

С 324.1

Ш-123



**ЛЕКЦИИ  
ДЛЯ МОЛОДЫХ  
УЧЕНЫХ**

**С. В. Шабанов**

**СТРУКТУРА ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА**

**В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ**

**ДУБНА**

P2-89-533

C324.1  
Ш-123

С. В. Шабанов

СТРУКТУРА ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА  
В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

133277

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1989

Шабанов С.В.

Структура фазового пространства  
в калибровочных теориях

Лекции посвящены новому аспекту динамики систем с калибровочной группой – редукции фазового пространства физических степеней свободы. Изучается структура физического фазового пространства в различных моделях с калибровочной симметрией и, как с бозевскими, так и с грассмановыми степенями свободы, включая поля Янга – Миллса и модель Глэшоу – Вайнберга – Салама. Обсуждаются физические следствия редукции фазового пространства.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Перевод автора.

Shabanov S.V.

Phase Space Structure in Gauge Theories

P2-89-533

The lectures are devoted to the new aspect of dynamical systems with gauge groups, the phase space reduction of physical degrees of freedom. The physical phase space structure in many models with a gauge symmetry and with commuting and anticommuting variables, including Yang – Mills fields and Glashow – Weinberg – Salam model, is studied. Some physical consequences of the phase space reduction are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	4
1. Введение .....	5
2. Простые примеры .....	8
2.1. Частица в плоскости .....	8
2.2. ФП полярной системы координат .....	14
2.3. Структура ФП и квантовое описание .....	16
2.4. КИ для системы с ФП = $\text{Con}(\mathbb{T})$ .....	18
2.5. Функции Грина в квантовой механике .....	24
2.6. Грассмановы переменные и калибровочная симметрия .....	27
2.7. Квантовое описание грассмановых степеней свободы с ФП = $\text{Con}(\mathbb{T})$ .....	32
2.8. Некоторые выводы .....	34
3. Модели с произвольной калибровочной группой .....	35
3.1. Классическая механика с произвольной калибровочной группой .....	35
3.2. Гильбертово пространство состояний и структура ФП .....	39
3.3. КИ для системы с ФП = $K^+ \otimes H$ .....	40
3.4. Непротиворечивость динамики и схема квантования Дирака .....	45
3.5. Роль калибровочных инвариантов при построении КИ .....	47
3.6. Структура физического гильбертова пространства для ферми-системы .....	51
4. Структура ФП полей Янга – Миллса .....	53
4.1. Структура ФП поля Янга – Миллса с группой $SU(2)$ .....	53
4.2. Случай произвольной группы .....	54
4.3. ФП полей в моделях Хиггса .....	57
5. Некоторые следствия редукции физического ФП .....	62
5.1. Квазиклассическое описание для системы с ФП = $K^+ \otimes H$ .....	62
5.2. Спектр возбуждений квантового солитона с ФП = $\text{Con}(\mathbb{T})$ .....	66
5.3. Природа бозона Хиггса .....	68
Приложение А .....	73
Приложение Б (Краткие сведения по теории групп Ли) .....	80
Литература .....	83

## Предисловие

Эти лекции были прочитаны весной 1989 года в Народном университете ОИЯИ в Дубне. Основная их цель - дать последовательное изложение нового аспекта динамики теорий с калибровочной симметрией - изменения структуры фазового пространства физических степеней свободы. В основу лекций положен цикл работ, выполненных мною совместно с Л.В.Прохоровым в течение последних четырех лет.

Материал в лекциях расположен в порядке возрастания сложности рассматриваемых динамических систем. Подробный их план представлен в конце Введения.

Всё изложение опирается на обобщенную гамильтонову динамику Дирака, которую он построил в своих знаменитых "Лекциях по квантовой механике". Для чтения лекций было бы желательным знакомство с представлением квантовой теории в рамках интегрирования по путям. Кроме того, предполагается, что читатель знаком с основами теории групп, хотя некоторые необходимые сведения из нее приводятся в Приложении Б.

Я признателен профессору В.Г.Кадышевскому за организацию этих лекций и помощь в их публикации.

Автор

" Я хочу сделать это так: сначала разобрать некоторые очень простые примеры, а потом продолжить несколько более общим образом. Надеюсь, простые примеры вы поймете, а, поняв их, поймете сразу и обобщения, - во всяком случае, именно так понимаю вещи я"X)

Р. Фейнман

## I. Введение

Вряд ли есть необходимость объяснять, что стремительный прогресс в физике элементарных частиц во второй половине XX столетия связан с открытием Янгом и Миллсом принципа калибровочной симметрии [1]. Наверное, правильнее будет сказать: его переоткрытие, поскольку сама идея была высказана более 60 лет назад Вейлем и Фоком [2,3]. Несмотря на интенсивное изучение калибровочных теорий, которое привело к созданию единой теории электрослабых взаимодействий [4,5] и квантовой хромодинамики [6], их динамика полна сюрпризов и неожиданностей. Так, на моделях с калибровочной симметрией в [7] было показано, что часть физических степеней свободы может иметь фазовое пространство  $(\Phi|I)$ , отличное от привычной плоскости, т.е. канонические координата  $q$  и импульс  $p$ , отвечающие этой степени свободы, принимают калибровочно-неэквивалентные значения не на всей фазовой плоскости  $R^2 = R_q \otimes R_p$ , а только на её части. Этому аспекту динамики теорий с калибровочной симметрией и посвящены настоящие лекции.

Хорошо известно, что для задания динамики любой системы можно использовать либо лагранжев, либо гамильтонов формализм. В первом случае эволюция системы во времени описывается лагранжевыми уравнениями движения

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (I.1)$$

где  $L=L(q,\dot{q})$  - лагранжиан,  $N$  - число степеней свободы. Для описания системы в гамильтоновом формализме необходимо задать три вещи: гамильтониан  $H=H(q,p)$  как функцию координат  $q_i$  и импуль-

x) Из последней лекции Р. Фейнмана, опубликованной при его жизни. Кембриджский университет, 1986 г. См. УФН. 1989. Т. 157. № 1. С. 163-183. "Почему существуют античастицы".

сов  $p_i$ , скобку Пуассона (для любых двух величин  $A$  и  $B$ )

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \quad (I.2)$$

и структуру ФП, т.е. область допустимых значений координат и импульсов. Обычно ФП совпадает с евклидовым пространством  $\mathbb{R}_q^N \otimes \mathbb{R}_p^N = \mathbb{R}^{2N}$ . Тогда эволюция во времени задается гамильтоновыми уравнениями движения

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (I.3)$$

Уравнения (I.1) и (I.3) эквивалентны друг другу, если учесть правила перехода от лагранжева к гамильтонову формализму

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (I.4)$$

Первое уравнение в (I.4) определяет скорость  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q)$  как функцию координат и импульсов.

Квантование осуществляется заменой  $p_i$  и  $q_i$  на операторы  $\hat{p}_i$ ,  $\hat{q}_i$ , а все скобки Пуассона заменяются на коммутаторы  $\{, \} \rightarrow -i[, ]$ , в частности ( $\hbar \equiv 1$ )

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} = i\{q_i, p_j\}. \quad (I.5)$$

Для описания квантовой динамики существует три представления. Если описывать эволюцию операторов во времени, используя квантовые уравнения (I.3), то полученное представление называется гейзенберговским. С помощью унитарного преобразования оно связано со шредингеровским представлением, в котором операторы не зависят от времени, а эволюция описывается уравнением Шредингера

$$i\partial_t \psi = H(\hat{q}, \hat{p}) \psi, \quad (I.6)$$

где  $\psi$  - вектор состояния. Есть еще представление взаимодействия (см. стандартные курсы квантовой механики, например, [8]).

На первый взгляд кажется, что квантование лишает равноправия гамильтонов и лагранжевых формализмов. Однако формализм интегрирования по путям, предложенный Фейнманом [9], позволяет восстановить утраченное равноправие. В рамках континуального интеграла (КИ) амплитуда перехода частицы из точки  $q_i(0) = q_i'$  в момент времени  $t=0$  в точку  $q_i = q_i(t)$  в момент времени  $t$  имеет вид [9]

$$\langle q | \exp(-it\hat{H}) | q' \rangle \equiv U_t(q, q') = \int \prod_{\tau=0}^t \frac{d^N p(\tau) d^N q(\tau)}{(2\pi)^N} \exp i \int_0^t d\tau (p_i \dot{q}_i - H(p, q)), \quad (I.7)$$

где интегрирование ведется по всему ФП. Функция  $U_t(q, q')$  удовлетворяет (I.6), поэтому описание в рамках КИ эквивалентно решению уравнения Шредингера. Для стандартного гамильтониана  $H = \frac{1}{2} p_i^2 + V(q)$  интеграл по импульсу в (I.7) можно вычислить, тогда получится лагранжева форма КИ

$$U_t(q, q') = \int \mathcal{D}q \exp \left[ i \int_0^t d\tau L(q, \dot{q}) \right], \quad (I.8)$$

где  $L = \frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - V(q)$  и  $\mathcal{D}q$  - стандартная мера [9]. Мы можем применять выражение (I.8) в качестве альтернативы (I.6), т.е., задав лагранжиан, сразу можем вычислить ядро оператора эволюции по (I.8).

Такое положение вещей остается в силе до тех пор, пока система задается несингулярным лагранжианом. Первое уравнение в (I.4) разрешимо относительно  $\dot{q}_i$ , если матрица  $K_{ij} = \partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j$  невырождена ( $\det K \neq 0$ ). В противном случае при решении (I.4) мы получим соотношения вида  $\mathcal{P}_a(q, p) = 0$ ,  $a=1, 2, \dots, M < N$ , не содержащие скоростей  $\dot{q}_i$ . Очевидно, число независимых соотношений  $M$  определяется степенью вырождения матрицы  $K_{ij}$ . Системы с вырожденной матрицей  $K_{ij}$  называются сингулярными, а  $\mathcal{P}_a = 0$  - первичными связями [10]. Для квантового описания сингулярных систем Дираком была предложена обобщенная гамильтонова динамика [10]. Оказывается, что всякая система, обладающая локальной симметрией, т.е. уравнения движения которой не меняются при преобразованиях координат, зависящих от произвольных функций времени, описывается сингулярным лагранжианом. Поэтому типичный пример сингулярных систем дают калибровочные теории.

Наличие связей приводит к тому, что реально система движется не в полном ФП, а только по некоторому его подмногообразию. Следовательно, в КИ (I.7) надо ограничить область интегрирования до физического подпространства в ФП, которое определяется связями. Именно такой способ построения КИ реализуется в калибровочных теориях [11], т.е., используя связи, можно исключить зависимость действия в (I.7) от части импульсов и интегрировать только по оставшимся, физическим степеням свободы. При этом априори полагают, что у оставшихся физических степеней



ней свободы ФП имеет стандартный вид (некоторое четномерное евклидово пространство). Однако ниже будет продемонстрировано, что для широкого класса систем с калибровочной группой это не так.

Предлагаемые лекции посвящены систематическому анализу структуры физического ФП в калибровочных теориях. Вначале рассмотрены самые простые модели, чтобы выяснить общую причину редукции физического ФП в теориях с калибровочной симметрией. На примере систем с конечным числом степеней свободы обсуждено влияние модификации физического ФП на квантовое описание в рамках КИ, т.е. предложен рецепт учета редукции ФП в КИ, причем исследовались модели как с бозевскими, так и с фермионными переменными. Затем изучались полевые теории. Дан анализ ФП полей Янга - Миллса и полей в стандартной модели электрослабых взаимодействий Глэшоу-Вайнберга-Салама. В последней части рассмотрены некоторые физические следствия редукции ФП. В частности, показано, что изменение структуры ФП ведет к изменению квазиклассического описания (квантовомеханические инстантоны, спектр внутренних возбуждений солитона). Приведены аргументы в пользу составной природы бозона Хиггса в стандартной модели электрослабых взаимодействий.

## 2. Простые примеры

### 2.1. Частица в плоскости

Чтобы продемонстрировать влияние калибровочной симметрии на структуру ФП физических степеней свободы, рассмотрим механическую модель с функцией Лагранжа [7].

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{x} + yT\dot{x})^2 - V(x^2), \quad (2.1)$$

где двумерный вектор  $x = (x_1, x_2)$  и скаляр  $y$  - динамические переменные,  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  - генератор вращений в плоскости  $(x_1, x_2)$ ,  $(Tx)_i = T_{ij}x_j$  ( $i, j = 1, 2$ ),  $V$  - потенциал. Лагранжиан (2.1) описывает нерелятивистскую частицу единичной массы в плоскости. Он инвариантен относительно группы калибровочных преобразований

$$x \rightarrow \exp(\omega T)x, \quad y \rightarrow y - \dot{\omega}, \quad (2.2)$$

где  $\omega = \omega(t)$  - произвольная функция времени, т.е. калибровочные преобразования суть вращения двумерного вектора. Как уже отмечалось, локальная симметрия ведет к связям на динамические переменные. Действительно, нетрудно проверить, что матрица  $K$  вырождена:  $K_{xy} = \partial^2 L / \partial \dot{x} \partial \dot{y} = 0$ ,  $K_{yy} = \partial^2 L / \partial \dot{y}^2 = 0$ . Видно, что из  $\partial x$

матрицы  $K$  строка и столбец, отвечающие переменной  $y$ , равны нулю, так как  $L$  не зависит от  $\dot{y}$ . Модель (2.1) можно сравнить со скалярной электродинамикой, в которой все поля зависят только от времени, а пространственные компоненты векторного поля равны нулю, т.е.  $x = x(t)$  играет роль поля материи, а  $y = A_0(t)$  - временная компонента векторного потенциала.

Для построения непротиворечивой гамильтоновой динамики системы воспользуемся схемой Дирака [10]. Канонические импульсы суть  $P_i = \partial L / \partial \dot{x}_i = \dot{x}_i + yT_{ij}x_j$ ,  $\pi = \partial L / \partial \dot{y} = 0$ . Равенство  $\pi = 0$  есть первичная связь в системе [10]. Матрица  $K$  имеет только одно собственное число, равное нулю, поэтому  $\pi = 0$  дает все независимые первичные связи. По правилу (I.4) находим гамильтониан системы

$$H(p, x; \pi, y) = \frac{1}{2} p^2 + V(x^2) - y p T x, \quad (2.3)$$

причем  $p T x \equiv p_i T_{ij} x_j$ . Равенство  $\pi = 0$  должно выполняться во все моменты времени. Тогда согласно (I.3) имеем

$$\dot{\pi} = \{ \pi, H \} = p T x = 0. \quad (2.4)$$

Равенство (2.4) дает вторичную связь в теории [10], которая есть следствие требования непротиворечивости гамильтоновой динамики. Далее, нужно вновь потребовать, чтобы связь  $G \equiv p T x = 0$  выполнялась во все моменты времени, т.е.  $\dot{G} = \{ G, H \} = 0$ , это равенство выполняется тождественно и не приводит к возникновению новых вторичных связей. Все связи в теории находятся в инволюции, т.е. их скобки Пуассона друг с другом и гамильтонианом замыкаются на сами связи (связи первого рода [10]):  $\{ G, \pi \} = \{ G, H \} = 0$ ,  $\{ \pi, H \} = G$ . Очевидно, что вторичная связь  $G$  является генератором поворотов как в двумерном конфигурационном пространстве, поскольку  $\{ x, G \} = T x$ ,  $\{ x^2, G \} = 0$ , так и в импульсном пространстве, поскольку  $\{ p, G \} = T p$ ,  $\{ p^2, G \} = 0$ , т.е. калибровочные преобразования суть одновременное вращение векторов  $x \rightarrow \exp(\omega T)x$  и  $p \rightarrow \exp(\omega T)p$ .

Перейдем к определению структуры физического ФП. Заметим, что связь  $G$  входит в гамильтониан (2.3) с совершенно произвольным множителем  $y$ , поэтому все величины, скобки Пуассона которых с  $G$  отличны от нуля, содержат нефизические переменные, ибо их изменение со временем зависит от нашего произвола, т.е. от выбора  $y(t)$  (фактически выбор конкретной функции  $y(t)$  есть выбор калибровки, т.е. задание эволюции нефизических степеней свободы во времени). Следовательно, для определения структуры физического ФП необходимо найти новые канонические переменные, которые инвариантны относительно преобразований, генерируемых

связью  $G$ . Закон калибровочного преобразования подсказывает, что для выделения физических переменных нужно перейти к полярной системе координат:

$$\begin{aligned} r &= (x^2)^{1/2}, \quad p_r = (p, n_z), \quad \{r, p_r\} = 1; \\ \theta &= \arctg x_2/x_1, \quad p_\theta = r(p, n_\theta), \quad \{\theta, p_\theta\} = 1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $n_z = x/r$  и  $n_\theta = 1/r \partial/\partial \theta x$  - орты полярной системы координат. Убеждаемся, что пара канонически сопряженных переменных  $r$  и  $p_r$  не меняется при вращениях, т.е. эту пару следует отождествить с физическими переменными. Угловая переменная, очевидно, оказывается нефизической, поскольку её канонически сопряженный импульс  $p_\theta = G = 0$  равен нулю. Следует отметить, что переход к калибровочно инвариантным переменным всегда диагонализует связи, т.е. они выражают равенство нулю некоторых обобщенных импульсов.

Таким образом, в полном  $\Phi\Pi = \mathbb{R}^6$  физические степени свободы, по крайней мере, образуют подпространство  $\mathbb{R}_r \otimes \mathbb{R}_{p_r}$ . Но легко видеть, что  $r \geq 0$ ,  $p_r \in \mathbb{R}$ , т.е. физическое  $\Phi\Pi$  уже неизоморфно  $\mathbb{R}^2$ . Чтобы выяснить его структуру, исследуем в нем траектории для какого-нибудь простого потенциала, например,  $V = \frac{1}{2} x^2$ . Гамильтоны уравнения движения вместе со связями таковы:

$$\dot{x} = \{x, H\} = p - yT_x, \quad \dot{p} = \{p, H\} = -x - yT_p, \quad pT_x = 0. \quad (2.6)$$

Решение уравнения связи есть  $p = \lambda x$ , где  $\lambda = \lambda(t)$  - произвольная функция времени. Подставляя это решение в первые два уравнения (2.6) и комбинируя их, получим уравнение, которому подчиняется функция  $\lambda$ :

$$\dot{\lambda} x = -(1 + \lambda^2) x, \quad (2.7)$$

т.е. при  $x \neq 0$  находим  $\lambda = -tg(\text{const} + t)$ . Тогда решения уравнений движения (2.6), подчиняющиеся начальным условиям  $x(t=0) = x_0$ ,  $p(t=0) = \lambda(0)x_0 = 0$ , имеют вид

$$x(t) = \cos t \exp\left(-\int_0^t dt T_y(\tau)\right) x_0, \quad p(t) = -tg t x(t). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.5), находим эволюцию физических переменных во времени

$$r(t) = r_0 |\cos t|, \quad p_r(t) = -r_0 tg t |\cos t|. \quad (2.9)$$

На рис. 1а в  $\Phi\Pi$  переменных  $r$  и  $p_r$  изображена траектория, соот-

ветствующая решению (2.9):

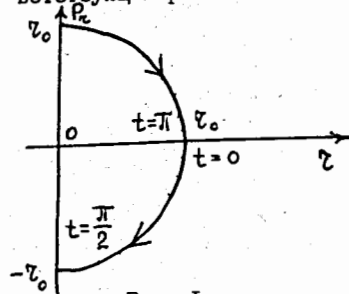


Рис. 1а

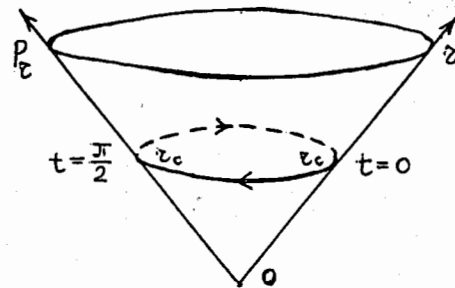


Рис. 1б

Видно, что в момент времени  $t = \pi/2$  траектория претерпевает разрыв и  $p_r$  меняется скачком. Из физических соображений ясно, что никаких скачков в  $\Phi\Pi$  данной механической системы быть не может (скачок импульса связан с "ударом" частицы о "стенку" - область, где потенциал обращается в бесконечность; очевидно, никаких "стенок" в начале координат данная система не имеет  $V(x=0)=0$ ). Следовательно, этот факт нужно трактовать как указание на необходимость отождествить точки прямой  $r=0$ , лежащие на полуосях  $p_r > 0$  и  $p_r < 0$ . Это означает, что в данной модели  $\Phi\Pi$  физических переменных  $r$ ,  $p_r$  есть конус, разворачиваемый в полуплоскость (рис. 1б):  $\Phi\Pi(r, p_r) = \text{con}(\pi)$ . Ввиду коничности  $\Phi\Pi$  период физических колебаний осциллятора уменьшился вдвое, т.е. частота удвоилась.

Заметим, что можно было бы решить уравнения движения в полярных координатах для аналогичной модели без калибровочной симметрии ( $y \equiv 0$  в (2.1)). При этом по-прежнему  $r \geq 0$  и  $p_r \in \mathbb{R}$ . Однако в следующем параграфе будет показано, что  $\Phi\Pi$  для полярной системы координат при отсутствии калибровочной симметрии фактически составляет полную плоскости для переменных  $r$ ,  $p_r$  и  $\theta$ ,  $p_\theta$ .

Разумеется, для определения структуры  $\Phi\Pi$  можно обойтись без решения конкретной механической задачи. Разрешая связь и подставляя это решение в первое уравнение (2.6), получаем уравнение  $\dot{x} = (\lambda(t) - y(t)T)x$ , решение которого есть

$$x(t) = \exp\left\{\int_0^t (\lambda(\tau) - y(\tau)T) d\tau\right\} x_0. \quad (2.10)$$

Вид функции  $\lambda(t)$  определяется видом потенциала. Решение (2.10) допускает следующую интерпретацию: частица движется по оси, причем сама ось может поворачиваться в плоскости, имея неподвижную точку в начале координат. В самом деле, матрица  $T$  есть генератор поворотов в плоскости, а  $y(t)$  есть произвольная функция времени. Точки плоскости, получающиеся одна из другой калибровочным преобразованием (т.е. вращением плоскости), физически неотличимы, потому выбором  $y(t)$  (выбором ка-

либровки) в (2.10) задачу можно свести к изучению движения частицы по одной из декартовых осей, скажем  $x_1$  ( $x_2(t) = 0$  - унитарная калибровка). Однако калибровочный произвол не устраняется полностью требованием  $x_2 = 0$ , поскольку остаются еще калибровочные преобразования, связанные с вращением на угол  $\pi$  в плоскости  $(x_1, x_2)$ , при котором  $x \rightarrow -x$ . Следовательно, эти преобразования не нарушают равенства  $x_2 = 0$ , но изменяют знак у  $x_1 \rightarrow -x_1$ , причем подобные повороты можно осуществить локально, т.е. в любой заданный момент времени  $t = t' > 0$ . Эти калибровочные преобразования задаются функциями  $\omega(\tau) = 2\pi \theta(\tau - t')$ , где  $\theta(\tau)$  - функция Хэвисайда и  $\theta(0) \equiv 1/2$ . Тогда

$$y(\tau) \rightarrow y(\tau) - 2\pi \delta(t' - \tau). \quad (2.11)$$

Если в равенстве (2.10) выбрать  $y(\tau)$  так, что  $x_2(t) = 0$ , то при преобразованиях (2.11)  $x_1(t)$  будет менять знак в момент времени  $t = t'$ , так как

$$\int_0^t d\tau \delta(\tau - t') = 0, 1/2, 1 \quad (2.12)$$

соответственно при  $t' > t$ ,  $t' = t$ ,  $t' < t$ , а равенство  $x_2 = 0$  сохраняется. Калибровочные преобразования (2.11) соответствуют поворотам на угол  $\pi$  оси, вдоль которой движется частица. Следовательно, физическая область изменения переменной  $x_1$  есть полуось, скажем  $x_1(t) \geq 0$ , ибо точки, связанные калибровочным преобразованием, физически неотличимы. С другой стороны, ввиду равенства  $p(t) = \lambda(t) x(t)$ , из  $x_2(t) = 0$  следует  $p_2(t) = 0$ , поэтому при калибровочных преобразованиях (2.11)  $p_1(t)$  преобразуется подобно  $x_1(t)$ , т.е.  $x_1(t) \rightarrow -x_1(t)$ ,  $p_1(t) \rightarrow -p_1(t)$  в произвольный момент времени  $t = t'$ . Другими словами, после исключения нефизических переменных (условие  $x_2 = 0$ ) остается калибровочная группа  $Z_2$ , которая уже не может уменьшить число физических степеней свободы, но может уменьшить их  $\Phi$ , так как её действие в  $\Phi$  ( $x_1, p_1$ ):  $p_1 \rightarrow -p_1$ ,  $x_1 \rightarrow -x_1$  означает, что центрально-симметричные точки фазовой плоскости физических неотличимы; отождествление их (склейка) превращает плоскость в конус  $\text{con}(\pi)$ .

