \\ \psi_3 &= t_0 + \frac{a}{c} \varphi, & \psi_6 &= 1 - \sqrt{1 - a^2 \varphi'^2}, \end{aligned} \quad (84)$$

где функция  $F$  равна (74). Из уравнения (79) получаем, что она должна удовлетворять уравнению (49). Следовательно, в данном случае она равна

$$F = -\frac{\varepsilon}{\rho}, \quad (85)$$

где  $\varepsilon$  - константа. Она имеет смысл линейной плотности "затравочного" заряда, сконцентрированного на оси  $z$ . Из (74) и (85) следует, что

$$\varphi' = -\varepsilon / \sqrt{\rho_0^2 + \rho^2}, \quad (86)$$

где  $\rho_0 = a\varepsilon$ . Отсюда находим

$$\operatorname{sh} \frac{\varphi}{\varepsilon} = -\frac{\rho}{\rho_0}. \quad (87)$$

Такой потенциал при больших  $\rho$  переходит в логарифмический.

Итак, еще одним из решений уравнения Федорова (I) является шестикомпонентный столбец (84). В этом столбце собрана следующая информация о заряженной нити в электродинамике Борна: компонента  $\psi_3$  представляет электростатический потенциал, компонента  $\psi_6$  - функцию Лагранжа электрического поля, компоненты  $\psi_4, \psi_5$  представляют электрическую индукцию, а компоненты  $\psi_1, \psi_2$  - электрическую напряженность.

В заключение заметим, что поверхность (52) и поверхность (83), где  $\varphi$  определяется из (87), являются мнимыми образами катеноида

$$\operatorname{ch} \frac{z-z_0}{M} = \frac{\rho}{M}, \quad (88)$$

где  $M$  - константа. В каноническом виде

$$\frac{|z-z_0|}{M} = \int_1^{\rho/M} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}. \quad (89)$$

Поверхность (67) и поверхность (72), где  $\varphi$  - потенциал Борна (77), являются мнимыми образами минимальной гиперповерхности

$$\frac{|u-u_0|}{N} = \int_1^{\rho/N} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}, \quad (90)$$

где  $N$  - константа, в четырехмерном евклидовом пространстве.

Пользуясь тем, что минимальная поверхность остается минимальной при параллельных переносах и дилатациях, канонический вид (89) (или (90)) можно упростить, полагая константу  $M$  (или  $N$ ) равной единице, а константу  $Z_0$  - нулю. Вообще, гиперкатеноид (то есть минимальная гиперповерхность, симметричная относительно некоторой гиперплоскости  $P$  и любой гиперплоскости, проходящей через некоторую прямую  $L$ , перпендикулярную к  $P$ ) в  $K$ -мерном евклидовом пространстве записывается в следующем каноническом виде:

$$Z = \int_1^R \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^{2(K-2)} - 1}}, \quad (91)$$

где  $Z$  - расстояние от точки, лежащей на гиперкатеноиде, до гиперплоскости  $P$ , а  $R$  - расстояние от той же точки до прямой  $L$ .

Соответственно, потенциал единичного заряда в  $(K-1)$ -мерной электростатике Борна равен

$$\varphi = \int_R^\infty \frac{ds}{\sqrt{1 + s^{2(K-2)}}}. \quad (92)$$

Он изображается в  $K$ -мерном пространстве Минковского гиперповерхностью, пространственно-подобной всюду, кроме одной особой точки.

Другой миним. образ гиперкатеноида (91) - определяемая интегралом

$$ct = \int_0^R \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2(K-2)}}}. \quad (93)$$

мировая гиперповерхность свободно движущейся  $(K-2)$ -мерной сферической мембраны. Эта гиперповерхность времениподобна всюду, кроме узловых точек.

Функция (91) с функцией  $F = F(R)$ , удовлетворяющей уравнению

$$(K-2)F + RF' = 0, \quad (94)$$

связана формулой

$$F = Z' / \sqrt{1 + Z'^2}, \quad (95)$$

а функции (92) и (93) с такой же функцией  $F$  связаны формулами (74) и (48).