Сделаем в заключение несколько замечаний. Формально в решении (2.8) вместо  $\cos t$  может быть также  $|\cos t|$ . Это происходит в том случае, если после сокращения на  $x$  в (2.7) считать получающееся уравнение справедливым при всех  $t$ . Между тем  $x(t)$  обращается в нуль при изменении знака  $\cos t$ , и дифференциальное уравнение для  $\lambda(t)$  (2.7) становится неприменимым в моменты времени, когда  $\cos t = 0$ .

Решение (2.8) написано из требования, чтобы оно совпадало с соответствующим решением первых двух уравнений (2.6) при  $y \equiv 0$ . Впрочем, замена  $\cos t$  на  $|\cos t|$  в решении (2.8) эквивалентна некоторому калибровочному преобразованию. В самом деле, заменяя в (2.8)

$$y(\tau) \rightarrow y(\tau) - \pi \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\tau - (\frac{\pi}{2} + \pi n)), \quad (2.13)$$

видим, что экспонента в (2.8) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp(-T \int_0^t d\tau y(\tau)) &\rightarrow \exp(-T \int_0^t d\tau y(\tau)) \left\{ \cos \left[ \pi \sum_{n=0}^{\infty} \theta(t - (\frac{\pi}{2} + \pi n)) \right] + \right. \\ &+ T \sin \left[ \pi \sum_{n=0}^{\infty} \theta(t - (\frac{\pi}{2} + \pi n)) \right] \left. \right\} = \\ &= \exp(-T \int_0^t d\tau y(\tau)) \mathcal{E}(\cos t), \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

в соответствии с (2.12), где  $\mathcal{E}(x) = 1$ ,  $x > 0$ ,  $\mathcal{E}(x) = -1$ ,  $x < 0$ , т.е.  $\mathcal{E}(x)$  - знаковая функция. Следовательно,  $\cos t$  в (2.8) заменяется на  $|\cos t| = \cos t \cdot \mathcal{E}(\cos t)$ . Значения интеграла в (2.14) при  $t = \pi/2 + \pi n$  (см. (2.12)) не влияют на наш вывод, так как в (2.8) общим множителем стоит  $\cos t = 0$  при  $t = \pi/2 + \pi n$ . В случае движения общего вида калибровочное преобразование  $x_1(t) \rightarrow |x_1(t)|$  ( $x_2 = 0$ ) имеет вид (2.13), но суммирование, согласно (2.10), должно проводиться по всем корням уравнения  $\exp(\int_0^t d\tau \lambda) = 0$ , т.е. когда частица проходит через начало координат.

Формально преобразования (2.12) и (2.13) содержат обобщенные функции. Возникает вопрос о допустимости таких калибровочных преобразований. Во-первых, функция Хэвисайда, используемая в качестве  $\omega(t)$  в (2.11) и (2.13), может быть сколь угодно точно аппроксимирована гладкой функцией. Во-вторых, лагранжиан (2.1) остается калибровочно инвариантным и в том случае, когда  $\omega$  является обобщенной функцией. При этом кажущаяся неопределенность в решении уравнений движения ( $x(t)$ ,  $y(t)$  - обобщенные функции) является иллюзорной, поскольку физические, калибровочно-инвариантные величины по-прежнему зависят от времени непрерывным образом, точнее, эта зависимость определяется видом потенциала. Все "сингулярности" эволюции во времени относятся только к нефизическим переменным, которые, однако, не могут влиять на физические наблюдаемые величины. С другой стороны, калибровочно-инвариантные переменные определяются только законом калибровочного преобразования (2.2) и не зависят от вида взаимодействия (потенциала) вообще. Фактически вопрос о калибровочных инвариантах это вопрос теории групп (теории инвариантов), а не вопрос динами-



ки. При этом структура инвариантов не зависит от класса функций  $\omega = \omega(t)$ . Действительно, единственный инвариант группы  $SO(2)$  есть квадрат вектора  $x^2$ , зависимость которого от времени гладкая. Заметим также, что именно из соображений непрерывности эволюции физических переменных был совершен переход к ФП  $(r, p_r) = \cos(\pi)$  от полуплоскости. По этим соображениям остаточная группа  $\tilde{Z}_2$ , редуцирующая физическое ФП, есть подгруппа калибровочных преобразований. Более того, в части 3 будет продемонстрировано, что эта группа является характеристической для каждой калибровочной теории в том смысле, что ее задание позволяет реконструировать весь набор калибровочных инвариантов в теории и, тем самым, обеспечить однозначное соответствие между квантовыми амплитудами, вычисленными в некоторой калибровке (унитарной в данном случае), и явно калибровочно инвариантными амплитудами (см. также §§ 2.3, 2.5).

Итак, при обоих способах выделения физических переменных инвариантом и неинвариантом (фиксация калибровки), структура физического ФП оказалась одной и той же. Именно ФП  $(r, p_r) = \Phi\Pi(x, p_x) = \cos(x)$ . Кроме того, при неинвариантном способе исключения нефизических переменных для установления структуры ФП физических степеней свободы можно пользоваться как координатным, так и импульсным представлением. Однако видима несимметричность выражений для  $r$  и  $p_r$  иллюзорна. Можно было бы определить физические переменные как  $\tilde{p} = (p^2)^{1/2} \geq 0$ ,  $r_p = (p, x) / \tilde{p} \in \mathbb{R}$ ,  $\{r_p, \tilde{p}\} = 1$  и т.д. При переходе к конусу эти возможности становятся неразличимыми: конус можно разрезать и по полуоси  $\tilde{p}$  и по полуоси  $r$ .

## § 2.2 ФП для полярной системы координат

При движении частицы в плоскости ФП каждой из двух её степеней свободы в декартовых координатах есть плоскость:  $\Phi\Pi(p_i, x_i) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . В полярных координатах каждая из переменных  $r, \theta$  принимает значения, лежащие лишь на части вещественной оси. Каковы же тогда ФП соответствующих степеней свободы? Ввиду того, что  $r$  меняется на полуоси  $r \geq 0$ , а  $\theta$  - отрезке  $[0, 2\pi]$ , напрашивается вывод, что ФП  $(r, p_r)$  есть полуплоскость, а ФП  $(\theta, p_\theta)$  - полоса шириной  $2\pi$ , так как  $p_r, p_\theta$  меняются в бесконечных пределах  $-\infty \leq p_r, p_\theta \leq \infty$ . Более внимательное рассмотрение показывает, что ФП в обоих случаях фактически есть полные плоскости.

Чтобы убедиться в справедливости сказанного относительно  $r$ ,  $p_r$ , рассмотрим движение частицы через начало отсчета в декартовых и полярных координатах параллельно. Пусть движение происходит

вдоль оси  $x_1$ . Пока частица движется по положительной полуоси, выполняется равенство  $x_1 = r$ , и никаких парадоксов не возникает. При прохождении начала координат  $x_1$  меняет знак, а  $r$  знака не меняет,  $\theta$  и  $p_r$  меняются скачком:  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ ,  $p_r = |p| \cos \theta \rightarrow -p_r$ . Хотя скачки и не связаны с воздействием каких-либо сил, они не противоречат уравнениям движения. Между тем кинематика системы допускает интерпретацию, позволяющую их избежать. В самом деле, формулы перехода к полярным координатам  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  инвариантны относительно замены  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ ,  $r \rightarrow -r$ . Это означает, что движение со значениями полярных координат  $\theta + \pi$ ,  $r > 0$  неотличимо от движения со значениями их  $\theta$ ,  $r < 0$ . Тогда фазовая траектория будет одинакова как в плоскости  $(r, p_r)$ , так и в плоскости  $(x_1, p_1)$ , что и следовало ожидать.

Скажем иначе, ФП  $(r, p_r)$  есть сложенная пополам вдоль оси  $r = 0$  плоскость, каждая из половинок плоскости отвечает значениям  $\theta$ , различающимся на  $\pi$ , поэтому физические состояния на этих полуплоскостях различны, причем вторая половинка  $r < 0$  перед совмещением с первой  $r > 0$  повернута на угол  $\pi$  вокруг оси  $p_r = 0$  (ввиду скачка импульса  $p_r \rightarrow -p_r$ ). Таким образом, каждой точке фазовой полуплоскости  $r \geq 0$ ,  $p_r \in \mathbb{R}$  соответствуют два различных физических состояния, следовательно, такая полуплоскость изоморфна фазовой плоскости  $r, p_r \in \mathbb{R}$ , каждой точке которой отвечает только одно физическое состояние системы, т.е. по определению ФП именно эта плоскость должна быть отождествлена с ФП  $(r, p_r)$ . При наличии калибровочной симметрии  $\theta$  становится нефизической переменной (ненаблюдаемой), поэтому различие между двумя наложенными полуплоскостями исчезает и ФП  $(r, p_r) = \cos(\pi)$  (поворот на угол  $\pi$  второй половинки фазовой плоскости  $r < 0$  перед совмещением с первой  $r > 0$  как раз и обеспечивает их отождествление согласно калибровочной группе  $\tilde{Z}_2$ , действующей в ФП физических переменных).

Изучая вращение частицы вокруг начала координат, убеждаемся, что для однозначной характеристики движения нужно допускать изменения угловой переменной в бесконечных пределах  $\theta \in \mathbb{R}$ , если учитывать число оборотов, совершенных частицей вокруг начала координат.

К этому же выводу приводит анализ гамильтонова КИ в полярных координатах [12, 13]: в нем по всем переменным  $r, \theta, p_r, p_\theta$  нужно интегрировать в бесконечных пределах. Нужно подчеркнуть, что анализ в [13] от начала до конца проводился в рамках квантовой механики и не апеллировал к классической физике.

### 2.3. Структура ФП и квантовое описание

При анализе классической динамики системы было найдено, что редуциция ФП ведет к изменению некоторых физических характеристик системы. Так, в случае осциллятора частота колебаний увеличилась вдвое (§ 2.1). Рассмотрим влияние структуры ФП на квантовое описание. Система (2.1) содержит связи первого рода, поэтому для построения непротиворечивой квантовой теории необходимо использовать рецепт квантования Дирака [10], согласно которому канонические переменные заменяются операторами с коммутационным соотношением (1.5), а операторы связей обращаются в нуль при применении их к векторам физического подпространства состояний (полное гильбертово пространство состояний задается уже введением самосопряженных операторов (1.5)). Применительно к рассматриваемой модели это означает  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ ,  $[\hat{y}_j, \hat{\pi}] = i$  ( $\hbar = 1$ ) и

$$\hat{\pi} |\psi_{ph}\rangle = 0, \quad \hat{p}_i T_{ij} \hat{x}_j |\psi_{ph}\rangle = 0. \quad (2.15)$$

Первое уравнение в (2.15) означает независимость физических волновых функций от  $y$ . Чтобы решить второе уравнение, в (2.15) введем операторы рождения и уничтожения:

$$\hat{a}_j^+ = (\hat{x}_j - i\hat{p}_j)/\sqrt{2}, \quad \hat{a}_j = (\hat{x}_j + i\hat{p}_j)/\sqrt{2}, \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_k^+] = \delta_{jk}. \quad (2.16)$$

Тогда физические состояния выделяются условием

$$\hat{G}_1 |\psi_{ph}\rangle = i(\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 - \hat{a}_2^+ \hat{a}_1) |\psi_{ph}\rangle = 0. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) нетрудно решить. Поскольку  $[(\hat{a}_1^{+2} + \hat{a}_2^{+2}), \hat{G}_1] = 0$ , имеем

$$|\psi_{ph}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\hat{a}_1^{+2} + \hat{a}_2^{+2})^n |0\rangle, \quad (2.18)$$

где вакуумное состояние определяется равенством  $\hat{a}_i |0\rangle \equiv 0$ ,  $c_n$  — некоторые постоянные коэффициенты. Выражение (2.18) дает общий вид вектора физического подпространства, так как единственный независимый инвариант относительно  $SO(2)$  калибровочных вращений есть квадрат вектора  $\hat{a}^{+2} = \hat{a}_1^{+2} + \hat{a}_2^{+2}$ ; всякий другой инвариант должен быть функцией от него.

Например, для осциллятора  $V = \frac{1}{2} x^2$  физический спектр гамильтониана  $H = \hat{a}_j^+ \hat{a}_j + 1$ , очевидно, есть  $E_n = 2n + 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,

согласно (2.18). Подобно классической теории частота (или расстояние между уровнями энергии) оказалась удвоенной.

Полученный результат можно сделать более прозрачным, если рассуждать на языке орбит калибровочной группы. Каждому вектору  $x$  можно сопоставить гладкое многообразие — его орбиту, которая образована всевозможными калибровочными преобразованиями  $\chi$ , т.е. в данном случае это окружность  $S^1$  радиуса  $|x|$ . Все конфигурационное пространство  $\mathbb{R}^2$  расслаивается на орбиты группы  $SO(2)$  — окружности  $S^1$ . Наблюдаемыми (физическими) являются только переходы с одной орбиты на другую, так как движение вдоль орбиты, очевидно, описывается нефизической угловой переменной. Поэтому в конфигурационном пространстве можно задать линию (фиксировать калибровку), вдоль которой изучать эволюцию физической степени свободы. Например,  $x_2 = 0$ , т.е. в качестве физической переменной выбрана  $x_1$ . Однако для однозначного динамического описания необходимо, чтобы выбранная линия пересекала каждую орбиту только один раз, ввиду того, что точки, принадлежащие одной орбите, калибровочно-эквивалентны. Нетрудно видеть, что линия  $x_2 = 0$  пересекает все окружности с центром в начале координат дважды. Следовательно, точки этой линии  $x_1$  и  $-x_1$  калибровочно-эквивалентны, т.е. остаточная группа  $Z_2$ , редуцирующая ФП  $(x_1, p_1)$ , появляется как следствие однозначности описания на пространстве орбит.

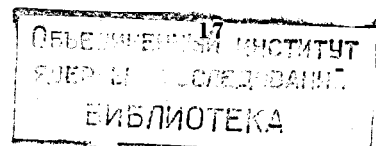
Посмотрим, как обстоит дело в квантовом случае. Унитарный оператор  $\hat{U}(\omega) = \exp i\omega \hat{G}$ ,  $\hat{G}^+ = \hat{G}$  осуществляет калибровочные преобразования (2.2) операторов координаты и импульса. Используя его, построим расслоение на калибровочные орбиты полного гильбертова пространства (степень свободы  $y$  учитывается тривиально, поэтому она не включена в последующее рассмотрение). Как в классической механике остояния, получающиеся друг из друга калибровочными преобразованиями, физически неотличимы, так и в квантовой теории следует считать физически тождественными векторы состояний, принадлежащие одной орбите. Используя формулу Бейкера — Хаусдорфа:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (2.19)$$

находим

$$\begin{aligned} \hat{U}(\omega) \hat{a}_1^+ \hat{U}^\dagger(\omega) &= \hat{a}_1^+ \cos \omega + \hat{a}_2^+ \sin \omega, \\ \hat{U}(\omega) \hat{a}_2^+ \hat{U}^\dagger(\omega) &= -\hat{a}_1^+ \sin \omega + \hat{a}_2^+ \cos \omega. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Тогда из (2.20) следует, что оператор калибровочных преобразований



$\hat{U}(\omega)$  имеет инвариантное подпространство, натянутое на векторы

$$|n-m, m\rangle = (\hat{a}_1^+)^{n-m} \hat{a}_2^{+m} |0\rangle, \quad m=0,1,\dots,n, \quad (2.21)$$

причем это пространство является неприводимым относительно действия  $\hat{U}$  при фиксированном  $n$  (не распадается в прямую сумму инвариантных подпространств). Следовательно, векторы (2.21) принадлежат одной орбите. В качестве представителя этой орбиты удобно выбрать вектор  $|n, 0\rangle$ , что соответствует в классическом случае фиксации калибровки  $x_2 = 0$ . Но этим калибровочный произвол не исчерпывается, остается еще калибровочная группа  $\bar{Z}_2$ . В квантовой теории этим калибровочным преобразованиям отвечает оператор  $\hat{U}(\pi)$ . Ввиду (2.20) получаем

$$\hat{U}(\pi) |n, 0\rangle = \hat{U}(\pi) \hat{a}_1^{+n} |0\rangle = (-1)^n |n, 0\rangle. \quad (2.22)$$

Следовательно, физические состояния суть  $|2n, 0\rangle$ . Если в качестве примера взять осциллятор, то изучаемая система будет эквивалентна одномерному осциллятору с удвоенным расстоянием между уровнями энергии. Отметим, что  $\bar{Z}_2$ -инвариантность позволяет восстановить правильный спектр в теории (уровни осциллятора удвоены как при калибровочно-инвариантном подходе (2.18), так и в случае фиксации калибровки). Если бы структура физического ФП была проигнорирована, то в калибровке  $x_2 = 0$  был бы получен неверный спектр, т.е. несовпадающий с тем, который вытекает из явного решения условий квантования Дирака (2.17) систем со связями.

Таким образом, устранение всех нефизических степеней свободы путем фиксации калибровки еще не гарантирует сужения полного гильбертова пространства до физического подпространства состояний, выделяемого операторами связей в схеме квантования Дирака систем со связями. Роль дискретной калибровочной группы, редуцирующей ФП физических степеней свободы, как раз и заключается в том, чтобы исключить эти оставшиеся нефизические состояния. К проверке этого вывода в более сложных системах мы вернемся при рассмотрении квантовой теории в рамках КИ.

#### 2.4. КИ для системы с ФП = $\text{con}(\pi)$

Рассмотрим простейшее неабелево обобщение модели (2.1). Лагранжиан имеет вид [7]

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x} + y_a T^a x)^2 - V(x^2), \quad (2.23)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_N)$  и  $y_a$  - динамические переменные теории,  $T^a$  - генераторы группы  $SO(N)$  (вещественные антисимметричные матрицы  $N \times N$ );  $[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$ ,  $f^{abc}$  - структурные константы  $SO(N)$ . Лагранжиан (2.23) инвариантен относительно группы калибровочных преобразований

$$x_j \rightarrow \Omega_{ji} x_i, \quad (\partial_t + y) \rightarrow \Omega (\partial_t + y) \Omega^T. \quad (2.24)$$

Здесь  $\Omega = \exp \omega_a(t) T^a$  - элемент группы  $SO(N)$ ,  $\omega_a(t)$  - произвольные функции времени,  $y \equiv y_a T^a$ ,  $\Omega^T$  - транспонированная матрица  $\Omega$ :  $\Omega \Omega^T = \Omega^T \Omega = 1$ . Калибровочные преобразования (2.24) суть вращения в  $N$ -мерном пространстве вектора  $x$ . Поэтому орбиты калибровочной группы  $SO(N)$  есть сферы  $S^{N-1}$  в конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}^N(x)$ . Как и в § 2.3, можно задать линию, вдоль которой изменяется единственная физическая переменная теории. Например, калибровочным преобразованием всегда вектор  $x$  можно направить вдоль одной из декартовых осей:  $x_i = \delta_{i1} r$ . Однако эта линия каждую сферу с центром в начале координат пересекает дважды. Следовательно, для однозначного описания системы нужно считать состояния  $x_1 = r$  и  $x_1 = -r$  физически тождественными, т.е.  $\Phi(\pi(x_1, p_1)) = \text{con}(\pi)$ . К тому же результату ведет и анализ гамильтонова формализма.

Канонические импульсы суть  $\pi_a = \partial L / \partial \dot{y}_a = 0$ ,  $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i = \dot{x}_i + y_{ij} x_j$ . Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2} p^2 + V(x^2) - y_a G^a, \quad (2.25)$$

где  $G_a = \{\pi_a, H\} = p_i T_{ij}^a x_j = 0$  - вторичные связи, они находятся в инволюции (связи первого рода [10])  $\{G_a, G_b\} = f^{abc} G_c$ . Поскольку калибровочные преобразования суть вращения вектора  $x$ , то единственной физической переменной является  $r = (x^2)^{1/2} \geq 0$ , ФП  $r$  и  $p_r = (x, p) / r$  - канонически сопряженного импульса, есть  $\text{con}(\pi)$  по соображениям, аналогичным вышеизложенным в § 2.2 (в данном случае также все угловые переменные  $N$ -мерной сферической системы координат - нефизические, поэтому наложенные друг на друга полуплоскости  $r < 0$  и  $r > 0$  фазовой плоскости  $\mathbb{R}(r) \otimes \mathbb{R}(p_r)$  отождествляются). Отметим, что общим решением уравнений связи  $G_a = 0$  будет  $p = \lambda x$ , поэтому в калибровке  $x_i = \delta_{i1} x_1$  получаем  $p_i = 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, N$ , а в ФП  $(x_1, p_1)$  действует группа  $\bar{Z}_2$ , т.е. ФП  $(x_1, p_1) = \text{con}(\pi)$ .

Перейдем к квантовой теории. Нашей основной задачей будет пост-

роение КИ с учетом редукции физического ФП. Поскольку значения единственной физической переменной лежат на полуоси в рассматриваемой модели, то естественно возникает вопрос об определении КИ как на физическом ФП =  $\cos(\pi)$ , так и на физическом конфигурационном пространстве  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty]$ . Точнее, речь идет об указании рецепта вычисления КИ. Отметим, что даже конечномерный гауссов интеграл, которым обычно аппроксимируют КИ, не вычисляется явно на полуоси. Следовательно, простейшее соображение – замена области интегрирования ФП =  $\mathbb{R}^2$  в (1.7) на ФП =  $\cos(\pi)$  – не приводит к желаемому результату, так как получающийся объект не определен даже для простейших систем: свободная частица, осциллятор.

Поскольку описание в рамках КИ должно быть эквивалентным операторному подходу, то ядро оператора эволюции системы следует получить, используя решения уравнения Шредингера, т.е. при помощи спектрального разложения (формулы Фейнмана – Каца) [14, 15]. Переход к квантовой теории осуществляется заменой всех канонических переменных операторами  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ ,  $[\hat{y}_a, \hat{\pi}_b] = i\delta_{ab}$ , а операторы связей выделяют физическое подпространство состояний. В результате имеем квантовую задачу в координатном представлении  $(\hat{p}_j = -i\partial/\partial x_j, \hat{\pi}_a = -i\partial/\partial y_a)$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{H} \Psi_{ph} &= \left( -\frac{1}{2} \Delta_{(N)} + V(x^2) \right) \Psi_{ph} = E \Psi_{ph}, & (2.26a) \\ \hat{G}_a \Psi_{ph} &= 0, & (2.26b) \end{aligned} \right.$$

где  $\Delta_{(N)}$  –  $N$ -мерный оператор Лапласа (связь  $\hat{\pi}_a \Psi_{ph} = 0$  решается тривиально:  $\Psi_{ph}$  не зависят от  $y_a$ ). Чтобы решить явно уравнения (2.26b), нужно перейти к  $N$ -мерной сферической системе координат. Поскольку калибровочные преобразования генерируются связями  $G_a$ , следовательно,  $G_a = pT^a x = 0$  означает обращение в нуль всех компонент углового момента частицы (повороты в  $\mathbb{R}^N$  генерируются угловым моментом), т.е. физическое подпространство образовано состояниями с нулевым угловым моментом  $\Psi_{ph}(x) = \Psi(r)$ . В физическом подпространстве уравнение (2.26a) имеет вид

$$\left[ \frac{1}{2} \hat{p}_r^2 + \frac{(N-1)(N-3)}{8r^2} + V(r^2) \right] \Psi(r) = E \Psi(r). \quad (2.27)$$

Здесь  $\hat{p}_r = -i r^{-\nu} \partial/\partial r r^\nu$  – эрмитов оператор импульса,  $\nu = (N-1)/2$ . Первые два слагаемых в правой части (2.27) есть радиальная часть оператора Лапласа  $\Delta_{(N)}$  в сферических координатах (угловая часть дает нуль в применении к  $\Psi_{ph}(x) = \Psi(r)$ ). Волновые функции  $\Psi$  нормируются в соответствии со скалярным произведением

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_0^\infty dr r^{N-1} \Psi^*(r) \Psi(r). \quad (2.28)$$

Отметим одну особенность, возникающую при использовании схемы квантования Дирака. Состояния в полном гильбертовом пространстве должны нормироваться согласно скалярному произведению, в которое входит интегрирование по всем степеням свободы, в бесконечных пределах, т.е. с мерой  $\prod_a dy_a d^N x$ . Легко, однако, понять, что физические волновые функции не являются нормированными с этой точки зрения. Действительно,  $\Psi_{ph}$  не зависят от  $y_a$ , и интеграл по ним дает бесконечный множитель. Спрашивается, как трактовать этот факт? Здесь есть два пути. Во-первых, "ненормируемость"  $\Psi_{ph}$  такого же рода, как "ненормируемость" собственного вектора оператора импульса (плоской волны). В самом деле, уравнение  $\hat{\pi}_a \Psi_{ph} = -i \partial/\partial y_a \Psi_{ph} = 0$  означает, что собственное значение оператора импульса равно нулю (частный случай плоской волны:  $\exp(i k_a y_a)|_{k_a=0}$ ). Поэтому  $\Psi_{ph}$  нормирована как обобщенный вектор состояния, подобно плоской волне. Во-вторых, нам нет никакой нужды следить за нефизическими степенями свободы, поскольку они не дают вклада в физические амплитуды. Следовательно, задав гамильтониан в физическом подпространстве, можно изменить меру интегрирования в скалярном произведении, исключив из нее нефизические переменные, т.е.  $\prod_a dy_a d^N x = \prod_a dy_a d\Omega_N r^{N-1} dr \rightarrow r^{N-1} dr$ , где  $d\Omega_N$  – элемент телесного угла в  $\mathbb{R}^N$ . Именно это было сделано в (2.28).

Решим вначале задачу о построении КИ для какого-нибудь простого случая, а затем попытаемся обобщить полученный результат. Рассмотрим систему с  $N = 3$ ,  $V = \frac{1}{2} r^2$ . Тогда уравнение (2.27) после подстановки  $\Psi = \frac{1}{r} \psi$  превращается в стандартное уравнение Шредингера для одномерного осциллятора с волновой функцией  $\psi$ . Поэтому сразу можно написать ответ

$$\psi_n = \frac{C_n}{r} H_n(r) \exp\left(-\frac{1}{2} r^2\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.29)$$

где  $H_n$  – полиномы Эрмита,  $C_n$  – нормировочные постоянные. Переход к сферической системе координат является сингулярной заменой переменных (якобиан перехода обращается в нуль в начале координат). Поэтому точка  $r = 0$  является особой, и необходимо проверить, чтобы решение (2.29) удовлетворяло исходному уравнению в декартовых координатах (2.26a) в окрестности  $r = 0$ , т.е. нужно положить  $r = |\mathbf{x}|$  в (2.29) и поставить в (2.26a) [8, с. 219]. В окрестности  $r = 0$

$\psi_{2n} \sim \text{const} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$ ,  $\psi_{2n+1} \sim \text{const}$ . Тогда, используя известное соотношение  $\Delta_{(3)} \frac{1}{\sqrt{r}} = -4\pi \delta^3(x)$ , видим, что физическими решениями системы (2.26) являются функции (2.29) с нечетным  $n = 2m + 1$ . Решения (2.29) с четным  $n = 2m$  должны быть отброшены, так как они не удовлетворяют исходному уравнению Шредингера в окрестности начала координат. Таким образом, физический спектр системы есть  $E_m = 2m + 3/2$  (в спектр одномерного осциллятора (2.29)  $E_n = n + 1/2$  нужно подставить  $n = 2m + 1$ ). Тот же результат получается при анализе в голоморфном представлении (см. Приложение А).

Ядро оператора эволюции системы

$$\langle r | \hat{U}_t^c | r' \rangle \equiv U_t^c(r, r') = \langle r | e^{-i\hat{H}_{ph}t} | r' \rangle, \quad (2.30)$$

где значок "С" указывает на конечность ФП, по определению есть (формула Фейнмана - Каца)

$$U_t^c(r, r') = \sum_E \psi_E(r) \psi_E^*(r') e^{-iEt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n+1}^2}{r r'} H_{2n+1}(r) H_{2n+1}(r') e^{-\frac{1}{2}(r^2+r'^2) - it(2n+\frac{3}{2})} \quad (2.31)$$

Суммирование ведется по всему физическому спектру системы. Вместе с тем, оператор эволюции обычного одномерного осциллятора с плоским ФП имеет ядро

$$U_t(r, r') = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n^2 H_n(r) H_n(r') e^{-\frac{1}{2}(r^2+r'^2) - it(n+\frac{1}{2})}, \quad (2.32)$$

причем  $c_n = \sqrt{2} \tilde{c}_n$ , так как при нормировке функции (2.29) интегрируются по полуоси (см. (2.28)), а волновые функции обычного осциллятора  $\tilde{c}_n H_n(r) \exp(-\frac{1}{2}r^2)$  нормированы на всю ось:  $r, r' \in \mathbb{R}$  в (2.32). Сопоставляя (2.31) и (2.32) и учитывая, что  $H_n(-r) = (-1)^n H_n(r)$ , находим

$$U_t^c(r, r') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr''}{r r''} U_t(r, r'') Q(r'', r'), \quad r, r' \geq 0, \quad (2.33)$$

$$Q(r'', r') = \delta(r'' - r') + \delta(r'' + r'). \quad (2.34)$$

Отсюда следует, что эволюция любого состояния  $\psi_{t=0}(r)$  определяется

по формуле

$$\psi_t(r) = \int_0^{\infty} dr' r'^2 U_t^c(r, r') \psi_{t=0}(r') = \int_{-\infty}^{\infty} dr' \frac{r'}{r} U_t(r, r') \Psi_0(r'), \quad (2.35)$$

где

$$\Psi_0(r') = \int_0^{\infty} dr'' Q(r', r'') \psi_{t=0}(r''), \quad (2.36)$$

т.е. оператор  $\hat{Q}$  доопределяет волновую функцию в нефизической области  $r < 0$  согласно (2.36). С другой стороны, оператор  $\hat{Q}$  симметризует ядро оператора эволюции для аналогичной системы с плоским ФП по группе  $\Sigma_2$  с некоторой мерой, при этом получается ядро оператора эволюции с ФП =  $\text{con}(\pi)$ . Формулы (2.33), (2.35) по существу решают поставленную задачу, поскольку для ядра (2.32) справедливо стандартное представление гамильтоновым КИ (1.7)

$$U_t(r, r') = \int_{r=0}^r \prod_{\tau=0}^t \frac{dp(\tau) dz(\tau)}{2\pi} \exp\left\{i \int_0^t d\tau \left[ p\dot{r} - \frac{1}{2}(p^2 + r^2) \right]\right\}, \quad (2.37)$$

где  $r(0) = r'$ ,  $r(t) = r$  - стандартные начальные условия в КИ [9].

Формула (2.33) имеет простую интерпретацию. Существо дела заключается в том, что, достигнув точки  $r = 0$ , частица движется в обратном направлении. Это напоминает движение по полуоси, ограниченное непроницаемым барьером в нуле, когда наряду с прямой траекторией, соединяющей точки  $r, r'$ , вклад в амплитуду перехода дает траектория, отраженная от "стенки" [16-18]. Разница, однако, в том, что в последнем случае имеет место нулевое граничное условие  $\psi|_{r=0} = 0$ , вследствие чего вклад отраженной траектории берется с обратным знаком, и продолжающий оператор  $Q(r, r') = \delta(r-r') - \delta(r+r')$  антисимметричен по  $r, r'$  [18]. В рассматриваемой же задаче нет никакой "стенки" в нуле, но существование остаточной калибровочной группы  $\Sigma_2$  эффективно вводит граничное условие вида  $\partial\psi/\partial r|_{r=0} = 0$ , которое ведет к симметричному по обоим аргументам оператору  $\hat{Q}$  (2.34). (Это легко проверить на примере свободного одномерного движения, где волновые функции подчиняются условию  $d\psi/dx|_{x=0} = 0$ . Оператор эволюции для этой системы будет иметь вид (2.33), но симметризация будет проводиться без меры, а  $U_t$  в данном случае будет оператором эволюции для свободной частицы на оси без граничного условия в нуле).

Можно сказать иначе: квантование системы с ФП =  $\text{con}(\pi)$  эквивалентно заданию всех амплитуд для соответствующей системы с ФП =  $\mathbb{R}^2$ , а физические наблюдаемые величины должны подчиняться дополнительному условию локальной  $\Sigma_2$ -инвариантности. В этом случае точки  $r'$  и  $-r'$  отвечают одному и тому же физическому состоянию, поэтому переход из



$\tau'$  в  $\tau$  и из  $-\tau'$  в  $\tau$  есть один и тот же процесс, и согласно принципу суперпозиции полная амплитуда этого процесса есть сумма амплитуд перехода из  $-\tau'$  в  $\tau$  и из  $\tau'$  в  $\tau$ .

Остается рассмотреть случай произвольного потенциала. Из предыдущего ясно, что справедливость представлений (2.33)-(2.35) самоочевидна, если инфинитезимальный оператор эволюции переводит четную функцию в четную. Это выполняется при условии  $U_\varepsilon(-\tau, \tau') = U_\varepsilon(\tau, -\tau') + O(\varepsilon^2)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т.е. если потенциал - четная функция  $\tau$ . В теориях с калибровочной симметрией это требование выполняется, и результат (2.33) справедлив для произвольного потенциала.

Случай  $N \neq 3$  характеризуется только наличием эффективной квантовой добавки к потенциалу, которая, как было только что выяснено, не влияет на вид  $Q$ . Поэтому в случае группы  $SO(N)$  ядро физического оператора эволюции имеет вид

$$U_t^c(\tau, \tau') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau''}{(\tau \tau'')^{N-1}} U_t^{(N)}(\tau, \tau'') Q(\tau'', \tau'), \quad (2.3)$$

где  $U_t^{(N)}$  отличается от (2.37) только эффективной добавкой к потенциалу  $(N-1)(N-3)/8\tau^2$ . Изменение меры интегрирования, очевидно, связано с изменением меры в скалярном произведении (2.28)  $\tau^2 d\tau \rightarrow \tau^{N-1} d\tau$ . Отметим, что окончательная формула (2.38), хотя и описывает одномерное движение, зависит от размерности калибровочной группы, т.е. от числа нефизических переменных. Наличие меры и эффективного потенциала в (2.38) отражает криволинейный характер физических переменных. Формула (2.38) также может быть получена другим способом без рассмотрения конкретной квантовомеханической задачи - путем аналитического продолжения физических векторов состояний [15]. В Приложении А дан вывод КИ (2.38) в голоморфном представлении, где не требуется явного выделения физической степени свободы каким-либо образом, а ядро оператора эволюции явно калибровочно-инвариантно.

## 2.5. Функции Грина в квантовой механике

Проиллюстрируем утверждение, что квантование системы с  $\Phi\Pi = \text{con}(\pi)$  эквивалентно заданию всех амплитуд для соответствующей системы с  $\Phi\Pi = \mathbb{R}^2$  с требованием  $\sum_2$  локальной инвариантности всех физических величин. Естественно, что в качестве "эталонной", правильной квантовой теории, с которой проводится сравнение, следует взять калибровочно-инвариантную формулировку (см. Приложение А). В качестве амплитуд возьмем "причинные" функции Грина в квантовой механике. Для обычного одномерного движения, описываемого координатой  $x(t)$ ,

они определяются подобно причинным функциям Грина в квантовой теории поля [19]

$$D^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \langle T \hat{x}(t_1) \dots \hat{x}(t_n) \rangle_0, \quad (2.39)$$

где  $T$  - знак упорядочения во времени операторов  $\hat{x}(t) = \exp(i\hat{H}t) \hat{x}(0) \exp(-i\hat{H}t)$ ,  $\hat{x}(0) \equiv \hat{x}$ . Простейшей функцией Грина (2.39) является "пропагатор"  $D^{(2)}(t_1, t_2) = D(t_1 - t_2)$ . Однако в квантовой механике нет понятия пропагатора в том виде, в котором оно есть в теории поля, поскольку в ней отсутствуют отрицательные энергии, соответствующие античастицам. Тем не менее, мы будем использовать этот термин, чтобы подчеркнуть аналогию с теорией поля.

Функция Грина  $D(t_1 - t_2)$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d^2}{dt^2} D(t) - D(t) = i\delta(t), \quad (2.40)$$

если, продолжая аналогию с теорией поля, считать  $H = H_0 + V_{\text{int}}$ , где  $H_0$  - осцилляторный гамильтониан (с единичной частотой), а  $V_{\text{int}}$  - ангармоническая добавка (самодействие), и затем пренебречь  $V_{\text{int}}$ , т.е. рассмотреть свободный "пропагатор". Действительно, опуская в (3.39)  $V_{\text{int}}$ , находим

$$D(t) = \theta(t) e^{iE_0 t} \langle \hat{x} e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{x} \rangle_0 + \theta(-t) e^{-iE_0 t} \langle \hat{x} e^{i\hat{H}_0 t} \hat{x} \rangle_0. \quad (2.41)$$

Вычисление вакуумных ожиданий удобно провести, подставляя разложение единицы  $1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$  между операторами, где  $|n\rangle = (n!)^{-1/2} \hat{a}^{+n} |0\rangle$  и  $H_0 |n\rangle = (n + E_0) |n\rangle$ . Тогда получаем [19]

$$D(t) = \frac{1}{2} \theta(t) e^{-it} + \frac{1}{2} \theta(-t) e^{it}. \quad (2.42)$$

Нетрудно проверить, выполняя дифференцирование по времени  $D(t)$ , что (2.42) удовлетворяет уравнению (2.40). Для того, чтобы сделать аналогию с теорией поля более прозрачной, найдем фурье-образ  $D(t)$ :

$$D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} D(t) = \frac{i}{\omega^2 - 1 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.43)$$

Видно, что полюс "пропагатора" отвечает "одночастичному" возбуждению. Полный "пропагатор" получается суммированием ряда теории возмущений по  $V_{\text{int}}$ .

Перейдем к рассмотрению функций Грина (2.39) в модели (2.23).

Теперь у операторов  $\hat{\mathcal{X}}(t_k)$  в (2.39) нужно поставить векторный индекс  $\hat{\mathcal{X}}(t_k) \rightarrow \hat{\mathcal{X}}_{i_k}(t_k)$  и  $\mathcal{D}^{(n)} \rightarrow \mathcal{D}_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$ . Среди всех полученных таким путем функций физическими, т.е. отвечающими реальным наблюдаемым процессам, являются калибровочно-инвариантные функции Грина. Напомним, что калибровочно-инвариантную формулировку мы считаем "эталоном". Квантовая теория системы с  $\Phi\Pi = \text{con}(\pi)$  должна содержать ровно столько информации, сколько содержит "эталон". Именно это соответствие мы и будем искать ниже.

Очевидно, все калибровочно-инвариантные амплитуды исчерпываются функциями

$$\tilde{\mathcal{D}}^{(2n)}(t_1, \dots, t_n) = \langle T \hat{\mathcal{X}}^2(t_1) \dots \hat{\mathcal{X}}^2(t_n) \rangle_0, \quad \hat{\mathcal{X}}^2 = \hat{\mathcal{X}}_i \hat{\mathcal{X}}_i. \quad (2.44)$$

Для вычисления (2.44) можно воспользоваться разложением единицы в базисе (А.3). Отметим следующую особенность. Калибровочно-инвариантная функция Грина  $\tilde{\mathcal{D}}^{(2n)}$  может быть также вычислена в базисе физического подпространства (А.4). Однако единицу  $1_{ph} = \sum |n\rangle_{ph} \langle n|$  следует вставлять между калибровочно-инвариантными объектами, тогда результат будет тот же, в противном случае, т.е. при подстановке разложения единицы между двумя операторами, образующими один калибровочно-инвариантный оператор,  $\tilde{\mathcal{D}}^{(2n)}$  тождественно обращаются в нуль, так как  $\sum_n \langle 0 | \hat{\mathcal{X}}_j | n \rangle_{ph} \langle n | \hat{\mathcal{X}}_j | m \rangle_{ph} \equiv 0$ .

Система содержит одну физическую степень свободы с  $\Phi\Pi = \text{con}(\pi)$ . В качестве этой степени свободы возьмем, например,  $\mathcal{X}_1$ , т.е.  $\mathcal{X}_j = \delta_{j1} \mathcal{X}_1$  (унитарная калибровка). В квантовой теории функции Грина этой степени свободы тождественны (2.39). Нетрудно заметить, что амплитуды (2.44) и (2.39) имеют различное аналитическое поведение. Если фурье-образы (2.44) содержат полюса в точках  $\omega = 2n$ , то (2.39) имеют их при  $\omega = n$ . Потребуем теперь, чтобы физическими амплитудами в унитарной калибровке являлись только  $\tilde{\mathcal{Z}}_2$  калибровочно-инвариантные, т.е. физические функции Грина инвариантны относительно преобразования  $\hat{\mathcal{X}}(t_k) \rightarrow -\hat{\mathcal{X}}(t_k)$  для каждого момента времени  $t_k$  независимо. Очевидно, что такими функциями Грина среди (2.39) будут  $\mathcal{D}^{(2n)}$ , в которые каждый оператор  $\hat{\mathcal{X}}(t_k)$  входит по крайней мере дважды (в общем случае четное число раз). Такие амплитуды обозначим  $\mathcal{D}_{ph}^{(2n)}(t_1, \dots, t_n)$ . Тогда имеет место соотношение

$$\tilde{\mathcal{D}}^{(2n)}(t_1, \dots, t_n) = \text{const } \mathcal{D}_{ph}^{(2n)}(t_1, \dots, t_n). \quad (2.45)$$

Ввиду того, что в определении (2.39) входит хронологическое упорядочение, то взаимное расположение операторов  $\hat{\mathcal{X}}(t)$  при одинаковых време-

нах несущественна, следовательно, общий вид физической функции Грина есть

$$\mathcal{D}_{ph}^{(2n)}(t_1, \dots, t_n) = \langle T \hat{\mathcal{X}}_1^2(t_1) \dots \hat{\mathcal{X}}_1^2(t_n) \rangle_0. \quad (2.46)$$

Далее замечаем, что  $\langle 0 | \hat{\mathcal{X}}_1^2 | n \rangle \neq 0$  при четных  $n$ , поэтому в амплитуду (2.46) входят только средние вида

$$\langle 2n | \hat{\mathcal{X}}_1^2 | 2m \rangle = \text{const } \langle \vec{n} | \hat{\mathcal{X}}_j \hat{\mathcal{X}}_j | \vec{m} \rangle, \quad (2.47)$$

при равных энергиях состояний  $|2n\rangle$ ,  $|2m\rangle$  и  $|\vec{n}\rangle, |\vec{m}\rangle$  соответственно (существенно, что  $\text{const}$  не зависит от  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ ). Здесь  $|\vec{n}\rangle$  - базис (А.3). Из равенства (2.47) немедленно следует соотношение (2.45). Приведенное рассуждение справедливо для "свободной" функции Грина, когда пренебрегают взаимодействием  $V_{int}$ . Однако, ввиду калибровочной инвариантности  $V_{int} = V_{int}(\mathcal{X}^2)$  или  $V_{int} = V_{int}(\mathcal{X}_1^2)$  в унитарной калибровке, члены ряда теории возмущений по  $V_{int}$  отличаются от выражения для свободной функции Грина только наличием в  $T$ -произведении дополнительных степеней  $\hat{\mathcal{X}}_1^2$  и  $\hat{\mathcal{X}}_j \hat{\mathcal{X}}_j = \hat{\mathcal{X}}^2$  соответственно для (2.46) и (2.45), т.е. рассуждение, основанное на равенстве (2.47), остается в силе. Следовательно, (2.45) справедливо для полных функций Грина. Это и доказывает, что квантование системы с  $\Phi\Pi = \text{con}(\pi)$  эквивалентно квантованию системы с  $\Phi\Pi = \mathbb{R}^2$  с дополнительным требованием  $\tilde{\mathcal{Z}}_2$  - калибровочной инвариантности всех физических амплитуд. Требование  $\tilde{\mathcal{Z}}_2$ -инвариантности позволяет установить взаимно однозначное соответствие аналитических свойств физических амплитуд в унитарной калибровке и явно калибровочно-инвариантных амплитуд.

В основе того, что требование инвариантности квантовых амплитуд относительно дискретной калибровочной группы, редуцирующей физическое  $\Phi\Pi$ , позволяет реконструировать явно калибровочно-инвариантную амплитуду, лежит известная в теории групп теорема Шевалле [20-21]. Подробное обсуждение ее использования в калибровочных теориях будет сделано в конце § 3.3.

## 2.6. Грассмановы переменные и калибровочная симметрия

Ферми-системы в физике описываются антикоммутирующими или грассмановыми переменными. Поэтому представляет интерес вопрос о влиянии калибровочной симметрии на структуру  $\Phi\Pi$  фермионных степеней свободы. С этой целью рассмотрим модель, задаваемую лагранжианом

$$L = -\frac{i}{2} (\psi^+ D_t \psi - (D_t \psi)^+ \psi) - V(\psi^+ \psi), \quad (2.48)$$

где  $D_t = \partial_t + iq\gamma$ ,  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  - двухкомпонентный комплексный спинор и  $y$  составляют динамические переменные в теории;  $V$  - потенциал,  $q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  - оператор электрического заряда, т.е. верхняя компонента спинора  $\psi_1$  имеет заряд  $+1$ , а нижняя  $\psi_2$  -  $-1$ . Эрмитово сопряжение определено следующим образом:  $(\psi^+ \psi)^+ = \psi^+ \psi$  и  $\psi^+ \psi = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2$  для любых двух спиноров  $\psi, \varphi$ . Лагранжиан (2.48) инвариантен относительно калибровочных преобразований из группы  $U(1)$

$$\psi \rightarrow \exp(-i\alpha q) \psi, \quad y \rightarrow y + \dot{\alpha}. \quad (2.49)$$

Здесь  $\alpha = \alpha(t)$  - произвольная функция времени.

Обратим внимание на следующую особенность систем с грассмановыми переменными и калибровочной группой. Спинор  $\psi$  содержит 4 вещественных грассмановых функций времени (4 степени свободы), но ни одна из этих функций не может быть обращена в нуль калибровочным преобразованием (2.49) (в отличие от бозевского случая), потому что  $\alpha(t)$  - обычная бозевская переменная, выбором которой нельзя сократить число грассмановых образующих в  $\psi$ . Спрашивается, сокращает ли калибровочная симметрия число грассмановых степеней свободы? Ниже будет показано, что данная система имеет только одну физическую степень свободы, причем две степени свободы устраняются связями второго рода, всегда сопутствующими фермионным степеням свободы, и еще одна степень свободы является нефизической вследствие калибровочной симметрии (2.49). Более того, у единственной физической степени свободы  $\Phi = \cos(\pi)$ , т.е. имеется полная аналогия с бозевским случаем.