#### Литература

1. Федоров Ф.И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля.-ДАН СССР, т. 179, № 4, 1968, с. 802-805.
2. Fedorov F.I. Einstein gravitation equations in matrix form. 9th International Conference on General Relativity and Gravitation. Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups. Vol.3. Jena, 1980, p.549-550.
3. Федоров Ф.И., Кириллов А.А. Уравнения первого порядка для гравитационного поля в вакууме. -Acta Physica Polonica Vol.В7 No 3, 1976, с. 161-167.
4. Федоров Ф.И., Кувшинов В.И. Нелинейные уравнения электродинамики скалярных мезонов.-Изв. АН БССР, серия физ.мат. наук, № 5, 1970, с. 69-75.
5. Кувшинов В.И., Федоров Ф.И. Теория объединенного поля в скалярной электродинамике.-Препринт Ин-та физики АН БССР. Минск, 1974, 32 с.
6. Богущ А.А., Жирков Л.Ф. Калибровочные поля в формализме Даффина - Кеммера.-Изв. АН БССР, серия физ.мат. наук, № 5, 1977, с. 51-60.
7. Бабичев Л.Ф., Кувшинов В.И., Федоров Ф.И. Уравнения первого порядка в теориях калибровочной суперсимметрии.-Изв. АН БССР, серия физ.-мат. наук, № 5, 1979, с. 63-68.
8. Бабичев Л.Ф., Кувшинов В.И., Федоров Ф.И. Универсальные нелинейные уравнения первого порядка в суперсимметричной теории Весса - Зумино.-Изв. АН БССР, серия физ.мат. наук, № 6, 1980, с. 52-60.
9. Богущ А.А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. Минск: Наука и техника, 1981, 392 с.
10. Скоробогатько В.Я. Решение систем дифференциальных уравнений с частными производными матричным методом.-ДАН ССР, № 3, 1988, с. 28-31.
11. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино, Вселенная. М.: ИЛ, 1962, с. 100-102.
12. Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. Минимальные поверхности и задача Плато. М.: Наука, 1987, 312 с.
13. Kemmer N. The particle aspect of meson theory.-Proc. Roy. Soc., 1939, A173, p. 91-116.
14. Барбашов Б.М., Черников Н.А. Классическая динамика релятивистской струны.-Препринт ОИЯИ, P2-7852, Дубна, 1974.
15. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа. Ч.2, М.-Л: Гостехиздат, 1934.

16. Шавохина Н.С. Потенциал электрона в нелинейной электродинамике с точки зрения теории минимальных поверхностей.-Препринт ОИИИ, P2-88-515, Дубна, 1988.
17. Born M. On the quantum theory of the electromagnetic field.- Proc. Roy. Soc., 1934, A144, p. 410-437.
18. Born M., Infeld L. Foundation of the new field theory.- Proc. Roy., 1934, A144, p. 425-451.
19. Тоннела М.А. Основы электромагнетизма и теории относительности М.: ИЛ, 1962, 488 с.

Рукопись поступила в издательский отдел  
26 июля 1989 года.

Шавохина Н.С. P2-89-566  
Универсальные уравнения Федорова в теории струн и мембран

Показано, что уравнение минимальных гиперповерхностей в евклидовом /или псевдоевклидовом/ пространстве может быть записано в виде универсального матричного уравнения Федорова с частными производными первого порядка. Времени-подобные минимальные поверхности в псевдоевклидовом пространстве Минковского описывают свободное движение релятивистских струн и мембран; пространственно-подобные минимальные поверхности описывают потенциал в нелинейной электростатике Борна. Все они являются мнимыми образами минимальных поверхностей евклидова пространства. Найдены сферически симметричные минимальные поверхности всех трех типов: гиперкатеноид любой размерности и его мнимые образы - мировая поверхность мембраны и потенциал. Таким образом, в уравнениях Федорова содержится богатая информация о минимальных поверхностях, о нелинейной электростатике и о поведении струн и мембран.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Т.Ю. Думбрайс

Shavokhina N.S. P2-89-566  
Fedorov Universal Equations In the String and Membrane Theories

It is shown that the equation of minimal hypersurface in the Euclidean (or pseudo-Euclidean) space can be written as the universal Fedorov matrix equation with first-order partial derivatives. Time-like minimal surface in the pseudo-Euclidean Minkowski space describe the free motion of relativistic strings and membranes, whereas space-like surfaces describe the potential in the nonlinear Born electrostatics. All of them are imaginary images of minimal surface of the Euclidean space. Spherically symmetric surfaces are found of all the three types, the hypercatenoid of any dimensionality and its imaginary images - the world surface of a membrane and a potential. The Fedorov equations provide a rich information on the minimal surfaces, nonlinear electrostatics and the behaviour of strings and membranes.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989