Перейдем к гамильтонову формализму. Канонические импульсы суть

$$\pi_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2} \psi^+, \quad \pi_{\psi^+} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^+} = \frac{i}{2} \psi. \quad (2.50)$$

Здесь и ниже производные по грассмановым переменным понимаются как левые. Ввиду линейности лагранжиана (2.48) по скоростям  $\dot{\psi}^+$  и  $\dot{\psi}$ , равенства (2.50) дают связи второго рода [10]  $G_1^\alpha = \pi_\psi^\alpha - \frac{i}{2} \psi_\alpha^+ = 0$ ,  $G_2^\alpha = \pi_{\psi^+}^\alpha - \frac{i}{2} \psi_\alpha = 0$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ , так как их скобка Пуассона есть число  $\{G_1^\alpha, G_2^\beta\} = -i\delta_{\alpha\beta}$ . Скобки Пуассона в случае грассмановых переменных определяются следующим образом [21]:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \psi} \frac{\partial B}{\partial \pi_\psi} + \frac{\partial A}{\partial \pi_\psi} \frac{\partial B}{\partial \psi} + \frac{\partial A}{\partial \psi^+} \frac{\partial B}{\partial \pi_{\psi^+}} + \frac{\partial A}{\partial \pi_{\psi^+}} \frac{\partial B}{\partial \psi^+}. \quad (2.51)$$

Скобка (2.51) обладает свойством:

$$\{A, B\} = (-1)^P \{B, A\}, \quad (2.52)$$

если  $A$  и  $B$  - четные функции грассмановых канонических переменных, то  $P = 1$ , если хотя бы одна из функций  $A$  и  $B$  - нечетная, то  $P = 0$ . Очевидно, что (2.52) вытекает из антикоммутивности производных по грассмановым переменным. Импульсы (2.50) канонически сопряжены соответствующим координатам относительно скобки (2.51).

При наличии в теории связей второго рода необходимо перейти от скобки Пуассона к скобке Дирака [10], чтобы избавиться от нефизических переменных. Скобка Дирака строится так, чтобы она обращалась в нуль для любых двух величин, одна из которых есть связь второго рода. Можно убедиться, что скобка

$$\{, \}_D = \{, \} - i \{, G_1^\alpha\} \{G_2^\alpha, \} - i \{, G_2^\alpha\} \{G_1^\alpha, \} \quad (2.53)$$

этому требованию удовлетворяет.

Найдем скобку Дирака для переменных  $\psi$  и  $\psi^+$

$$\{\psi_\alpha, \psi_\beta^+\} = \{\psi_\beta^+, \psi_\alpha\} = -i\delta_{\alpha\beta}. \quad (2.54)$$

Поэтому  $\psi_\alpha$  и  $\psi_\beta^+$  удобно выбрать в качестве новых канонических переменных, а импульсы  $\pi_\psi, \pi_{\psi^+}$  исключаются из теории с помощью связей (2.50). Таким образом, связи второго рода в теории сократили полное число степеней свободы на 2, поскольку  $\psi_\alpha^+$  уже не каноническая координата, а канонический импульс. Отметим, что скобка Дирака (2.53) также обладает свойством (2.52).

Помимо связей второго рода в теории имеется связь первого рода  $\pi_y = \partial L / \partial \dot{y} = 0$ . Гамильтониан системы имеет вид

$$H = V(\psi^+ \psi) - y \psi^+ q \psi. \quad (2.55)$$

Из условия неприворочивости динамики находим вторичную связь первого рода  $\dot{\pi}_y = \{ \pi_y, H \} = \psi^+ q \psi = 0$ .

Чтобы разобраться с вопросом о влиянии калибровочной симметрии на динамику грассмановых переменных, решим классические уравнения движения вместе со связями

$$\dot{\psi}_\alpha = \{ \psi_\alpha, H \}_D = i y q_{\alpha\beta} \psi_\beta - i \psi_\alpha V'(\psi^+ \psi). \quad (2.56)$$

После подстановки

$$\psi(t) = \exp \left[ i q \int_0^t d\tau y(\tau) \right] \tilde{\psi}(t)$$

уравнение (2.56) примет вид

$$\dot{\tilde{\psi}}_\alpha = -i \tilde{\psi}_\alpha V'(\psi^+ \psi). \quad (2.57)$$

Теперь воспользуемся уравнением связи  $\psi^+ q \psi = 0$ , следовательно,  $\tilde{\psi}_1^+ \tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2^+ \tilde{\psi}_2$ , так как  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$  отличаются фазовым множителем. Подставляя это соотношение в (2.57), видим, что эволюция  $\tilde{\psi}_2$  во времени полностью определяется эволюцией  $\tilde{\psi}_1$ .

$$\dot{\tilde{\psi}}_1 = -i \tilde{\psi}_1 V'(2\tilde{\psi}_1^+ \tilde{\psi}_1), \quad \dot{\tilde{\psi}}_2 = -i \tilde{\psi}_2 V'(2\tilde{\psi}_1^+ \tilde{\psi}_1). \quad (2.58)$$

Более того, ввиду грассмановости переменных  $\tilde{\psi}_1$  можем написать  $V'(2\tilde{\psi}_1^+ \tilde{\psi}_1) = \omega + 2\Omega \tilde{\psi}_1^+ \tilde{\psi}_1$  ( $\omega, \Omega$  - константы), тогда нетрудно увидеть, что второе слагаемое не дает вклада в уравнения движения, так как  $\tilde{\psi}_1^2 = 0$  (аналогично  $\tilde{\psi}_2^2 = 0$ ). Поэтому без ограничения общности потенциал в теории можно считать осцилляторным  $V = \omega \psi^+ \psi$ . Тогда решение (2.56) имеет вид

$$\psi(t) = \exp \left[ -i\omega t + i q \int_0^t d\tau y(\tau) \right] \psi(0). \quad (2.59)$$

Кроме того, с помощью уравнения связи  $\psi_1^+ \psi_1 = \psi_2^+ \psi_2$  можно выразить образующие  $\psi_2(t)$  через  $\psi_1(t)$  и  $\psi_1^+(t)$ . Действительно, имеет

место равенство  $\psi_2(t) = \lambda_1(t) \psi_1(t) + \lambda_2(t) \psi_1^+(t)$ , где комплексные функции  $\lambda_{1,2}(t)$  удовлетворяют условию  $|\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2 = 1$ . В момент времени  $t=0$  всегда можно считать  $\lambda_2(t=0) = 0$ , поскольку модуль  $|\lambda_1(0)|$  можно включить в начальное значение  $\psi_1(0)$  или, что то же самое, в  $\psi_2(0)$ . Но тогда из (2.59) следует, что  $\lambda_2(t) = 0$ ,  $\lambda_1(t) = \exp(-2i \int_0^t d\tau y(\tau))$  и  $\psi_2(0) = \psi_1(0)$ . Таким образом, весь произвол в начальных условиях для  $\psi_2$  исчезает, и эволюция  $\psi_2(t)$  однозначно определяется  $\psi_1$ , например, в калибровке  $y=0$   $\psi_2(t) = \psi_1(t)$ . В отличие от бозевского случая здесь нельзя выбором функции  $y(\tau)$  (выбором калибровки) обратить в нуль одну из координат, так как  $\psi_\alpha$  грассмановы, но, тем не менее, калибровочная симметрия сокращает число физических степеней свободы и в случае ферми-систем.

Обратимся теперь к вопросу о структуре  $\Phi\Gamma$  единственной степени свободы в данной теории. Исходя из структуры решений (2.59), спинор  $\psi(t)$  можно представить в виде  $\psi_\alpha(t) = Z_\alpha(t) (\theta_1^\alpha + i \theta_2^\alpha)$  (нет суммирования по  $\alpha$ ), где  $\theta_{1,2}^\alpha$  - образующие грассмановой алгебры,  $Z_\alpha(t)$  - комплексные функции времени. Определим  $\Phi\Gamma(\psi_\alpha, \psi_\alpha^+)$  как совокупность точек плоскости  $(\text{Re } Z_\alpha(t), \text{Im } Z_\alpha(t))$ . Данное определение аналогично бозевскому случаю, так как плоскость  $(x, p)$  можно рассматривать как плоскость  $(\text{Re } a, \text{Im } a)$ , где  $a = (x + ip)/\sqrt{2}$ ,  $\{a, a^*\} = -i$  (ср. с (2.54)).

Выбором калибровки (выбором  $y(\tau)$ ) всегда можно добиться равенства  $\psi_1(t) = \psi_2(t)$  (следствие (2.49) и (2.59)) и, не нарушая его, можно изменять знак у физической компоненты  $\psi_1 \rightarrow -\psi_1$  локально во времени с помощью остаточных калибровочных преобразований (2.II) из группы  $\Sigma_2$ . Следовательно, центрально-симметричные точки на фазовой плоскости  $(\text{Re } Z_1(t), \text{Im } Z_1(t))$  калибровочно-эквивалентны, т.е.  $\Phi\Gamma(\psi_1^+, \psi_1) = \text{con}(\pi)$ . Отметим, что при преобразованиях  $\psi_1(t) \rightarrow -\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t) \rightarrow -\psi_2(t)$ , но равенство  $\psi_1 = \psi_2$ , очевидно, не нарушается. Следствием коничности  $\Phi\Gamma(\psi_1, \psi_1^+)$ , как и в бозевском случае, является удвоение частоты физических колебаний. Отметим, что в случае грассмановых переменных имеется калибровка, в которой остаточная группа  $\Sigma_2$  отсутствует, но, тем не менее, физическая частота колебаний по-прежнему равна  $2\omega$ . Действительно, калибровочным преобразованием (2.49) можно добиться равенства  $y(\tau) = -\omega$ . Тогда  $\psi_2(t) = \psi_1(0)$  и  $\psi_1(t) = \exp(-2i\omega t) \psi_1(0)$  согласно (2.59). Теперь нельзя совершать преобразования (2.II), так как они нарушают равенство  $\psi_2(t) = \psi_1(0)$ , ввиду их локальности по времени. Однако  $\psi_1(t)$  осциллирует с частотой  $2\omega$ . Можно сказать, что конус  $\Phi\Gamma(\psi_1, \psi_1^+)$  в этом

случае параметризуется точками плоскости, перпендикулярной оси симметрии этого конуса.

## 2.7. Квантовое описание грассмановых степеней свободы с

$$\Phi \Pi = \text{con}(\mathcal{H})$$

Квантовая теория модели (2.48) получается переходом к операторам  $\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\alpha^+$  с антикоммутационным соотношением

$$[\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta^+]_+ = i \{ \psi_\alpha, \psi_\beta^+ \}_D = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.60)$$

Связи первого рода выделяют физические состояния

$$\hat{\mathcal{H}}_y | \psi_{ph} \rangle = 0, \quad \hat{\psi}^+ \psi | \psi_{ph} \rangle = 0. \quad (2.61)$$

Алгебра (2.60) может быть реализована на функциях двух комплексных грассмановых переменных  $\langle \theta^* | \psi \rangle \equiv \psi(\theta^*) = \psi_0 + \psi_\alpha \theta_\alpha^* + \psi_{12} \theta_1^* \theta_2^*$ :

$$\hat{\psi}_\alpha^+ \psi(\theta^*) = \theta_\alpha^* \psi(\theta^*); \quad \hat{\psi}_\alpha \psi(\theta^*) = \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^*} \psi(\theta^*). \quad (2.62a)$$

Скалярное произведение определяется следующим образом.

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d\theta^* d\theta e^{-\theta_\alpha^* \theta_\alpha} [\phi(\theta^*)]^* \psi(\theta^*), \quad (2.62b)$$

где  $d\theta^* d\theta = d\theta_1^* d\theta_1 d\theta_2^* d\theta_2$ . Используя правила интегрирования по грассмановым переменным [II, 22], найдем  $\langle \phi | \psi \rangle = \phi_0^* \psi_0 + \phi_\alpha^* \psi_\alpha + \phi_{12}^* \psi_{12}$ . Соотношения (2.62) определяют голоморфное представление для грассмановых степеней свободы [II, 23].

В этом представлении второе уравнение (2.61) легко решается. Поскольку  $\hat{\psi} \psi \hat{\psi}^+ = \theta_1^* \frac{\partial}{\partial \theta_1^*} - \theta_2^* \frac{\partial}{\partial \theta_2^*}$ , то имеем

$$\langle \theta^* | \psi_{ph} \rangle = \psi_0 + \psi_{12} \theta_1^* \theta_2^*. \quad (2.63)$$

После квантования появляется проблема упорядочения в гамильтониане системы. Из соображений эрмитовости гамильтониана оператор  $\hat{\psi}^+ \hat{\psi}$  в (2.55) следует заменить на  $\frac{1}{2}(\hat{\psi}^+ \hat{\psi} - \hat{\psi} \hat{\psi}^+) = \hat{\psi}^+ \hat{\psi} - 1$  в соответствии с определением (2.62a). Тогда уравнение Шредингера записывается в виде

$$V(\hat{\psi}^+ \psi - 1) \langle \theta^* | E \rangle = \left[ \omega(\hat{\psi}^+ \hat{\psi} - 1) + \frac{\Omega}{2} (\hat{\psi}^+ \hat{\psi} - 1)^2 \right] \langle \theta^* | E \rangle = E \langle \theta^* | E \rangle. \quad (2.64)$$

Нетрудно проверить, что решениями уравнения (2.64) являются:  $\langle \theta^* | E_0 \rangle = 1$ ,  $E_0 = -\omega + \frac{\Omega}{2}$ ;  $\langle \theta^* | E_1 \rangle_\alpha = \theta_\alpha^*$  ( $\alpha=1,2$ ),  $E_1=0$ , т.е. однофермионное состояние двукратно вырождено, и  $\langle \theta^* | E_2 \rangle = \theta_1^* \theta_2^*$ ,  $E_2 = \omega + \frac{\Omega}{2}$ . Все состояния ортонормированы относительно скалярного произведения (2.62b). Из (2.63) следует, что базис в физическом подпространстве образуют векторы  $\langle \theta^* | E_{0,2} \rangle$ . Отметим также, что разность между двумя физическими уровнями системы  $\Delta E_{ph} = E_2 - E_0 = 2\omega$  равна удвоенной частоте ферми-осциллятора в полном соответствии с тем, что  $\Phi \Pi$  единственной физической степени свободы есть  $\text{con}(\mathcal{H})$ .

Построим оператор эволюции. По формуле Фейнмана - Каца можем написать для ядра физического оператора эволюции

$$U_t^c(\theta^*, \theta) = \sum_{E=E_{0,2}} e^{-iEt} \langle \theta^* | E \rangle \langle \theta | E \rangle^* = e^{-iE_0 t} + \theta_1^* \theta_2^* \theta_1 \theta_2 e^{-iE_2 t}. \quad (2.65)$$

Аналогично находим ядро оператора эволюции  $\hat{U}_t$  в полном гильбертовом пространстве состояний, базис в котором образуют решения уравнения (2.64),

$$U_t(\theta^*, \theta) = e^{-iE_0 t} + \theta_2^* \theta_\alpha e^{-iE_1 t} + \theta_1^* \theta_2^* \theta_1 \theta_2 e^{-iE_2 t}. \quad (2.66)$$

Дополнительное (второе) слагаемое в правой части (2.66) по сравнению с (2.65) появилось от вклада нефизических состояний  $\langle \theta^* | E_1 \rangle_\alpha$  в спектральную сумму в формуле Фейнмана - Каца. Установим связь между (2.65) и (2.66). Можно убедиться прямым вычислением в справедливости следующего равенства:

$$U_t^c(\theta^*, \theta) = \int d\tilde{\theta}^* d\tilde{\theta} e^{-\tilde{\theta}_\alpha^* \tilde{\theta}_\alpha} U_t(\theta^*, \tilde{\theta}) Q(\tilde{\theta}^*, \theta), \quad (2.67)$$

где оператор  $\hat{Q}$  симметризует по группе  $\Sigma_2$ , подобно аналогичному выражению для бозевских переменных (2.33) и (2.34)

$$Q(\theta^*, \theta) = \frac{1}{2} (\exp(-\theta_\alpha^* \theta_\alpha) + \exp(\theta_\alpha^* \theta_\alpha)) = \text{ch } \theta_\alpha^* \theta_\alpha. \quad (2.68)$$

Отметим, что  $\exp \theta_\alpha^* \theta_\alpha$  - есть ядро единичного оператора, т.е. "дельта - функция" в голоморфном представлении [II, 23]. Множитель  $1/2$  в (2.68), которого нет в ядре (2.34), связан с различием в нормировках физических состояний (2.63) и (2.29). Если состояния (2.29) при  $\hbar = 2m + 1$  нормировать на всей оси, а не на полуоси (см. (2.28)), тогда  $C_n = \tilde{C}_n$  в суммах (2.31) и (2.32), что ведет к появлению множителя  $1/2$  в правой части (2.34). С другой стороны, нормировка грас-



смановых векторов состояний на "полуоси" вообще не может быть определена. Таким образом, редукция физического ФП в моделях с грассмано-выми переменными также ведет к модификации КИ. Отметим, что для ядра (2.66) справедливо стандартное представление КИ [11].

$$U_t(\theta^*, \theta) = \int_{\tau=0}^t \prod [d\psi^+(\tau) d\psi(\tau)] \exp\left(\frac{i}{2} \Phi\right) \exp i \int_0^t d\tau \left[ \frac{1}{2i} (\psi_\alpha^+ \dot{\psi}_\alpha - \dot{\psi}_\alpha^+ \psi_\alpha) - V(\psi^+, \psi) \right],$$

причем  $\Phi \equiv \psi_\alpha^+(t) \psi_\alpha(t) + \psi_\alpha^+(0) \psi_\alpha(0)$  и  $\psi_\alpha^+(t) = \theta_\alpha^*$ ,  $\psi_\alpha(0) = \theta_\alpha$  - стандартные начальные условия в КИ.

### 2.8. Некоторые выводы

Перечислим кратко основные результаты, касающиеся редукции физического ФП в моделях с калибровочной группой и квантового описания степеней свободы с редуцированным ФП.

1) Редукция ФП физических переменных не зависит от способа выделения последних (инвариантный или неинвариантный).

2) Редукция физического ФП связана с остаточной дискретной калибровочной группой, которая остается после исключения всех нефизических переменных и действует в ФП физических степеней свободы, отождествляя некоторые точки в нем.

3) Структура физического ФП взаимосвязана с физическим гильбертовым пространством состояний (т.е. она влияет на спектр системы), которое выделяется связями в схеме квантования Дирака. В этом смысле учет редукции ФП эквивалентен последовательному квантовому описанию системы в рамках схемы Дирака.

4) Редукция ФП ведет к модификации гамильтонова КИ. Требуется вклад в амплитуду перехода "отраженных" траекторий.

5) Квантовая динамика системы с редуцированным ФП эквивалентна квантовой динамике соответствующей системы с плоским ФП, но с дополнительным требованием инвариантности всех физических величин относительно преобразований из дискретной калибровочной группы, редуцирующей физическое ФП данной системы.

Хотя в этой главе все эти утверждения были проверены только для моделей, где физическое ФП было  $\text{soh}(\mathcal{N})$ , а остаточная дискретная группа совпадала с  $\sum_2$ , тем не менее, в следующей главе будет показано, что 1)-5) имеют общий характер.

## 3. Модели с произвольной калибровочной группой

### 3.1. Классическая механика с произвольной калибровочной группой

Чтобы построить механическую модель с заданной калибровочной группой  $G$ , нужно задать пространство представления этой группы, в котором будет двигаться одна или несколько частиц, т.е. координаты этих частиц будут координатами в пространстве представления, причем лагранжиан такой системы следует выбрать инвариантным относительно глобальных преобразований из  $G$ . Затем необходимо "удалить" все производные по времени по известным правилам, тогда получится механика с калибровочной группой  $G$ . Поскольку дальнейшей нашей целью будет изучение ФП полей Янга - Миллса, которые преобразуются по присоединенному представлению, то ограничимся изучением механических моделей с произвольной калибровочной группой и присоединенным представлением для координат частицы.

Основная цель, которую мы будем преследовать в этом параграфе, заключается в том, чтобы вскрыть общие причины редукции физического ФП в моделях с калибровочной группой, т.е. по-существу, проверить утверждения 1) и 2) в § 2.8.

Рассмотрим систему с лагранжианом [24, 25]

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr} (D_t x)^2 - V(x), \quad (3.1)$$

где  $D_t x = \dot{x} + [y, x]$  - ковариантная производная ( $\dot{x} \equiv \partial_t x$ ),  $x, y$  - динамические переменные, элементы алгебры Ли  $\mathcal{X}$  калибровочной, полупростой, компактной группы  $G$  в ортогональном базисе:  $x = \lambda_i x_i, y = y_i \lambda_i, \text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = \delta_{ij}, [\lambda_i, \lambda_j] = f_{ijk} \lambda_k, i, j, k = 1, 2, \dots, N = \dim G, f_{ijk}$  - структурные константы;  $V$  - потенциал. Лагранжиан (3.1) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$x \rightarrow \Omega x \Omega^{-1}, y \rightarrow \Omega y \Omega^{-1} + \Omega \partial_t \Omega^{-1}, \quad (3.2)$$

где  $\Omega = \Omega(t) \in G$ , если  $V(\Omega x \Omega^{-1}) = V(x)$ . Фактически это теория Янга - Миллса в пространстве времени  $(0 + 1)$  с потенциалами  $A_\mu^i \equiv A_\mu^i(t)$ , где  $y^i = A_0^i(t)$ , а  $x_i = x_i(t)$  играет роль "материи";  $x$  преобразуется по присоединенному представлению. Переходя к гамильтонову формализму  $p = \partial L / \partial \dot{x} = D_t x, \mathcal{H} = \partial L / \partial y = 0$ , находим гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \text{Tr} p^2 + V(x) - \text{Tr} (y [x, p]). \quad (3.3)$$

Ясно, что система содержит  $N$  первичных связей  $[10] \mathcal{J} = 0$  и  $N$  вторичных связей  $\mathcal{J} = \{ \mathcal{J}, \mathcal{H} \} = \{ \mathcal{X}, \mathcal{P} \} \equiv \mathcal{G} = 0$ . Все связи являются связями первого рода  $[10]: \{ G_j, G_i \} = f_{ijk} G_k$ , но не все они независимы. Используем следующий метод для выделения физических переменных. Любой элемент  $\mathcal{X} \in \mathcal{X}$  может быть представлен в виде  $[20, \text{с. 459}]$

$$\mathcal{X} = S h S^{-1}, \quad S = \exp z, \quad h \in \mathcal{H}, \quad (3.4)$$

где  $z \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$  - элемент ортогонального дополнения к подалгебре Картана  $\mathcal{H}$ . Из (3.2) следует, что  $z$  - нефизические переменные (преобразования с  $z \in \mathcal{H}$  не меняют  $h$ ). Поэтому физические переменные в теории есть  $h = \lambda_\alpha h_\alpha \in \mathcal{H}$ , где  $[\lambda_\alpha, \lambda_\beta] = 0$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, \ell = \dim \mathcal{H} = \text{rank } \mathcal{G}$ . Таким образом, среди  $N$  вторичных связей  $G_j = 0$  только  $N - \ell$  являются независимыми.

Ввиду связей  $[\mathcal{P}, \mathcal{X}] = 0$  матрицы  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{P}$  могут быть диагонализированы одновременно. Отсюда заключаем, что импульс  $P_h$ , канонически сопряженный  $h$  в (3.4), также принадлежит подалгебре Картана. Перейдем теперь к изучению структуры  $\Phi \Pi (h, P_h)$ . Известно, что в подалгебре Картана действует группа Вейля  $W$   $[20, \text{с. 469}]$ , которая образована всевозможными отражениями относительно гиперплоскостей, ортогональных простым корням  $\omega$   $[20]$  (см. также Приложение Б). Эта дискретная группа, с другой стороны, является подгруппой калибровочной группы  $G$ , подобно группе  $Z_2$  в моделях предыдущей главы. По определению импульс  $p$  преобразуется при калибровочных преобразованиях так же, как и  $\mathcal{X}$ , поэтому  $h$  и  $P_h$  одновременно преобразуются под действием  $W$ . Следовательно,  $W$  отождествляет некоторые точки в фазовой плоскости  $\mathbb{R}_h^\ell \otimes \mathbb{R}_{P_h}^\ell$ . Подчеркнем, что группа  $W$  действует локально во времени, т.е. преобразования из  $W$  можно совершать в различные моменты времени независимо друг от друга, поскольку  $W$  - подгруппа калибровочной группы  $G$ .

Любой элемент  $h \in \mathcal{H} \sim \mathbb{R}^\ell$  ( $\sim$  - знак изоморфизма) может быть получен из соответствующего элемента, принадлежащего подмножеству в  $\mathcal{H}$ , которое называется камерой Вейля  $K^+$   $[20]$ . Камера Вейля определяется как подмножество элементов  $\mathcal{H}$ , лежащих внутри многогранного угла, образованного гиперплоскостями, которые ортогональны простым корням  $\omega$  алгебры  $\mathcal{X}$ , и направленного в положительный гиперквадрант. Другими словами, для всякого  $h \in K^+$  справедливо  $\tau_z \omega h > 0$  (условие  $\tau_z h \omega = 0$  определяет границу  $\partial K^+$ ) для любого простого корня  $\omega$   $[20]$ . Следовательно, физические значения  $h$  лежат в  $K^+$ , а все точки в  $\mathbb{R}_h^\ell \otimes \mathbb{R}_{P_h}^\ell$   $whw^{-1} \equiv \hat{w}h$ ,  $wP_hw^{-1} \equiv \hat{w}P_h$ ,  $w \in W$ ,  $h \in K^+$  являются физически эквивалентными. Для однозначного задания состояния системы в  $\Phi \Pi (h, P_h)$  эти точки долж-

ны быть отождествлены (склеены). Мы приходим к заключению, что физическое  $\Phi \Pi (h, P_h)$  есть гиперконус, эквивалентный  $K^+ \otimes \mathbb{R}^\ell$ .

В качестве примера разберем группы  $SU(2) \sim SO(3)$  и  $SU(3)$ . Подалгебра Картана для  $SU(2)$  натянута на единственный элемент - диагональную матрицу Паули  $\tau_3$ , поэтому  $W = Z_2$ , следовательно,  $\Phi \Pi (x_3, p_3) = \text{con}(\mathcal{J})$  в полном соответствии с результатом § 2.4 (модель (2.23) с  $N = 3$ ). В случае группы  $SU(3)$   $\ell = 2$ , и подалгебра Картана натягивается на две диагональные матрицы Гелл-Манна  $\lambda_3, \lambda_8$ . Простые корни  $SU(3)$  имеют одинаковую норму и расположены под углом  $2\pi/3$  друг к другу (см. Приложение Б). Следовательно, камера Вейля есть сектор с углом раствора  $\pi/3$  (см. рис. 2), а группа Вейля состоит из шести элементов, образованных различными комбинациями отражений простых корней  $\hat{w}_1 \omega_1 = -\omega_1$  и  $\hat{w}_2 \omega_2 = -\omega_2$ . Отметим следующую особенность динамики системы с  $\Phi \Pi = K^+ \otimes \mathcal{H}$ . Если в качестве  $V$  взять осцилляторный потенциал  $\frac{1}{2} \tau_z x^2 = \frac{1}{2} \tau_z h^2$ , то, казалось бы, физическим степеням свободы отвечают два независимых осциллятора с единичной частотой. Однако физические значения  $h \in K^+$ , поэтому, достигнув границы  $\partial K^+$ , частица отражается от нее, что неизбежно ведет к перераспределению импульса между степенями свободы  $h_\alpha$ , поэтому независимые колебания невозможны. Возникает своеобразное кинематическое сцепление осцилляторов вследствие редукции  $\Phi \Pi (h, P_h)$ . Понятно, что рассуждение справедливо и в случае движения в произвольном потенциале.

В случае одной физической степени свободы конечность ее  $\Phi \Pi$  приводила к удвоению частоты колебаний осциллятора. Покажем, что редукция физического  $\Phi \Pi$  в рассматриваемой модели также ведет к изменению физических частот колебаний осциллятора. В качестве примера возьмем группы ранга 2, т.е.  $SU(3)$ ,  $S_p(4) \sim SO(5)$ ,  $G_2$  (см. Приложение Б). С целью выделить физические степени свободы введем калибровочно-инвариантные переменные

$$\Phi_1 = (\tau_z x^2)^{1/2}, \quad \Phi_2 = \Phi_1^{-2} \tau_z x^2. \quad (3.5)$$

Здесь  $\tau$  - степень второго независимого оператора Казимира (см. Приложение Б, таблицу I)

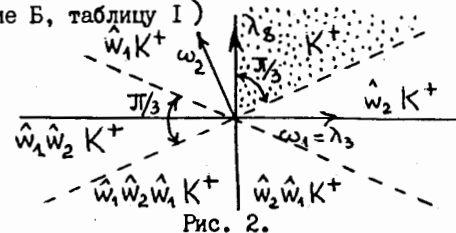


Рис. 2.

$$\begin{aligned} \tau_z \omega_1^2 &= \tau_z \omega_2^2 = 1 \\ \tau_z \omega_1 \omega_2 &= -1/2 \\ \tau_z \lambda_3 \lambda_8 &= 0 \\ \tau_z \lambda_3^2 &= \tau_z \lambda_8^2 = 1 \end{aligned}$$

Определим два элемента алгебры Ли  $e_{1,2}$ , которые ортогональны друг другу:  $T_\tau e_1 e_2 = 0$ ,  $e_1 = \partial\Phi_1/\partial x = x/\Phi_1$ ,  $e_2 = \partial\Phi_2/\partial x = \tau(\Phi_1^{-\tau} \lambda_j \tau \lambda_j x^{\tau-1} - \Phi_1^{-2} \Phi_2 x)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Главное свойство  $e_{1,2}$  заключается в том, что они могут быть одновременно диагонализированы, так как  $[e_1, e_2] = 0$ . Поэтому элементы  $e_1, e_2$  можно взять в качестве локального базиса в  $\mathcal{H}$ . Вычислим норму  $e_{1,2}$  или коэффициенты Ламэ. Очевидно, что  $T_\tau e_1^2 = 1$ ,  $T_\tau e_2^2 = \tau^2 \Phi_1^{-2} (C_2 + C_1 \Phi_2 - \Phi_2^2) = \tau^2 \Phi_1^{-2} (\alpha - (\Phi_2 - \beta)^2)$ , где

$\beta_1 = C_1/2$ ,  $\alpha = C_2 + C_1^2/4$ , а постоянные  $C_{1,2}$  зависят от структурных констант и определяют разложение по образующим  $T_\tau x^{\tau/2}$  в алгебре полиномов на  $X$  полинома  $T_\tau \lambda_j x^{\tau-1} T_\tau \lambda_j x^{\tau-1} = (C_1 \Phi_2 + C_2) \Phi_1^{2(\tau-1)}$ . Например, для  $SU(3)$   $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \frac{1}{6}$  ( $\tau=3$ ). Из условия положительности нормы  $e_2$  находим  $-1 \leq (\Phi_2 - \beta)/\sqrt{\alpha} \leq 1$ .

Определим импульсы, канонически сопряженные  $\Phi_\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ) следующим образом:  $\Pi_\alpha = T_\tau e_\alpha p (T_\tau e_\alpha^2)^{-1/2}$ . Можно убедиться, что  $\{\Phi_\alpha, \Pi_\beta\} = \{\Pi_\alpha, \Pi_\beta\} = 0$  и  $\{\Phi_\alpha, \Pi_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$ . Тогда из определения  $\Pi_\alpha$  и ортогональности  $e_\alpha$  вытекает разложение  $p = \Pi_\alpha e_\alpha + \tilde{p}$ , где  $T_\tau \tilde{p} e_\alpha = 0$ . В новых переменных уравнение связи примет вид  $[p, x] = [\tilde{p}, x] = 0$ , что означает возможность одновременной диагонализации  $\tilde{p}$  и  $x = \Phi_1 e_1$ , следовательно,  $\tilde{p} = \tilde{p}_\alpha e_\alpha$ , но это невозможно, ввиду  $T_\tau \tilde{p} e_\alpha = 0$ . Поэтому  $\tilde{p} = 0$  есть решение уравнений связи.

Запишем гамильтониан в новых канонических переменных ( $V = \frac{1}{2} T_\tau x^2$  в (3.3))

$$H = \frac{1}{2} T_\tau (p^2 + x^2) = \frac{1}{2} \Pi_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\tau^2 \Pi_2^2}{\Phi_1^2} [\alpha - (\beta - \Phi_2)^2] + \frac{1}{2} \Phi_1^2. \quad (3.6)$$

Гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{\Pi}_1 = \{\Pi_1, H\} = -\Phi_1 + \frac{\tau^2 \Pi_2^2}{\Phi_1^3} [\alpha - (\beta - \Phi_2)^2], \quad \dot{\Phi}_1 = \{\Phi_1, H\} = \Pi_1; \quad (3.7a)$$

$$\dot{\Pi}_2 = \{\Pi_2, H\} = \frac{\tau^2 \Pi_2^2}{\Phi_1^2} (\Phi_2 - \beta), \quad \dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, H\} = \frac{\tau^2 \Pi_2}{\Phi_1^2} [\alpha - (\beta - \Phi_2)^2] \quad (3.7b)$$

допускают осциллирующее решение независимо для каждой степени свободы. Это  $\dot{\Phi}_2 = \Pi_2 = 0$ ,

$$\Phi_1(t) = A |\cos t|, \quad \Pi_1(t) = -A \sin t \varepsilon(\cos t), \quad (3.8a)$$

где  $A = \text{const}$ ,  $\varepsilon$  - знаковая функция; модуль в  $\Phi_1$  поставлен ввиду положительности  $\Phi_1$ . Второе решение имеет вид

$$\Pi_1 = 0, \quad \dot{\Phi}_1 = v = \text{const},$$

$$\Phi_2(t) = \beta + \sqrt{\alpha} \cos \tau t, \quad \Pi_2(t) = -\frac{v^2}{\tau \sqrt{\alpha}} \sin \tau t. \quad (3.8b)$$

Из решений (3.8) видно, что независимыми частотами колебаний являются  $2$  и  $\tau$ , т.е. степени независимых операторов Казимира. Подчеркнем, что в калибровке  $x = h$  (без учета редукции  $\Phi\Pi$ ) частоты независимых колебаний осциллятора единичные. Полученный результат находится в согласии с квантовым рассмотрением.

### 3.2. Гильбертово пространство состояний и структура $\Phi\Pi$

В квантовой теории  $x_i, p_i, y_i, \pi_i$  становятся операторами  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} = [\hat{y}_i, \hat{\pi}_j]$ . В соответствии со схемой квантования систем со связями [10] векторы физического гильбертова пространства выделяются условиями

$$\hat{\pi}_j |\Psi_{ph}\rangle = 0, \quad \hat{G}_j |\Psi_{ph}\rangle = 0. \quad (3.9)$$

Решение первого уравнения в (3.9) тривиально: в координатном представлении  $|\Psi_{ph}\rangle$  не зависят от  $y_j$ . Чтобы решить второе уравнение (3.9), перейдем к представлению вторичного квантования. Определяя операторы  $\hat{a}_j = (\hat{x}_j + i\hat{p}_j)/\sqrt{2}$ , получаем уравнение, которому подчиняются физические векторы состояний  $f_{ij} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i |\Psi_{ph}\rangle = 0$ . Очевидно, вакуум  $|0\rangle$  ( $\hat{a}_j |0\rangle \equiv 0$ ) принадлежит физическому гильбертову пространству состояний. Тогда любое физическое состояние получается применением инвариантного относительно присоединенного действия группы  $G$  полинома от оператора  $\hat{a}^\dagger = \lambda_j \hat{a}_j^\dagger$  (очевидно, что если некоторая функция  $f$  от оператора  $\hat{a}^\dagger$  обладает свойством  $f(\hat{a}^\dagger) = f(\Omega \hat{a}^\dagger \Omega^{-1})$ ,  $\Omega \in G$ , то  $[f(\hat{a}^\dagger), \hat{G}_j] = 0$ , так как  $\hat{G}_j$  - генераторы преобразований из группы  $G$ , поэтому  $f(\hat{a}^\dagger) |0\rangle_j$  - физическое состояние). Тогда согласно теореме 2 (Приложение Б) находим базис физического подпространства состояний

$$[T_\tau \hat{a}^{\dagger r_1}]^{n_1} \dots [T_\tau \hat{a}^{\dagger r_e}]^{n_e} |0\rangle, \quad (3.10)$$

где  $n_\alpha = 0, 1, \dots$ . В частности, для спектра осциллятора  $H = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + N/2$  из (3.10) следует

$$E_n = \sum_{\alpha=1}^e n_\alpha \tau_\alpha + N/2, \quad (3.11)$$

т.е. если не принимать во внимание энергию вакуума, зависящую от полного числа степеней свободы, то спектр (3.11) эквивалентен  $\ell$  осцилля-

торам с частотами  $\tau_\alpha$ . Это и наблюдалось при анализе классических уравнений движения с учетом редукции ФП физических переменных.

### 3.3. КИ для системы с ФП = $K^+ \otimes H$

Гамильтонов КИ, как было выяснено в части 2, зависит от структуры физического ФП. Не составляет исключения и рассматриваемая здесь модель. Чтобы построить КИ, решим уравнение Шредингера в координатном представлении:  $\hat{p}_j = -i \partial/\partial x_j$ . Для явного разрешения уравнения связи и записи гамильтониана в физическом подпространстве, перейдем к новым криволинейным координатам  $h_\alpha, z_\alpha$  (3.4). Тогда  $\Psi_{ph}(x) = \Psi(h)$ , т.е. в операторе Лапласа - Бельтрами в криволинейных координатах (3.4) следует оставить только слагаемые, зависящие от производных по  $h$ , чтобы получить гамильтониан в физическом подпространстве. С этой целью найдем метрический тензор в координатах (3.4). Имеем  $ds^2 \equiv \tau_\alpha dx^2 = \tau_\alpha (d(SHS^{-1}))^2$ . После несложных вычислений приходим к формуле

$$ds^2 = \tau_\alpha dh^2 + \tau_\alpha [h, S^{-1} dS]^2 \equiv \sum_\alpha dh_\alpha^2 + \sum_{a,b} \tilde{g}_{ab}(h, z) dz^a dz^b, \quad (3.12)$$

из которой следует, что тензор  $g_{ij}$  имеет блочную структуру  $(\delta_{\alpha\beta}, \tilde{g}_{ab})$ ,  $a, b = l+1, l+2, \dots, N$ . Используя представление  $S^{-1} dS = \lambda_i F_\alpha^i(z) dz^a$ , где  $F_\alpha^i$  - некоторые неизвестные матрицы, мы находим

$$\tilde{g}_{ab} = F_\alpha^c(z) g_{cd}(h) F_\beta^d(z), \quad g_{ab} = \omega_{ac}(h) \omega_{cb}(h), \quad \omega_{ab}(h) = h_\alpha f_{\alpha ab}. \quad (3.13)$$

Тогда оператор Лапласа - Бельтрами есть

$$\Delta = g^{-1/2} \partial_i g^{ij} g^{1/2} \partial_j = \mu^{-2}(h) \partial_\alpha \mu^2(h) \partial_\alpha + g^{-1/2} \partial_a \tilde{g}^{ab} g^{1/2} \partial_b, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad (3.14)$$

где  $\partial_i = (\partial_\alpha, \partial_a)$ ,  $\partial_\alpha = \partial/\partial h_\alpha$ ,  $\partial_a = \partial/\partial z_a$  и, согласно (3.13),

$$g^{1/2} = (\det \|g_{ij}\|)^{1/2} = \det \omega(h) \det F(z) \equiv \mu^2(h) \tilde{\mu}^2(z). \quad (3.15)$$

Поскольку физические состояния не зависят от  $z_\alpha$ , то физический оператор Гамильтона имеет вид

$$\hat{H}_{ph} \Psi(h) = \left( -\frac{1}{2} \sum_\alpha \mu^{-1} \partial_\alpha^2 \mu + V_q(h) + V(h) \right) \Psi = E \Psi, \quad (3.16)$$

где  $V_q = 1/2 \mu^{-1} (\partial_\alpha^2 \mu)$  - "квантовая" добавка к потенциалу (эффективный потенциал), потому что  $\mu^{-2} \partial_\alpha^2 \mu^2 = \mu^{-1} \partial_\alpha^2 \mu + 2V_q$ .

Мера  $\mu^2(h)$  может быть вычислена явно. Для этого воспользуемся в (3.13) и (3.15) записью структурных констант в базисе Картана - Вейля [26] (приложение Б (Б.5)). Очевидно, что справедливо разложение  $z = \sum_{\alpha>0} (z_\alpha^+ e_\alpha + z_\alpha^- e_\alpha^-)$ . Из определения (3.13) следует, что матрица  $\omega(h)$  есть оператор присоединенного представления  $ad_R h$  (см. (Б.6)), редуцированный на подпространство  $X \setminus H$  (последнее обозначено значком "R"), т.е. из матрицы  $(adh)_{ij}$  устранены строки и столбцы, отвечающие подалгебре Картана:  $\omega_{ab}(h) = (adh)_{ab}$ . Тогда из определения оператора  $ad x$  и (Б.5) вытекает, что в базисе Картана - Вейля матрица  $\omega(h)$  диагональна и диагональные элементы равны  $\pm(\alpha, h)$ , где  $\alpha$  пробегает все положительные корни в  $X$ . Учитывая связь базиса Картана - Вейля с ортогональным базисом (Б.7), находим, что в ортогональном базисе  $\omega(h)$  имеет блочно-диагональный вид, причем каждый блок есть антисимметричная матрица  $2 \times 2$   $(\alpha, h) \epsilon_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 1, 2$ ,  $\epsilon_{12} = 1$ ,  $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ .

Следовательно,

$$\mu^2(h) = \prod_{\alpha>0} (\alpha, h)^2. \quad (3.17)$$

Нормировка базиса для компактных групп всегда может быть выбрана так, что  $\tau_\alpha \alpha h \equiv \alpha_{ph} = (\alpha, h)$ , т.е. это обычное скалярное произведение в  $H \sim \mathbb{R}^l$ . Фактически  $\mu^2(h)$  пропорциональна объему орбиты элемента  $h$ , так как  $d^N x = \tilde{\mu}^2(z) d^{N-l} z \mu^2(h) d^l h$  и ввиду компактности группы  $G$  интегрирование по  $z$  в мере дает полный "телесный угол" орбиты элемента  $h$ . Это также означает, что физические волновые функции можно нормировать условием  $\int_{K^+} d^l h \mu^2(h) |\Psi|^2 = 1$ , т.е.  $\mu^2(h)$  есть мера в физическом конфигурационном пространстве (о "ненормированности" физических состояний по переменным  $y = \lambda_j y_j$  см. формулу (2.28) и её обсуждение).

Осталось вычислить  $V_q$ . Имеем равенство

$$V_q = \frac{1}{2} \mu^{-1} (\partial_\alpha^2 \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta > 0} \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, h)(\beta, h)}. \quad (3.18)$$

Рассмотрим плоскость в корневом пространстве, проходящую через два положительных корня. Их взаимное положение определяется четырьмя случаями (рис. 1Б). Определим сумму (3.18) для этих четырех случаев,

т.е. необходимо вычислить  $V_q$  для всех групп ранга 2  $SU(3)$ ,  $Sp(4) \sim SO(5)$ ,  $G_2$ . Путем явного вычисления убеждаемся, что  $V_q = 0$  для этих групп. Например, в случае  $SU(3)$  согласно схеме Дынкина  $\overset{1}{0} \overset{1}{0} \overset{1}{0}$  находим (см. пример в Приложении Б)

$$V_q(h) = \frac{(\omega_1, \omega_{12})}{(h, \omega_1)(h, \omega_{12})} + \frac{(\omega_1, \omega_2)}{(h, \omega_1)(h, \omega_2)} + \frac{(\omega_{12}, \omega_2)}{(h, \omega_{12})(h, \omega_2)} = 0.$$

Исходя из этого наблюдения, заключаем:

$$V_q = \frac{1}{2} \sum_{\text{по плоскостям}} \sum_{\alpha \neq \beta > 0} \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, h)(\beta, h)} = 0. \quad (3.19)$$

Перейдем к построению КИ [15, 24]. Вначале ограничимся случаем свободного движения:  $V=0$  в (3.16). Очевидно, подстановка  $\Psi = \mu^{-1}\varphi$  сводит уравнение (3.16) к соответствующему уравнению Шредингера для частицы с плоским ФП. Отсюда  $\Psi(h) \sim \mu^{-1}(h) \exp(iT_2 p h)$ , где  $E = \frac{1}{2} T_2 p^2$ ,  $p \in H$ . Однако  $\mu(h) = 0$ , если  $h \in \partial K^+$ , т.е. в точках плоскостей  $(h, \omega) = 0$ ,  $\omega$  — простые корни в  $X$ . Поэтому такие  $\Psi(h)$  оказываются сингулярными при  $h \in \partial K^+$ . Волновые функции должны быть конечными в конфигурационном пространстве [8] (см. также § 2.4). В соответствии с этим физические волновые функции должны быть конечными в  $H$ . Проверим, что функции

$$\Psi_p(h) = (2\pi)^{-\ell/2} \sum_w (\mu(p)\mu(\hat{w}h))^{-1} \exp(iT_2 p \hat{w}h) \quad (3.20)$$

удовлетворяют этому требованию. Суммирование ведется по всей группе Вейля  $W$ ,  $\hat{w}h = whw^{-1}$ ,  $\mu(wh) = \det w \mu(h) = \pm \mu(h)$  ( $\mu^2(h)$  — инвариант относительно  $W$ , поэтому  $\mu(h)$  может менять знак при преобразованиях из  $W$ ). Любой элемент  $w$  есть комбинация отражений относительно гиперплоскостей  $(h, \omega) = 0$ ; если число отражений четное, то  $\det w = 1$ , нечетное, то  $\det w = -1$ . Коэффициенты в (3.20) выбраны из соображений нормировки и симметрии между импульсным и координатным представлениями

$$\int_{K^+} d^\ell h \mu^2(h) \Psi_p^*(h) \Psi_{p'}(h) = \sum_w \delta^\ell(p - \hat{w}p') [\mu(p)\mu(\hat{w}p')]^{-1} = [\mu(p)\mu(p')]^{-1} \delta^\ell(p - p'), \quad p, p' \in K^+. \quad (3.21)$$

Аналогично, фурье-преобразование определено следующим образом:

$$\int_{K^+} d^\ell p \mu^2(p) \Psi_p^*(h) \Psi_p(h') = \sum_w \delta^\ell(h - \hat{w}h') [\mu(h)\mu(\hat{w}h')]^{-1} = [\mu(h)\mu(h')]^{-1} \delta^\ell(h - h'), \quad h, h' \in K^+. \quad (3.22)$$

В окрестности границы  $\partial K^+$  мера  $\mu(h) \sim \text{const}(h, \omega)$ , где  $\omega$  — некоторый простой корень (граница  $\partial K^+$  образована плоскостями  $(h, \omega) = 0$ ), следовательно,  $\Psi = \mu^{-1}\varphi$  будет конечной на плоскости  $(\omega, h) = 0$ , если  $\varphi(h)$  меняет знак при переходе через плоскость  $(\omega, h) = 0$ . Последнее следует из определения (3.20) и свойства меры  $\mu(\hat{w}h) = -\mu(h)$ , если  $w$  есть отражение относительно плоскости  $(\omega, h) = 0$ . Отметим, что свойство четности физических волновых функций (3.20) относительно группы Вейля  $W$   $\Psi_p(\hat{w}h) = \Psi_p(h)$  позволяет аналитически продолжить их на всю подалгебру Картана  $H$  с сохранением соотношений (3.21) и (3.22).

Для вывода КИ воспользуемся опять формулой Фейнмана — Каца:

$$U_t^c(h, h') = \int_{K^+} d^\ell p \mu^2(p) \Psi_p(h) \Psi_p^*(h') \exp(-\frac{i}{2} t T_2 p^2). \quad (3.23)$$

Подставив в (3.23) явный вид функций  $\Psi_p(h)$  из (3.20), после некоторых простых вычислений находим

$$U_t^c(h, h') = \int_H \frac{d^\ell h''}{\mu(h)\mu(h'')} U_t(h, h'') Q(h'', h'), \quad (3.24)$$

где

$$Q(h, h') = \sum_w \delta^\ell(h - \hat{w}h') \quad (3.25)$$

— ядро оператора, симметризирующего по группе  $W$ , и  $U_t(h, h')$  есть ядро оператора эволюции для соответствующей  $\ell$ -мерной системы с плоским ФП, т.е. обычное ядро для свободной частицы:

$$U_t(h, h'') = (2\pi i t)^{-\ell/2} \exp \frac{i}{2t} T_2 (h - h'')^2. \quad (3.26)$$

Для перехода от (3.23) к (3.24) следует, воспользовавшись четностью функций (3.20)  $\Psi_{\hat{w}p}(h) = \Psi_p(h)$ , перейти к интегрированию в (3.23) по всей подалгебре  $H$ :  $\int_{K^+} d^\ell p = N_w^{-1} \int_H d^\ell p$ , где  $N_w = r_1 r_2 \dots r_\ell$  — порядок группы Вейля или число различных элементов в  $W$ , после чего интеграл по импульсу легко вычисляется. Таким образом, результат оказался аналогичным (2.38). Чтобы получить амплитуду перехода в системе с модифицированным ФП, необходимо симметризовать по группе,



редуцирующей физическое ФП, т.е. по группе Вейля, аналогичную амплитуду для той же системы с плоским ФП с учетом криволинейности физических координат (это отражается мерой (3.24) и (2.38)). Формула (3.24) показывает также, что, помимо прямой траектории, соединяющей точки

$h, h'$ , вклад в амплитуду перехода дают траектории, отраженные от границы камеры Вейля. Следует подчеркнуть, что никакой "непроницаемой" стенки на границе  $\partial K^+$  нет (рассматривалось свободное движение!), поэтому вклад всех отраженных траекторий берется с положительным знаком (см. рассуждения после (2.37)).

Результат (3.24) легко обобщается на случай произвольного потенциала. По определению эволюция физического состояния  $\Psi(h)$  во времени задается равенством

$$\Psi_t(h) = \int_{K^+} d^l h' U_t^c(h, h') \Psi(h') \mu^2(h'). \quad (3.27)$$

Поэтому, если инфинитезимальный оператор эволюции  $\hat{U}_\varepsilon^c$  переводит четную по группе  $W$  функцию в четную, то (3.24) остается справедливым и в случае произвольного потенциала  $V$ . Последнее имеет место при условии  $U_\varepsilon(\hat{W}h, h') = U_\varepsilon(h, \hat{W}^T h') + O(\varepsilon^2)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\hat{W}^T$  - транспонированный оператор  $\hat{W}$ ), т.е. когда потенциал - четная функция  $V(\hat{W}h) = V(h)$ , что, очевидно, справедливо вследствие калибровочной симметрии. В этом случае при итерации инфинитезимального ядра оператора  $\hat{U}_\varepsilon^c = \hat{U}_\varepsilon \hat{Q}$  все  $\hat{Q}$  проносятся направо  $\hat{Q} U_\varepsilon \hat{Q} = U_\varepsilon \hat{Q}^2 = U_\varepsilon \hat{Q}$ , что дает (3.24) для конечного промежутка времени, где вместо (3.26) стоит КИ

$$U_t(h, h') = \int_H \prod_{\tau=0}^t \frac{d^l p(\tau) d^l h(\tau)}{(2\pi)^l} \exp i \int_0^t d\tau [\tau_x(p\dot{h} - \frac{1}{2}p^2) - V(h)] \quad (3.28)$$

с начальными условиями  $h(0) = h', h(t) = h$ .

По построению ядро  $U_t^c(h, h')$  инвариантно относительно  $W$ , следовательно, по теореме Шевалле [20, с. 556] оно как функция двух переменных  $h$  и  $h'$  допускает единственное, калибровочно-инвариантное, аналитическое продолжение (по каждой переменной независимо) на всю алгебру  $X$  и может быть явно выражено в терминах калибровочно-инвариантных переменных, т.е. представлено как функция  $\ell$  независимых полиномов  $\tau_x x^{\tau_\alpha} = \tau_x h^{\tau_\alpha}$ ,  $\tau_x x'^{\tau_\alpha} = \tau_x h'^{\tau_\alpha}$ ,  $\tau_\alpha$  - степени независимых операторов Казимира в  $X$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, \ell$ . Таким образом, учет редукции физического ФП (или требование инвариантности всех физических амплитуд относительно калибровочной дискретной группы Вейля)

позволяет путем аналитического продолжения установить взаимоднозначное соответствие между описанием, которое получается путем явного выделения физических переменных и калибровочно-инвариантным подходом. В этом смысле учет редукции физического ФП в квантовой теории есть последовательное использование схемы квантования Дирака.

### 3.4 Непротиворечивость динамики и схема квантования Дирака

В качестве сравнения приведем пример использования унитарной калибровки для построения КИ без учета редукции физического ФП. Положим  $\mathcal{X} \equiv \mathcal{Z}_\alpha \lambda_\alpha + \lambda_\alpha h_\alpha$ , где  $\alpha$  нумерует базис в  $H$ , а  $a$  нумерует базис в  $X \setminus H$ . В качестве дополнительных условий выберем  $\mathcal{X}_a(x) = \mathcal{Z}_a = 0, y_j = 0$ . Напомним, что среди  $N$  связей  $G_j$  не все являются независимыми. У вектора  $x = h$  имеется стационарная подгруппа - подгруппа Картана, поэтому в качестве независимых связей можно выбрать  $G_a = f_{abc} p_b z_c + f_{ab\alpha} p_b h_\alpha + f_{a\alpha\beta} p_\alpha z_\beta = 0$ ,  $p_\alpha^h$  и  $p_a$  - импульсы, канонически сопряженные  $h_\alpha$  и  $\mathcal{Z}_a$  соответственно. Тогда согласно рецепту [II] КИ для системы (3.1) имеет вид

$$U_t(h, h') = \int D(p, x, \pi, y) e^{iS} \prod_t (\delta^N(y) \delta^N(\pi) \delta^{N-\ell}(z) \prod_a \delta(G_a) \Delta), \quad (3.29)$$

где  $\Delta = \det M$ ,  $M_{ab} = \{G_a, \mathcal{Z}_b\} |_{\mathcal{Z}_a=0}$ , мера в КИ (3.29) определена стандартно  $D(p, x, \pi, y) = \prod_t [(2\pi)^{-2N} d^N \pi d^N y d^N x d^N p]$ ,  $p_i = (p_a, p_\alpha^h)$ , действие системы определено каноническим образом  $S = \int_0^t d\tau (\pi_i \dot{y}_i + p_a \dot{x}_a + p_\alpha^h \dot{h}_\alpha - H)$ ,  $H$  - гамильтониан (3.3). Интегрирование по  $\pi, y$  и  $z$  выполняется тривиально, для интегрирования по  $p_a$  нужно преобразовать дельта-функцию от связей  $\prod_a \delta(G_a) |_{z=0} = \prod_a \delta(M_{ab} p_b) = \Delta^{-1} \prod_a \delta(p_a)$ . Следовательно, определитель  $\Delta$  в мере (3.29) сокращается, интегрирование по  $p_a$  легко выполняется. В результате получается КИ, который совпадает с (3.28). С другой стороны, амплитуда (3.28) содержит вклад нефизических состояний. В § 3.2 было показано, что спектр осциллятора в модели (3.1) определяется степенями независимых операторов Казимира в  $X$ , в то время как наложение калибровочного условия  $x = h$  и последующее квантование (чему фактически и отвечает амплитуда (3.29)) ведет к спектру  $\ell$  независимых осцилляторов единичной частоты. Поэтому заключаем, что устранение всех нефизических степеней свободы путем фиксации калибровки еще не гарантирует сужения полного гильбертова пространства состояний до физического подпространства, выделяемого операторами связей в схеме квантования Дирака. Следовательно, игнорирование структуры ФП физических переменных ведет к отказу от схемы квантования Дирака

ка. Уже на примере осциллятора (см. конец § 3.2) видно, что игнорирование структуры физического ФП эквивалентно нарушению второго условия (3.9). Далее, поскольку  $\hat{\pi}_j \hat{\pi}_j = i[\hat{\pi}_j, H] \sim G_j \neq 0$ , то уже в следующий момент времени  $\hat{\pi}_j \neq 0$ , что явно противоречит исходной форме лагранжиана (3.1). Поэтому нельзя отказаться от выполнения связей, ибо в противном случае мы получаем либо противоречивую динамику, либо совсем другую, не калибровочную теорию. Заметим, что в (3.29) было априори положено  $\Phi \Pi(h, p^h) = \mathbb{R}^l \otimes \mathbb{R}^e$ , т.е. интегрирование в (3.29) ведется по полной гиперплоскости  $\mathbb{R}^{2l}$  (хотя, с другой стороны, мы не умеем вычислять КИ (даже гауссов) по какой-либо части  $\mathbb{R}^{2l}$  и требуется дать определение такого объекта). Обратим внимание на ещё одну особенность. Для определителя в (3.29) получаем  $\Delta = \text{const } \mu^2(h)$ , поскольку  $M_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta$  (согласно (3.13) и (3.17)). Следовательно,  $\Delta = 0$  при  $h \in \partial K^+$ , и дополнительное условие неприменимо при  $h \in \partial K^+$ , поэтому нужно ограничить область интегрирования по  $h$  до  $K^+$ , но тогда встает вопрос о вычислении КИ (3.29) по  $K^+ \subset \mathbb{R}^e$ . Фактически (3.24) предписывает рецепт решения этой проблемы в соответствии со схемой квантования Дирака.

Физические переменные, конечно, можно выделить заданием любого  $\ell$ -мерного гладкого многообразия, изоморфного  $\mathbb{R}^\ell$ , в полном конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}^N$ , что соответствует заданию  $N-\ell$  условий  $\mathcal{L}_\alpha(x) = 0$ . Однако ФП новых переменных, хотя и выглядело бы сложнее, не было бы изоморфно  $\mathbb{R}^{2l}$ . Это следует уже из того, что орбиты калибровочной группы в данной модели есть замкнутые компактные многообразия размерности  $N-\ell$ . Выделение физических переменных с помощью калибровочного условия есть задание "линии" ( $\ell$ -мерной поверхности) в полном конфигурационном пространстве, вдоль которой изменяются физические переменные. "Линия" же не может пересекать замкнутое многообразие только один раз, подобно тому, как линия, проходящая через внутренность сферы, пересекает её, по крайней мере, дважды (нстати сказать, этот случай реализуется для групп ранга  $\ell=1$ , т.е.  $SU(2) \sim SO(3)$ , где орбиты есть сферы  $S^2$ ). Следовательно, на "линии" будут существовать точки, принадлежащие одной орбите, или они будут калибровочно-эквивалентны. Поэтому произойдет редукция физического конфигурационного и фазового пространств, что естественно и было видно при анализе переменных (3.4). К вопросу о записи КИ в произвольной калибровке с учетом редукции физического ФП мы вернемся в конце следующего параграфа, в котором будет обсуждаться калибровочно-инвариантный подход к построению КИ.

### 3.5. Роль калибровочных инвариантов при построении КИ

В предыдущем параграфе было сказано, что инвариантность физической амплитуды перехода относительно дискретной калибровочной группы, редуцирующей физическое ФП, позволяет сделать аналитическое продолжение этой амплитуды в полное конфигурационное пространство системы (включающее и нефизические степени свободы) калибровочно-инвариантным образом (теорема Шевалле). Здесь будет предложен способ этого аналитического продолжения.

Прежде чем переходить к решению этой задачи в общем виде, разберем простой вопрос о нахождении калибровочно-инвариантных волновых функций, например, для осциллятора с группой ранга  $\ell=2$  [15]. В теории групп есть утверждение [20, 26], что всякий полином в подалгебре  $\mathfrak{H}$ , инвариантный относительно группы  $W$ , разлагается по образующим  $\text{Tr } h^{2\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ ,  $\ell = \dim \mathfrak{H}$ . Следовательно, чтобы найти явные формулы для аналитического продолжения, нужно представить физические волновые функции как функции от  $\text{Tr } h^{2\alpha}$ . После чего замена  $\text{Tr } h^{2\alpha} \rightarrow \text{Tr } x^{2\alpha}$  дает желаемый результат. Чтобы реализовать эту программу в случае  $\ell=2$ , перейдем в уравнении (3.16) к новым переменным  $\Phi_1 = (\text{Tr } h^2)^{1/2} \geq 0$ ,  $\Phi_2 = (-\beta + \text{Tr } h^2 / \Phi_1^2) / \sqrt{\alpha}$ ,  $\Phi_2 \in [-1, 1]$  (ср. с (3.5)). Путем явного вычисления убеждаемся, что  $\mu^2(h) = \text{const } \Phi_1^{2\alpha} (1 - \Phi_2^2)$ . Переписывая оператор Лапласа  $\partial_\alpha^2$  ( $\alpha=1, 2$ ) в (3.16) в криволинейных координатах  $\Phi_\alpha$  и делая затем подстановку  $\Psi_E = \mu^{-1} \Psi_E$ , получаем уравнение

$$\left( -\frac{1}{\Phi_1} \frac{\partial}{\partial \Phi_1} \Phi_1 \frac{\partial}{\partial \Phi_1} + \frac{c^2}{\Phi_1^2} (1 - \Phi_2^2) \frac{\partial}{\partial \Phi_2} (1 - \Phi_2^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \Phi_2} + \Phi_1^2 \right) \Psi_E = 2E \Psi_E, \quad (3.30)$$

которое будем решать методом разделения переменных  $\Psi_E(\Phi_1, \Phi_2) = f(\Phi_2) F(\Phi_1)$ . В результате находим

$$-(1 - \Phi_2^2) f'' + \Phi_2 f' + c f = 0, \quad (3.31a)$$

$$-F'' - \frac{1}{\Phi_1} F' + \left( \frac{c^2}{\Phi_1^2} + \Phi_1^2 - 2E \right) F = 0, \quad (3.31b)$$

где  $c$  - постоянная разделения переменных. Поскольку  $\Psi_E$  должна быть конечной, необходимо потребовать выполнения граничных условий  $f(\pm 1) = 0$  ( $\mu = 0$  при  $\Phi_2 = \pm 1$ ). Отсюда находим решения (3.31a)  $f = (1 - \Phi_2^2)^{1/2} U_m(\Phi_2) = \sin[(m+1) \arccos \Phi_2]$ ,  $U_m$  - многочлены Чебышева второго рода,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $c = -(m+1)^2$ . Уравнение (3.31b) сводится к стандартному подстановкой  $F(\Phi_1) =$

$$= \Phi_1^{\tau(m+1)} \exp(-\frac{1}{2}\Phi_1^2) g(\Phi_1) \quad \text{и заменой независимой переменной } \Phi_1^2 = t$$

$$t g'' + [\tau(m+1) + 1 - t] g' + \frac{1}{2} [E + \tau(m+1) - 1] g = 0. \quad (3.32)$$

Его регулярное в нуле решение дается вырожденной гипергеометрической функцией  $g = {}_1F_1(\frac{1}{2}(\gamma-E), \gamma, t)$ ,  $\gamma = \tau m + \tau + 1$ . Из условия убывания  $F$  на бесконечности получаем спектр  $E_{nm} = 2n + \tau m + \tau + 1$ ,  $n, m = 0, 1, \dots$ , что находится в соответствии с классическими решениями (3.8) и квантовым описанием в представлении вторичного квантования (3.II) ( $N/2 = \tau + 1$  для групп с  $\ell = 2$ ). Учитывая связь функции  ${}_1F_1$  с обобщенными полиномами Лагерра  $L_k^s$  [27]  ${}_1F_1(-k, s+1, t) = L_k^s(t) \Gamma(k+1) \Gamma(s+1) / \Gamma(k+s+1)$ , находим окончательное выражение для инвариантных относительно  $W$  функций

$$\psi_{nm} = \text{const } \Phi_1^{\tau m} U_m(\Phi_2) L_n^{\tau(m+1)}(\Phi_1^2) \exp(-\frac{1}{2}\Phi_1^2). \quad (3.33)$$

Использование переменных  $\Phi_\alpha$  позволяет легко осуществить аналитическое продолжение (3.33)  $\psi_{nm}(h) = \psi_{nm}(\Phi)$  в полное конфигурационное пространство системы, т.е. на всю алгебру  $X$ ; очевидно, это сводится к замене в (3.33)  $\tau_2 h^2 \rightarrow \tau_2 x^2$ ,  $\tau_2 h^z \rightarrow \tau_2 x^z$ . Так по дискретной группе Вейля восстанавливаются калибровочно-инвариантные волновые функции.

Перейдем к вопросу аналитического продолжения амплитуды перехода (3.24). Поскольку зависимость от переменной  $y$  в данной модели тривиальна, то в дальнейшем не будем обращать на нее внимания. Тогда в координатном представлении имеем квантовую задачу [28]

$$\left\{ \begin{aligned} [-\frac{1}{2} \Delta_{(N)} + V(x)] \psi_E(x) &= E \psi_E(x) \\ \hat{G}_j \psi_E(x) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (3.34a)$$

$$\quad (3.34b)$$

где  $\Delta_{(N)}$  -  $N$ -мерный оператор Лапласа.

Обозначим через  $\mathcal{H}$  полное гильбертово пространство состояний, которое образуют решения (3.34a), пусть  $\mathcal{H}_{ph}$  - физическое подпространство,  $\psi_E \in \mathcal{H}_{ph}$ , если  $\psi_E$  удовлетворяет (3.34b). Ясно, что  $\psi_E(\Omega x \Omega^{-1}) = \psi_E(x) \in \mathcal{H}_{ph}$ . Поскольку гамильтониан в (3.34a) коммутирует с  $\hat{G}_j$ , то  $\mathcal{H}$  распадается в ортогональную сумму

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ph} \oplus \mathcal{H}_{nph}, \quad (3.35)$$

т.е. на физическое и нефизическое подпространства. Пусть  $\psi_E \in \mathcal{H}_{ph}$  и  $\tilde{\psi}_E \in \mathcal{H}_{nph}$  образуют базисы в  $\mathcal{H}_{ph}$  и  $\mathcal{H}_{nph}$ , т.е.  $\langle \psi_E | \psi_{E'} \rangle = \delta_{EE'}$ ,  $\langle \tilde{\psi}_E | \tilde{\psi}_{E'} \rangle = \delta_{EE'}$ ,  $\langle \psi_E | \tilde{\psi}_{E'} \rangle = 0$ , где  $\delta_{EE'}$  и  $\tilde{\delta}_{EE'}$  - ядра единичных операторов в пространстве спектральных параметров для  $\mathcal{H}_{ph}$  и  $\mathcal{H}_{nph}$  соответственно, скалярное произведение определено в полном конфигурационном пространстве  $X$   $\langle \varphi | \psi \rangle = \int d^N x \varphi^*(x) \psi(x)$ .

Как и в § (3.3), для решения уравнения (3.34b) сделаем замену переменных (3.4). Математически она означает расщепление алгебры  $X = \text{орбита} \oplus K^+$ , где  $K^+$  - трансверсальное пространство, относительно присоединенного действия группы [29]. Конечность решений уравнения (3.16) на границе  $\partial K^+$  по-прежнему гарантируется их инвариантностью относительно  $W$ . Дело в том, что всякий нечетный относительно  $W$  полином в  $h$  делится на  $\mu(h)$  [29, следствие III.3.8]. Для инвариантного относительно  $W$  решения (3.16)  $\psi_E = \mu^{-1} \varphi_E$  имеем  $\varphi_E(\hat{w}h) = \det w \varphi_E(h)$ , поэтому, ввиду аналитичности  $\varphi_E$  и по только что упомянутому свойству,  $\varphi_E(h) \sim \text{const } \mu(h)$  в окрестности  $\partial K^+$ .

Предположим, что  $\varphi_E$  известны, тогда они нормированы условием

$$\int_{K^+} d^{\ell} h \varphi_E^*(h) \varphi_{E'}(h) = \frac{1}{\nu} \delta_{EE'}, \quad (3.35)$$

где  $\nu = \int \tilde{\mu}^2(z) dz$ , т.е.  $\nu \mu^2(h)$  есть объем орбиты элемента  $h$  (см. замечание о нормировке состояний после (3.17)). Отсюда заключаем, что разложение единицы в  $\mathcal{H}_{ph}$  (ядро проектора на  $\mathcal{H}_{ph}$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(x, x') &= \sum_E \psi_E(x) \psi_E^*(x') = \sum_E [\mu(h) \mu(h')]^{-1} \varphi_E(h) \varphi_E^*(h') = \\ &= \frac{1}{\nu} [\mu(h) \mu(h')]^{-1} \delta^{\ell}(h-h'), \quad h, h' \in K^+ \end{aligned} \quad (3.36)$$

Чтобы записать (3.36) в явно калибровочно-инвариантном виде (фактически аналитически продолжить правую часть равенства (3.36) на всю  $X$ ), воспользуемся формулой [29, лемма III.3.7]

$$\det \left\| \frac{\partial j_\alpha(h)}{\partial h_\beta} \right\| = c \mu(h), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \ell, c = \text{const}, \quad (3.37)$$

где  $j_\alpha(h) \equiv \tau_2 h^{\tau_\alpha}$ , т.е. используем ту же стратегию, что и в

случае осциллятора (3.30 - 33): величины, инвариантные относительно  $W$ , выражаем через образующие  $j_\alpha(h)$ . Заметим, что ввиду симметрии  $\Psi_E(\hat{w}h) = \Psi_E(h)$  правая часть (3.36) может быть продолжена на всю  $H$  четным образом относительно  $W$  (ср. с (3.22)). Найдем аналогичное продолжение меры  $\mu(h)$  в  $X$ . Поскольку  $\mu(h) > 0$ ,  $h \in K^+$  ( $(h, \alpha) > 0$  при  $h \in K^+$ , если  $\alpha > 0$  [20]), то  $\mu(h) = (\mu^2(h))^{1/2} = (\mu^2(x))^{1/2}$ ,  $h \in K^+$ , так как  $\mu^2(h) = \mu^2(x)$ -инвариант относительно  $W$ , следовательно, по теореме Шевалле можно заменить  $h$  на  $x$ , предварительно выразив  $\mu^2(h)$  через  $j_\alpha(h)$ . Теперь из (3.36), (3.37) и правила замены аргумента в многомерной  $\delta$ -функции вытекает

$$\tilde{Q}(x, x') = \frac{c}{v} [\mu^2(x)\mu^2(x')]^{-1/4} \prod_{\alpha=1}^l \delta(j_\alpha(x) - j_\alpha(x')) \quad (3.38)$$

явно калибровочно-инвариантный вид единичного оператора в  $\mathcal{H}_{ph}$ .

Рассмотрим оператор эволюции в полном гильбертовом пространстве. По формуле Фейнмана - Каца находим

$$U_t(x, x') = \sum_{E \in \mathcal{H}_{ph}} \Psi_E(x) \Psi_E^*(x') e^{-iEt} + \sum_{E \in \mathcal{H}_{ph}} \tilde{\Psi}_E(x) \tilde{\Psi}_E^*(x') e^{-iEt} \quad (3.39)$$

Первая сумма в (3.39) есть ядро оператора эволюции в  $\mathcal{H}_{ph}$ , которое обозначим  $U_t^{ph}(x, x')$  (здесь заменили значок "с" в (3.24) на "ph", так как теперь нет явного выделения физических степеней свободы (фиксации калибровки), все переменные  $x$  входят равноправно. Для ядра (3.39) справедливо представление

$$U_t(x, x') = \int Dx \exp \left[ i \int_0^t dt (\mathcal{T}_x \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x)) \right], \quad (3.40)$$

где  $Dx$  - стандартная мера в  $N$ -мерном конфигурационном пространстве системы,  $x = x(t)$ ,  $x' = x(0)$ . Поскольку оператор (3.36), (3.38) есть проектор на  $\mathcal{H}_{ph}$  (следствие (3.35) и (3.36)), то из (3.35) вытекает

$$U_t^{ph}(x, x') = \int_X d^N x'' U_t(x, x'') \tilde{Q}(x'', x'). \quad (3.41)$$

Формула (3.41) решает поставленную задачу. Структура её аналогична структуре (A.7), поэтому (3.41) можно рассматривать как независимое определение КИ, не требующее фиксации калибровки для выделения физических переменных.

Чтобы получить корректное выражение для КИ в какой-либо калибровке  $\mathcal{X}_\alpha(x) = 0$ , следует в (3.41) перейти к криволинейным координатам  $x = S \tilde{x} S^{-1}$ , где  $S$  - элемент группы  $G$ , а  $\tilde{x}$  тождественно удовлетворяет условиям  $\mathcal{X}_\alpha(\tilde{x}) \equiv 0$ , после чего выполнить интегрирование по  $S$  в (3.41) и  $\tilde{x}$ . На практике, однако, ядро  $U_t(x, x')$  точно неизвестно, поэтому указанную процедуру легче выполнить для инфинитезимального ядра (3.41) ( $t = \varepsilon \rightarrow 0$ ), а затем выполнить итерацию, чтобы получить ядро для конечного промежутка времени. Например, чтобы получить КИ в калибровке  $x = h$ , следует перейти к переменным (3.4) и проинтегрировать по нефизическим переменным с помощью формулы [29, теор. П.5.35] в (3.41), тогда для инфинитезимального ядра оператора эволюции получим

$$U_\varepsilon^{ph}(h, h') = \sum_{w \in K^+} \int d^N h'' \frac{\mu^2(h'')}{\mu(h)\mu(\hat{w}h'')} \exp \left[ \frac{i}{\varepsilon} \mathcal{T}_x(h - \hat{w}h'')^2 - i\varepsilon V(h) \right] \tilde{Q}(h'', h'). \quad (3.42)$$

Подстановка (3.38) в (3.42) и последующее интегрирование по  $h''$  приводят к результату, совпадающему с (3.24) с учетом нормировки (3.35)

$$U_\varepsilon^{ph}(h, h') = \sum_w [v \mu(h) \mu(\hat{w}h')]^{-1} U_\varepsilon(h, \hat{w}h'). \quad (3.43)$$

Отметим, что (3.41) позволяет получить правильное, т.е. соответствующее калибровочно-инвариантному подходу, выражение для КИ и в том случае, когда "линия", выделяемая калибровочным условием, пересекает различные орбиты различное число раз (а не одинаковое для всех орбит, как в приведенном примере).

### 3.6. Структура физического гильбертова пространства для ферми-системы

Рассмотрим обобщение модели § 2.6 на случай произвольной группы. Для этого заменим в (2.48) ковариантную производную  $D_t \Psi = \partial_t \Psi + [y, \Psi]$ ,  $\Psi = \lambda_j \psi_j$ ,  $\Psi^\dagger = \lambda_j \psi_j^\dagger$  и поставим знак  $\mathcal{T}_x$  перед кинетической энергией (здесь  $\psi_j$  - комплексная грассманова переменная  $j = 1, 2, \dots, N$ ). Канонический формализм аналогичен § (2.6). После устранения связей второго рода (2.50) и последующего квантования с помощью скобки Дирака (2.53), (2.54)  $[\hat{\psi}_j, \hat{\psi}_k^\dagger]_+ = \delta_{jk}$  ( $\hbar = 1$ ), вместо (2.61) получаем

$$\hat{\mathcal{P}}_j |\varphi_{ph}\rangle = 0, \quad f_{ijk} \hat{\psi}_j^+ \hat{\psi}_k |\varphi_{ph}\rangle = 0, \quad (3.44)$$

где  $\hat{\mathcal{P}}_j$  - оператор импульса, канонически сопряженного  $\psi_j$ . Чтобы решить второе уравнение (3.44), воспользуемся методом, изложенным в § (3.2) для решения аналогичной задачи в случае бозевских переменных. Очевидно, вакуум  $|0\rangle$  ( $\hat{\psi}_k |0\rangle \equiv 0$ ) является физическим состоянием, следовательно,  $|\varphi_{ph}\rangle = f(\hat{\psi}^+) |0\rangle$ , где  $f(\Omega \hat{\psi}^+ \Omega^{-1}) = f(\hat{\psi}^+)$  - инвариантная функция относительно калибровочных преобразований, генерируемых связями (3.44). Однако, ввиду грассмановости операторов  $\hat{\psi}^+$ , функция  $f$  должна разлагаться по инвариантным антисимметричным полиномам на грассмановой алгебре Ли. Ясно, что инвариантными полиномами в грассмановой алгебре Ли являются всевозможные произведения следов  $\text{Tr} \hat{\psi}^{+n}$  ( $\text{Tr}$  относится к базисным матрицам  $\lambda_j$ ). Нетрудно убедиться, что, ввиду антикоммутативности  $\hat{\psi}_i^+$ ,  $\text{Tr} \hat{\psi}^{+2n} = 0$ . Рассмотрим равенство  $\hat{\psi}^{+2} = \lambda_i \hat{B}_i = \lambda_i \lambda_j \hat{\psi}_i^+ \hat{\psi}_j^+ = \frac{1}{2} \lambda_k f_{kij} \hat{\psi}_i^+ \hat{\psi}_j^+$ . Операторы  $\hat{B}_i$  коммутируют между собой. Используя это соотношение, находим

$$\text{Tr} \hat{\psi}^{+(2m+1)} = \text{Tr} (\lambda_i \lambda_j \dots \lambda_{j_1}) \hat{\psi}_i^+ \hat{B}_{j_m} \dots \hat{B}_{j_1}. \quad (3.45)$$

Так как  $\hat{B}_j$  коммутируют между собой, то след в (3.45) можно симметризовать по индексам  $j$ . Сделаем замену в (3.45)  $\lambda_i \lambda_{j_m} = \lambda_{j_m} \lambda_i + f_{ijm} \lambda_k$ , тогда слагаемое  $f_{ijm} \hat{\psi}_i^+ \hat{B}_{j_m} = \frac{1}{2} f_{ijm} f_{kij} \hat{\psi}_i^+ \hat{\psi}_j^+ \hat{\psi}_k^+ = 0$  обращается в нуль в силу тождества Якоби для структурных констант  $f_{ijk}$ . Поэтому весь след в (3.45) можно заменить на симметричный тензор ранга  $m+1$ . Всякий симметричный инвариантный тензор разлагается по образующим тензорам рангов  $\tau_\alpha$  (эти тензоры образуют симметричные инвариантные полиномы в алгебре Ли (см. теорему 2 в Приложении Б)). Каждый из этих тензоров есть симметризованный по индексам след  $\text{Tr} (\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_n})$ , где  $n = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$ ,  $\ell = \text{rank } G$ . Каждый из таких следов порождает базисный грассманов полином в разложении полинома (3.45)  $\text{Tr} \hat{\psi}^{+(2\tau_\alpha-1)}$  и  $\text{Tr} \hat{\psi}^{+2\tau_\alpha} \equiv 0$ , причем первый получается, когда один из индексов симметричного тензора сворачивается с  $\hat{\psi}_i^+$  в (3.45), а второй - когда все индексы симметричного тензора сворачиваются с  $\hat{B}_j$  в (3.45), и он, очевидно, равен нулю в силу антикоммутативности  $\hat{\psi}_j^+$ . Поэтому (3.45) отличен от нуля только в том случае, когда  $m+1 = \tau_\alpha$ . Таким образом, мы приходим к заключению, что базис в физическом гильбертовом пространстве состояний имеет вид

$$[\text{Tr} \hat{\psi}^{+\tau_1}]^{n_1} \dots [\text{Tr} \hat{\psi}^{+\tau_\ell}]^{n_\ell} |0\rangle, \quad (3.46)$$

где  $R_\alpha = 2\tau_\alpha - 1$  и  $n_\alpha = 0, 1$  (при  $n_\alpha \geq 2$  соответствующая степень нечетного элемента грассмановой алгебры тождественно равна нулю),  $\alpha = 1, 2, \dots, \ell = \text{rank } G$ .

Несмотря на то, что с помощью калибровочных преобразований  $\psi \rightarrow \Omega \psi \Omega^{-1}$  нельзя явно устранить нефизические степени свободы у матрицы  $\psi = \lambda_i \psi_i$ , тем не менее, калибровочная симметрия ведет к сокращению числа степеней свободы. Как и в аналогичном бозевском случае, число физических степеней свободы определяется рангом калибровочной группы, а физическое гильбертово пространство - степенями независимых операторов Казимира в соответствующей алгебре Ли. Например, в случае  $N$ -мерного осциллятора ( $V = \text{Tr} \psi^+ \psi = \psi_j^+ \psi_j$ ) с единичной частотой, физический базис (3.46) соответствует  $\ell$  ферми-осцилляторам с частотами  $2\tau_\alpha - 1$ .

#### 4. Структура ФП полей Янга - Миллса

##### 4.1. Структура ФП поля Янга - Миллса с группой $SU(2)$

Прежде чем переходить к полю Янга - Миллса с произвольной группой, рассмотрим простейший случай группы  $SU(2)$ . Лагранжиан есть

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu}_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

где  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  - стандартный тензор [19],  $A_\mu^a$  - потенциалы поля Янга - Миллса. Канонические импульсы суть  $\pi_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu^a} = F_{\mu 0}^a$ , следовательно, имеем первичную связь  $\pi_0^a = 0$ . Определим векторы в изотопическом пространстве  $\pi_k = \pi_k^a \tau_a$ , где  $\tau_a$  - матрицы Паули. Под действием калибровочных преобразований они преобразуются по присоединенному представлению

$$\pi_k \rightarrow S \pi_k S^{-1}, \quad S = \exp[i\omega^a(x) \tau_a], \quad (4.2)$$

где  $\omega^a(x)$  - произвольные функции координат и времени  $x = (t, \vec{x})$ .

Физические степени свободы выделим следующим образом. Изотопическим поворотом (4.2) в точке  $x = \vec{x}$  всегда можно направить вектор  $\pi_1$  вдоль третьей оси, т.е.  $\pi_1^1(\vec{x}) = \pi_1^2(\vec{x}) = 0$ . Отметим, что вследствие  $\pi_0 = 0$  переменная  $A_0$  является нефизической.



Однако с помощью изотопического поворота (4.2) можно изменить знак  $\mathcal{P}_1^3$ , не затрагивая условий  $\mathcal{P}_1^{1,2}(\dot{x}) = 0$  (например,  $S = \tilde{S} = \exp[-i\dot{\omega}(x)\tau_2]$ , где  $\dot{\omega}(x) = \pi/2$ ,  $x \in R_\varepsilon(\dot{x})$  и  $\dot{\omega}(x) = 0$ , если  $x \in R_\varepsilon(x)$ ,  $R_\varepsilon(x) = \{x : |\dot{x} - \tilde{x}| < \varepsilon, |t - \tilde{t}| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$  - окрестность точки  $x = \dot{x}$  бесконечно-малого радиуса).

Это значит, что физические значения импульса лежат на полуоси  $\mathcal{P}_1^3 \in [0, \infty]$ , в то время как  $A_1^3$  изменяется на всей оси  $\mathbb{R}$ . Тогда в соответствии с анализом главы 2 заключаем, что  $\Phi\mathbb{P}(A_1^3, \mathcal{P}_1^3) = \text{con}(\mathcal{P})$  - конус, разворачиваемый в полуплоскость. Это следует также из того факта, что преобразования (4.2) с  $S = \tilde{S}$  определяют калибровочную группу  $\tilde{X}_2$  на фазовой плоскости  $(\mathcal{P}_1^3, A_1^3) \rightarrow (-\mathcal{P}_1^3, -A_1^3)$ .

После этого остается калибровочный произвол, связанный с вращениями в изотопическом пространстве вокруг третьей оси:  $S = S' = \exp[iV(x)\tau_3]$  - стационарная подгруппа изовектора  $\mathcal{P}_1^3\tau_3$ . Используя калибровочные преобразования, можно добиться равенства  $\mathcal{P}_2^{1,2} = 0$ . Тогда опять остается калибровочная группа  $\tilde{X}_2$ , связанная с преобразованиями  $S'$ , в которых  $V(x) \equiv \dot{\omega}(x)$ . Она изменяет знак у компоненты  $\mathcal{P}_2^2 \rightarrow -\mathcal{P}_2^2$  в точке  $x = \dot{x}$ . Следовательно,  $\Phi\mathbb{P}(\mathcal{P}_2^2, A_2^2)$  также есть  $\text{con}(x)$ .

Таким образом, среди девяти пар канонических переменных  $\mathcal{P}_k^a$ ,  $A_k^a$  три оказываются нефизическими, а из оставшихся физических степеней свободы две имеют  $\Phi\mathbb{P} = \text{con}(\mathcal{P})$ . Однако приведенный анализ имеет один недостаток - способ выделения физических переменных неинвариантен относительно пространственных вращений. Этот недостаток можно легко устранить, заметив, что изовектор  $\mathcal{P}_k$  можно представить в следующем виде [30]:

$$\mathcal{P}_k = U_{kj} P_j, \quad \tau_2 P_j P_n = 0, \quad n \neq j, \quad (4.3)$$

где  $UU^T = U^T U = 1$ . Матрица  $U_{kj}$  является изотопическим скаляром и пространственным вектором по первому индексу,  $P_j$  образуют три ортогональных изотопических вектора, которые не изменяются при пространственных поворотах. Теперь весь вышеизложенный анализ без изменения переносится на импульсные переменные  $P_j$ , которые при калибровочных преобразованиях преобразуются как  $P_j \rightarrow S P_j S^{-1}$ .

#### 4.2. Случай произвольной группы

Для анализа воспользуемся представлением полупростой алгебры Ли  $X$  в базисе Картана - Вейля [Б.5]. Ясно, что импульсы  $\mathcal{P}_k \in X$ , и для них справедливо разложение

$$\mathcal{P}_k = \sum_{\alpha > 0} (\mathcal{P}_k^{+\alpha} e_\alpha + \mathcal{P}_k^{-\alpha} e_{-\alpha}) + \sum_{\omega \in \Pi} \mathcal{P}_k^\omega \omega, \quad (4.4)$$

где  $\mathcal{P}_k^{\pm\alpha}$ ,  $\mathcal{P}_k^\omega$  - функции  $x$ ,  $\Pi$  - набор простых корней,  $\alpha > 0$  означает суммирование по всем положительным корням. Калибровочные преобразования  $\mathcal{P}_k$  можно представить в следующем виде (см. (Б.6)):

$$\mathcal{P}_k \rightarrow \hat{S}_g \mathcal{P}_k, \quad \hat{S}_g = \exp \text{ad } \mathcal{X}(x). \quad (4.5)$$

Учитывая определение оператора  $\text{ad}$ , убеждаемся в эквивалентности (4.2) и (4.5). Для  $\mathcal{X}$  также справедливо представление, подобное (4.4),

$$\mathcal{X} = \sum_{\alpha > 0} (\lambda_\alpha^+ e_\alpha + \lambda_\alpha^- e_{-\alpha}) + \sum_{\omega \in \Pi} \lambda_\omega \omega \quad (4.6)$$

с  $N (= \dim G)$  произвольными функциями  $\lambda_\alpha^\pm(x)$ ,  $\lambda_\omega(x)$ . После исключения нефизических переменных  $A_0$ ,  $\mathcal{P}_0$  ( $\mathcal{P}_0 = 0$ ) остается  $3N$  пар канонических переменных  $\mathcal{P}_k$ ,  $A_k$ , среди которых только  $2N$  физических.

Возьмем  $\mathcal{P}_1$ . Любой элемент алгебры  $X$  можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{P}_1 = \exp \left[ \sum_{\alpha > 0} (\lambda_\alpha^+ \text{ade}_\alpha + \lambda_\alpha^- \text{ade}_{-\alpha}) \right] \mathcal{P}_1^h, \quad \mathcal{P}_1^h = \sum_{\omega \in \Pi} \mathcal{P}_1^\omega \omega. \quad (4.7)$$

Из соотношения (4.7) вытекает, что  $\mathcal{P}_1$  имеет только  $\ell$  физических компонент ( $\ell = \dim H = \text{rank } G$ ). Остальные калибровочные преобразования связаны с операторами

$$\hat{S}_h = \exp \left[ \sum_{\omega \in \Pi} \lambda_\omega \text{ad} \omega \right] \equiv \exp \text{ad} \lambda, \quad (4.8)$$

которые не меняют  $\mathcal{P}_1^h$ , т.е. образуют стационарную подгруппу элемента  $\mathcal{P}_1^h$ . Однако, как было показано в главе 3, в подалгебре Картана  $H$  действует еще дискретная группа Вейля  $W$ , которая в данном случае является подгруппой калибровочной группы  $G$ . Группа  $W$  действует в фазовой плоскости импульса  $\mathcal{P}_1^h \in H$  и канонически сопряженной ему координате  $A_1^h$ , отождествляя на ней некоторые точки, именно  $\mathcal{P}_1^h \rightarrow \hat{w} \mathcal{P}_1^h$ ,  $A_1^h \rightarrow \hat{w} A_1^h$ ,  $w \in W$ . В качестве образующих группы Вейля можно взять (см. (Б.7))

$$\hat{W}_\omega^S = \exp \frac{2\hat{\omega}(\alpha)}{(\omega, \omega)^{1/2}} \text{ad } S_\omega, \quad \omega \in \Pi, \quad (4.9)$$

где  $\hat{\omega}(\alpha)$  - функция, определенная в § 4.1. Итак, из вышеизложенного вытекает, что  $\Phi(\mathbb{A}_1^h, \mathbb{T}_1^h) = K^+ \otimes \mathbb{R}^{\ell}$ .

Рассмотрим теперь преобразования, связанные с операторами (4.8). В соответствии с (Б.5)  $\hat{g}_h e_\alpha = \exp(\Psi_\alpha) e_\alpha$ ,  $\Psi_\alpha = \sum_{\omega} \lambda_\omega(\omega, \alpha) = (\lambda, \alpha)$ . Тогда, применяя (4.8) к  $\mathbb{T}_2$ , можно обратиться в нуль  $\ell$  коэффициентов при ортогональных базисных элементах (Б.7), скажем при  $C_\omega$ . Действительно, полагая

$$\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_2^h + \sum_{\alpha > 0} (\mathbb{T}_{2\alpha}^S S_\alpha + \mathbb{T}_{2\alpha}^C C_\alpha) \quad (4.10)$$

(связь с разложением (4.4) с учетом определения (Б.7) очевидна), имеем

$$\hat{g}_h \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_2^h + \sum_{\alpha > 0} [(\mathbb{T}_{2\alpha}^S \text{ch}(\lambda, \alpha) + \mathbb{T}_{2\alpha}^C \text{sh}(\lambda, \alpha)) S_\alpha + (\mathbb{T}_{2\alpha}^C \text{ch}(\lambda, \alpha) + \mathbb{T}_{2\alpha}^S \text{sh}(\lambda, \alpha)) C_\alpha] \quad (4.11)$$

Тогда выбором  $\lambda = \lambda(\alpha)$  можем добиться равенства

$$\mathbb{T}_{2\omega}^C \text{ch}(\lambda, \omega) + \mathbb{T}_{2\omega}^S \text{sh}(\lambda, \omega) = 0, \quad \omega \in \Pi, \quad (4.12)$$

поскольку матрица скалярных произведений простых корней  $M_{\omega\omega'} = (\omega, \omega')$  невырождена, т.е. система уравнений (4.12) всегда разрешима относительно  $\lambda_\omega$  ( $\sum_{\omega} \lambda_\omega \omega = \lambda$ ). Однако, не нарушая условий (4.12), можно изменять знак калибровочным преобразованием независимо у каждой из  $\ell$  компонент при  $S_\omega$ , т.е. остаются калибровочные преобразования (4.8) вида  $\mathbb{T}_{2\omega'}^S \rightarrow -\mathbb{T}_{2\omega'}^S$ ,  $\mathbb{T}_{2\omega}^S \rightarrow \mathbb{T}_{2\omega}^S$ ,  $\omega \neq \omega'$ ,  $\omega'$  - фиксирован, при условии  $\mathbb{T}_{2\omega}^C = 0$ . В соответствии с (4.11) получаем, что преобразования должны подчиняться условиям

$$\text{sh}(\lambda, \omega) = 0, \quad \text{ch}(\lambda, \omega) = (1 - 2\delta_{\omega\omega'}), \quad \omega \in \Pi \quad (4.13)$$

и  $\omega'$  - фиксирован. Система (4.13) имеет решения относительно  $\lambda$  при каждом  $\omega'$ , так как матрица  $M_{\omega\omega'}$  не вырождена. Следовательно, в фазовых плоскостях каждой из  $\ell$  пар канонических переменных  $(\mathbb{T}_{2\omega}^S, \mathbb{A}_{2\omega}^S)$  действует группа  $\mathbb{Z}_2$ , т.е.  $\Phi(\mathbb{T}_{2\omega}^S, \mathbb{A}_{2\omega}^S) = \text{Con}(\mathbb{T})$ . В качестве образующих группы  $(\otimes \mathbb{Z}_2)^{\ell}$  можно взять

преобразования (4.8) с  $\lambda_\omega$ , удовлетворяющими (4.13),

$$\hat{W}_\omega = \exp \left[ 4i \hat{\omega}(\alpha) \sum_{\omega'} \left( \sum_{\omega''} (M^{-1})_{\omega\omega''} - \frac{1}{2} (M^{-1})_{\omega\omega'} \right) \text{ad } \omega' \right], \quad (4.14)$$

Можно убедиться, что  $\hat{W}_\omega S_{\omega'} = (1 - 2\delta_{\omega\omega'}) S_{\omega'}$ . Совместно с образующими (4.9)  $\hat{W}_\omega$  дают полную систему образующих дискретной калибровочной группы  $W \otimes (\otimes \mathbb{Z}_2)^{\ell}$ , редуцирующей  $\Phi$  полей Янга - Милса.

В общем случае редутивных групп Ли [20], которые есть прямое произведение полупростой и абелевых групп, ситуация для абелевых подгрупп аналогична случаю электродинамики, где  $\Phi$  всех физических степеней свободы плоское, так как канонический импульс (электрическое поле) есть калибровочный инвариант. Таким образом, для редутивных калибровочных групп ранга  $\ell$   $\Phi$   $2(\ell - \ell_a)$  степеней свободы отлично от стандартной плоскости, где  $\ell_a$  - размерность инвариантной абелевой подгруппы. Отметим также, что симметрия относительно пространственных вращений при выделении физических переменных может быть восстановлена использованием преобразования (4.3), где  $P_j$  - элемент алгебры Ли  $X$  [30].

#### 4.3. $\Phi$ полей в моделях Хиггса

Вначале рассмотрим простейшую систему, в которую кроме калибровочных полей входят также поля материи - скалярную электродинамику. Лагранжиан есть

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi + e A_\mu T \varphi)^2 - V(\varphi^2). \quad (4.15)$$

Здесь  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  - электромагнитное поле,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  - двухкомпонентное вещественное скалярное поле,  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  - генератор вращений в плоскости  $(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $e$  - константа связи (электрический заряд);  $V$  - потенциал. Лагранжиан (4.15) инвариантен относительно калибровочных преобразований  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \omega$ ,  $\varphi \rightarrow \exp(e\omega T) \varphi$ .

В рассматриваемой системе есть два типа полей, которые преобразуются по одной и той же калибровочной группе одновременно, поэтому нефизические переменные можно выделять как среди степеней свободы векторного поля, так и среди величин  $\varphi$ . Однако редуция физического  $\Phi$  существенно зависит от того, в каком секторе теории мы выделяем физические переменные. Следовательно, вопрос о структуре  $\Phi$  в калибровочных теориях, где кроме векторных полей имеются другие поля (поля материи), требует специального исследования.

С этой целью выделим физические (калибровочно-инвариантные) пе-

ременные в теории. Переходя к гамильтону формализму  $\mathcal{H}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F_{\mu 0}$  ( $\mathcal{H}_0 = 0$  - первичная связь [10])  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} + e A_0 T \varphi$ , находим гамильтониан системы

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\pi_k^2 + B_k^2 + p^2 + (D_k \varphi)^2) - A_0 G + V \right], \quad (4.16)$$

где  $D_k = \partial_k + e A_k T$ ,  $B_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kne} F_{ne}$  - магнитное поле,  $G = \partial_k \pi_k + e p T \varphi = 0$  - вторичная связь в теории:  $\{\mathcal{H}_0, H\} = G = 0$ . Чтобы найти калибровочно-инвариантные переменные, нужно построить каноническое преобразование, после которого связь  $G = 0$  выражала бы равенство нулю некоторого обобщенного импульса. Рассмотрим новые переменные [7]

$$\alpha_n = A_n - \partial_n \Delta^{-1} \partial_k A_k, \quad \epsilon_n = \pi_n - \partial_n \Delta^{-1} \partial_k \pi_k, \\ \xi = \Delta^{-1} \partial_n A_n, \quad \pi_\xi = -\partial_n \pi_n, \quad (4.17)$$

$$\varphi = \exp \theta T \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_\theta = p T \varphi, \quad P_\rho = \frac{(p, \varphi)}{\rho}.$$

Не составляет труда убедиться, что (4.17) определяет каноническое преобразование, причем пары  $(\alpha_n, \epsilon_n)$ ,  $(\xi, \pi_\xi)$ ,  $(\theta, P_\theta)$  и  $(\rho, P_\rho)$  являются канонически-сопряженными переменными. В этих переменных связь

$G$  имеет вид  $G = -\pi_\xi + e P_\theta = 0$ . Тогда, вводя переменные  $\chi = (\xi + \frac{1}{e} \theta)$  и  $\varphi = (-\xi + \frac{1}{e} \theta)$ , видим, что  $\chi$  - нефизическая переменная, так как её канонический импульс  $P_\chi = \frac{1}{2} G = 0$  обращается в нуль, в то время как  $\varphi$  - калибровочно-инвариантна, т.е. является физической переменной. Отсюда следует, что продольная компонента векторного поля  $\xi$  и фаза заряженного поля  $\theta$  суть линейные комбинации одной физической и одной нефизической переменных:  $\xi = (\varphi - \chi)/2$ ,  $\theta = e(\varphi + \chi)/2$ .

Тогда имеется две возможности распорядиться нефизической степенью свободы  $\chi$ . Если  $\chi$  отнести в продольную компоненту векторного поля, а  $\varphi$  в фазу заряженного поля, т.е. в (4.16)  $A_k \rightarrow \alpha_k \equiv A_k$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi_{ph} \equiv \Phi = \exp(e \chi T) \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$ , то гамильтониан в физическом подпространстве ( $P_\chi = 0$ ) примет вид

$$H_{ph} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\epsilon_n^2 + B_n^2 + P_\rho^2 + (D_k^\perp \Phi)^2 - e^2 j_0 \Delta^{-1} j_0] + V(\Phi^2) \right\}, \quad (4.18)$$

где  $D_k^\perp = \partial_k + e \alpha_k T$ ,  $j_0 = P_\Phi T \Phi = p T \varphi$  - плотность электрического заряда. Гамильтониан (4.18) описывает взаимодействие заряженных частиц с поперечными фотонами ( $\partial_n \alpha_n \equiv 0$ ). Калибровочно-инвариантное скалярное поле  $\Phi = \exp(e \Delta^{-1} \partial_n A_n T) \varphi$  описывает заряженные частицы вместе со своим кулоновским полем (в

квантовой теории плотность энергии электрического поля  $\mathcal{H}_k^2 = -\frac{\delta^2}{\delta A_k^2} |\Phi\rangle = -\frac{\delta^2}{\delta A_k^2} |\Phi\rangle \sim \Delta^{-1}$ , т.е. совпадает с плотностью энергии кулоновского взаимодействия). Очевидно, что на область изменения физических переменных  $\alpha_n$ ,  $\Phi$  никаких ограничений нет, поэтому соответствующее им ФП - плоское.

Иная ситуация возникает, когда нефизическая переменная относится в фазу заряженного поля, т.е.  $A_k \rightarrow A_k^{ph} = \alpha_k - \partial_k \varphi$ ,  $\varphi \rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$  в (4.16). Гамильтониан в физическом подпространстве имеет вид

$$H_{ph} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [E_n^2 + B_n^2 + P_\rho^2 + \frac{(\partial_n E_n)^2}{e^2 \rho^2} + (\partial_k \rho)^2 + e^2 A_k^{ph^2} \rho^2] + V(\rho^2) \right\}, \quad (4.19)$$

где  $E_n = \epsilon_n + \Delta^{-1} \partial_n P_\rho$  - импульс, канонически сопряженный  $A_n^{ph}$ . Однако гамильтониан (4.19) не годится для теории возмущений, поскольку он сингулярен при  $\rho = 0$ . Все возражения снимаются, если имеет место динамическая перестройка основного состояния (или, как говорят, спонтанное нарушение симметрии). В этом случае теория возмущений строится для отклонений поля  $\rho$  от своего вакуумного среднего. Но в такой трактовке имеется одна трудность, о которой речь пойдет в § 5. Здесь же остановимся на вопросе о структуре ФП физических переменных при "спонтанном нарушении симметрии". Очевидно, что ФП  $A_n^{ph}$  и  $E_n$  - плоское, поскольку никаких ограничений на их значения нет. С другой стороны, физические значения поля  $\rho$  лежат на полуоси. Так как фаза поля  $\varphi$  при динамической перестройке вакуума становится нефизической, то единственной физической степенью свободы, содержащейся в  $\varphi$ , является  $\rho = (\varphi^2)^{1/2} \geq 0$ . Можно рассуждать иначе. После устранения фазы у поля  $\varphi$  выбором калибровки остается еще калибровочная группа  $Z_2$  (точнее  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\infty$ -мерует точки пространства), которая изменяет знак у поля  $\rho$ . Отсюда следует, что  $\text{ФП}(\rho, P_\rho) = \text{con}(\mathbb{Z}_2)$ .

Приведенные выше рассуждения целиком переносятся на модель электрослабых взаимодействий Глэшоу - Вайнберга - Салама (ГВС). После отнесения фазовых степеней свободы дублета поля Хиггса  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  в продольные компоненты векторных полей ( $W^\pm$ ,  $Z^0$  - бозонов) остается скалярное поле  $(0, \rho)$ . Его ФП есть  $\text{con}(\mathbb{Z}_2)$ , потому что физические значения этого поля положительны  $\rho \geq 0$  (после перехода  $(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (0, \rho)$  остается возможность калибровочным преобразованием менять знак  $(0, \rho) \rightarrow (0, -\rho)$ , т.е. действует калибровочная группа  $Z_2$ ).

На языке формул действия, описанные выше для модели ГВС, выглядят следующим образом. Исходный лагранжиан возьмем в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^0 F_{\mu\nu}^0 + (\mathcal{D}_\mu \varphi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \varphi) + \bar{\Psi}_L i \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\Psi}_L + \bar{\Psi}_R i \gamma_\mu (\partial_\mu - i g' \frac{Y}{2} A_\mu^0) \Psi_R + f(\bar{\Psi}_L \varphi) \Psi_R + \text{h.c.} - V(\varphi^\dagger \varphi), \quad (4.20)$$

где  $F_{\mu\nu}^a$ ,  $F_{\mu\nu}^0$  - напряженности неабелева ( $A_\mu^a$ ) и абелева ( $A_\mu^0$ ) калибровочных полей,  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a - i g' \frac{Y}{2} A_\mu^0 = \nabla_\mu - i g' \frac{Y}{2} A_\mu^0$ ,  $\Psi_L = (\Psi^+)$ ,  $\varphi = (\varphi^+)$ ,  $Y_L = -1$ ,  $Y_R = -2$ ,  $Y_\varphi = 1$ . Константы связи  $g$  и  $g'$  отвечают группам симметрии  $SU_L(2)$  и  $U_Y(1)$  соответственно,  $Y$  - гиперзаряд,  $f$  - юкавовская константа связи. Чтобы не загромождать выкладки, рассматривается только одно фермионное поколение  $\Psi_L$ ,  $\Psi_R$ .

Задача состоит в том, чтобы переписать (4.20) в синглетных по подгруппе слабого изоспина  $SU_L(2)$  переменных. Для этого воспользуемся методом, предложенным в работах [31, 32]. В отличие от разобранного абелева случая переход к унитарной калибровке в модели ГВС  $\varphi = (\rho, \varphi)$  не фиксирует полностью калибровочный произвол, а сводит его к одномерному, абелеву, зависящему от одной произвольной функции  $\omega(\alpha)$ , так как калибровочная группа -  $SU(2) \otimes U(1)$ . Введем унитарную матрицу, описывающую фазовые степени свободы дублета  $\varphi$  [32]

$$U_Y = \frac{e^{i\alpha \frac{Y}{2}}}{\sqrt{\varphi + \varphi}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2} \varphi_2} & -e^{i\frac{\alpha}{2} \varphi_1} \\ e^{-i\frac{\alpha}{2} \varphi_1^*} & e^{-i\frac{\alpha}{2} \varphi_2^*} \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Наличие в  $U_Y$  произвольной функции  $\alpha(x)$  отражает остаточный калибровочный произвол в унитарной калибровке. В качестве новых переменных в (4.20) возьмем  $SU_L(2)$  калибровочно-инвариантные

$$\varrho = U_{Y=1} \varphi = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \chi_L = U_{Y=-1} \Psi_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

$$e_R \equiv U_{Y=-2} \Psi_R, \quad U_{Y=-2} \equiv e^{-i\alpha}, \quad (4.22)$$

$$g \frac{\tau^a}{2} B_\mu^a + g' \frac{Y}{2} B_\mu^0 \equiv U_Y \left( g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a + g' \frac{Y}{2} A_\mu^0 - \frac{1}{i} \partial_\mu \right) U_Y^\dagger.$$

Новые переменные выражаются через старые (см (4.20))  $SU(2)$ -инвариантным образом, но с некоторым произволом, зависящим от фазы  $\alpha$

$$\varrho = (\varphi^\dagger \varphi)^{1/2}, \quad \nu_L = (\tilde{\varphi}^\dagger \Psi_L) / \varrho, \quad e_L = e^{i\alpha} (\varphi^\dagger \Psi_L) / \varrho,$$

$$e_R = e^{-i\alpha} \Psi_R, \quad B_\mu^0 = A_\mu^0 + \frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha, \quad B_\mu^3 = \frac{1}{ig} \frac{\varphi^\dagger \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \varphi}{\varphi + \varphi} + \frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha,$$

$$\sqrt{2} W_\mu^+ = B_\mu^1 - i B_\mu^2 = \frac{-1}{ig} \frac{\tilde{\varphi}^\dagger \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \varphi}{\varphi + \varphi} e^{i\alpha}, \quad W_\mu^- \equiv (W_\mu^+)^\dagger, \quad (4.23)$$

где  $\nabla_\mu = \partial_\mu - i g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a$ ,  $\tilde{\varphi}^\dagger = \epsilon_{\alpha\beta} \varphi^\dagger \beta$  - дуально сопряженное скалярное поле,  $\overleftrightarrow{\nabla}_\mu = \overrightarrow{\nabla}_\mu - (\overleftarrow{\nabla}_\mu)^\dagger = \partial_\mu - 2i g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a$ . Присутствующий в (4.23) произвол может быть связан с абелевой калибровочной группой электрического заряда  $Q$ :  $\exp iQ\alpha$ . Чтобы получить поле, описывающее фотон, заметим, что комбинация полей

$$Z_\mu^0 = \frac{g B_\mu^3 - g' B_\mu^0}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = -\frac{i}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{\varphi^\dagger \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \varphi}{\varphi + \varphi} \quad (4.24)$$

не содержит произвола  $\partial_\mu \alpha$  и соответствует нейтральному векторному бозону. Ортогональная к (4.24) комбинация

$$J_\mu = \frac{g' B_\mu^3 + g B_\mu^0}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos\theta B_\mu^0 + \sin\theta \frac{\varphi^\dagger \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \varphi}{ig\varphi + \varphi} + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha, \quad (4.25)$$

где  $\text{tg}\theta = g'/g$ ,  $e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$  - электрический заряд, соответствует полю фотона.

В правильности этого выбора можно убедиться, переписав лагранжиан (4.20) в терминах калибровочно-инвариантных переменных (4.22). Это нетрудно сделать, поскольку переход к новым переменным по существу связан с калибровочным преобразованием в (4.20) с матрицей  $U_Y$ . Полученный лагранжиан (см. [32]) совпадает с хорошо известным лагранжианом модели ГВС с учетом "спонтанного нарушения симметрии". Преобразования (4.23) сингулярны при  $\varrho = 0$ , поэтому полученный эффективный лагранжиан будет иметь смысл только тогда, когда динамика системы устроена так, что поле  $\varrho$  не принимает нулевых значений. Это реализуется, например, в случае, если  $\langle \varrho \rangle_0 \neq 0$ , т.е. имеет место "спонтанное нарушение симметрии". Однако следует подчеркнуть, что переменные (4.23) уже калибровочно-инвариантны, так что говорить о спонтанном нарушении калибровочной симметрии как о явлении, подобном спонтанному нарушению глобальной симметрии, нельзя.

Как следует из (4.23),  $\varrho = (\varphi^\dagger \varphi) > 0$ , следовательно,  $\varrho$  - поле Хиг-

гса в модели ГВС есть  $\text{con}(\pi)$ . Это ведет к фундаментальным следствиям для хиггсовского бозона, о которых пойдет речь в § 5.3.

### 5. Некоторые следствия редукции физического ФП

#### 5.1. Квазиклассическое описание для системы с $\Phi\Pi = K \otimes H$

Как было показано в § 3.3, редукция физического ФП ведет к модификации КИ. В случае, когда исходное действие системы квадратично по динамическим переменным, явное вычисление модифицированного КИ показывало, что редукция ФП изменяет физический спектр системы. Вторым, и, видимо, пока единственным, методом непертурбативного вычисления КИ является квазиклассическое приближение. Нашей ближайшей целью будет выяснение вопроса о влиянии модификации КИ (3.24) на квазиклассическое описание [25, 33].

Начнем с простейшего примера квантовомеханических инстантонов в модели (3.1) с группой  $SU(2) \sim SO(3)$  и с периодическим потенциалом  $V = 1 - \cos(\tau_2 x^2)^{1/2}$ . В этой модели имеется вырождение вакуумного состояния  $\tau_2 x^2 = (2\pi m)^2$ ,  $m$  - целое. В квантовой теории вырождение снимается за счет туннельных эффектов, каждое состояние в окрестности локального минимума потенциала расплывается в зону. Эффект можно описать с помощью инстантонов, которые являются решениями классических уравнений движения в мнимом времени [35, 34], т.е. нужно рассмотреть евклидов вариант теории:  $t \rightarrow -i\tau$ ,  $y \rightarrow iy$ ,  $L \rightarrow L_E = \frac{1}{2} \tau_2 (\mathcal{D}_\tau x)^2 + V(x)$ .

В случае группы ранга  $\ell = 1$  имеется только одна физическая степень свободы:  $\tau = (\tau_2 x^2)^{1/2}$ , причем ей отвечает ФП =  $\text{con}(\pi)$ . Наша задача состоит в том, чтобы найти изменения известных формул для аналогичной модели с одной степенью свободы (без калибровочной симметрии), ФП которой есть  $\mathbb{R}^2$ . Такая модель рассматривалась в [36].

Решения классических уравнений движения  $\partial_\tau \frac{\partial L_E}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_E}{\partial x}$ ,  $\dot{x} = \partial_\tau x$  возьмем в виде

$$x_{ins}(\tau) = \tau_{ins}(\tau) \lambda_3, \quad \tau_{ins}(\tau) = 4 \arctg \exp(\tau - \tau_c) + 2\pi m, \quad (5.1)$$

где  $m$  - целое,  $y(\tau) \in H$ ,  $\lambda_3$  - единственный базисный элемент в  $H$ ,  $\tau_c = \text{const}$ . Решение (5.1) определено с точностью до калибровочного преобразования (3.2). Оно связывает локальные минимумы потенциала:  $\tau_2 x_{ins}^2 \rightarrow (2\pi m)^2$ ,  $\tau \rightarrow \infty$  и  $\rightarrow (2\pi(m-1))^2$ ,  $\tau \rightarrow -\infty$ , т.е. обладает характеристическим свойством инстантона [34]. Если физические переменные выделяются условиями  $x_{1,2} = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x_3 \equiv \tau$ , то решение (5.1) совпадает с аналогичным для модели [36, 35]  $L_E =$

$= \frac{1}{2} \dot{\tau}^2 + 1 - \cos \tau$ . Однако отличие, которое здесь существует, состоит в том, что ФП единственной степени свободы в модели [36] плоское ( $\Phi\Pi = \mathbb{R}^2$ ), а в нашей модели ФП единственной физической степени свободы есть  $\text{con}(\pi)$ .

Чтобы учесть редукцию физического ФП, воспользуемся формулой (3.24)

$$U_\tau^c(\tau, \tau') = \frac{1}{\tau \tau'} (U_\tau(\tau, \tau') - U_\tau(\tau, -\tau')). \quad (5.2)$$

Согласно идеологии инстантонной физики [33, 34] для того, чтобы найти уровни в зоне и приближенное выражение для волновой функции уровня в нижней зоне, необходимо вычислить амплитуду (5.2) при  $\tau = 2\pi m$ ,  $\tau' = 2\pi m'$ ,  $\tau \rightarrow \infty$  в приближении инстантонного газа [35]. Амплитуда  $U_\tau(2\pi m, 2\pi m')$  для соответствующей системы с плоским ФП вычислена в [35] и равна

$$U_\tau(2\pi m, 2\pi m') \equiv \langle 2\pi m | e^{-\tau \hat{H}} | 2\pi m' \rangle \equiv \int_0^{2\pi} \langle 2\pi m | \theta \rangle \langle \theta | 2\pi m' \rangle e^{-\tau E_\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi^{3/2}} e^{i(m-m')\theta} e^{-\tau E_\theta}, \quad (5.3)$$

где  $E_\theta = \frac{1}{2} - \exp(-S_0) \sqrt{S_0} K \cos \theta$  - уровни энергии в нижней зоне,  $K$  - инстантонный детерминант с выкинутыми нулевыми модами, отнормированный на детерминант осциллятора [35, с. 308],  $\theta$  нумерует уровни в зоне. Заметим, что замена  $\theta \rightarrow -\theta$  в показателях экспонент в (5.3) не меняет значения интеграла (в этом легко убедиться, сделав замену переменных в интеграле  $\theta \rightarrow -\theta + 2\pi$ ). Тогда

$$U_\tau(2\pi m, 2\pi m') = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi^{3/2}} e^{-\tau E_\theta} \left( e^{i(m-m')\theta} + e^{-i(m-m')\theta} \right). \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (5.2), получаем для "конической" амплитуды перехода

$$U_\tau^c(2\pi m, 2\pi m') = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin m\theta \sin m'\theta}{m m'} e^{-\tau E_\theta}. \quad (5.5)$$

Из (5.5) видно, что редукция физического ФП не влияет на уровни энергии в нижней зоне. Приближенное выражение для волновой функции  $\theta$ -вакуума (уровня  $E_\theta$ )  $\langle \tau | \theta \rangle$  выбирается в виде линейной комбинации волновых функций основных состояний в окрестности каждого минимума  $V$ , т.е.  $\langle \tau | 2\pi m \rangle \sim \exp[-\frac{1}{2}(\tau - 2\pi m)^2]$ , так чтобы  $\langle \tau = 2\pi m | \theta \rangle = \langle 2\pi m | \theta \rangle$  [35]. Амплитуда  $\langle 2\pi m | \theta \rangle$  находится из

разложения (5.3) в случае  $\Phi\Pi = \mathbb{R}^2$  и из (5.5) для  $\Phi\Pi = \text{con}(\mathbb{T})$ . Для  $\Phi\Pi = \mathbb{R}^2$  имеем [35]  $\langle r|\theta\rangle = \text{const} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-im\theta) \langle r|2\mathbb{T}m\rangle$ , в то время как из (5.5) вытекает

$$\langle r|\theta\rangle^c = \text{const} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\theta}{m} \langle r|2\mathbb{T}m\rangle. \quad (5.6)$$

В соответствии с (3.27) для функций (5.6) определено скалярное произведение  $\langle \theta|\theta'\rangle^c = \int_0^\infty dr r^2 \langle \theta|r\rangle^c \langle r|\theta'\rangle^c$ . Таким образом, редукция физического  $\Phi\Pi$  не меняет энергию  $\theta$  - вакуума, но изменяет его волновую функцию. Однако следует отметить, что если бы уровни в зоне были дискретными, то некоторые из них оказались бы исключенными из амплитуды (5.2), т.е. были бы нефизическими. Следовательно, дискретный спектр в зоне зависит от структуры  $\Phi\Pi$ . В этом легко убедиться на примере модели с двугорбым потенциалом  $V = (r^2 - a^2)^2/4!$ , рассмотренном в [34]. Ситуация аналогична точнорешаемым системам: свободная частица и осциллятор. Редукция  $\Phi\Pi$  влияет на спектр осциллятора и не влияет на спектр свободной частицы.

Результат (5.6) можно обобщить на случай произвольной группы, не прибегая к решению конкретной модели. Пусть потенциал  $V(x) = V(h)$ ,  $h \in H$  в модели (3.1) имеет в  $K^+$  бесконечную серию вырожденных минимумов  $\min V = V(h_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Тогда во всей  $H$  потенциал  $V(h)$  имеет минимумов в  $N_w$  (число элементов в группе Вейля  $W$ ) раз больше:  $\min V = V(h_m) = V(\hat{w}h_m)$ . Учет редукции  $\Phi\Pi$  физических степеней свободы  $h = \lambda_\alpha h_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, \ell = \dim H$ ) производится по формуле (3.24), которую с учетом равенства

$$U_\tau(h, h') = U_\tau(\hat{w}h, \hat{w}h'), \quad w \in W, \quad (5.7)$$

следующего из симметрии потенциала  $V(h) = V(\hat{w}h)$ , перепишем в виде

$$U_\tau^c(h, h') = \frac{1}{N_w} \sum_{w, w'} [\mu(\hat{w}h) \mu(\hat{w}'h')]^{-1} U_\tau(\hat{w}h, \hat{w}'h'). \quad (5.8)$$

Аналогично (5.3), запишем амплитуду перехода для случая плоского  $\Phi\Pi$ :

$$U_\tau(\hat{w}h_m, \hat{w}'h_{m'}) \cong \int d\theta \langle \hat{w}h_m|\theta\rangle \langle \theta|\hat{w}'h_{m'}\rangle e^{-\tau E_\theta}, \quad (5.9)$$

где  $E_\theta$  - уровни энергии в зоне, а  $\theta$  - вообще говоря, многомерный параметр, нумерующий уровни в зоне. Подставляя (5.9) в (5.8), находим амплитуду  $U_\tau^c(h_m, h_{m'})$ . Тогда, согласно общему рецепту построения волновой функции  $\theta$  - вакуума, имеем для нередуци-

рованного  $\Phi\Pi$

$$\langle h|\theta\rangle = \text{const} \sum_w \sum_{m=1}^{\infty} \langle \hat{w}h_m|\theta\rangle \langle h|\hat{w}h_m\rangle, \quad (5.10)$$

где  $\langle h|\hat{w}h_m\rangle \sim \exp[-\frac{1}{2}T_\tau(h - \hat{w}h_m)^2]$  - волновая функция основного состояния в окрестности минимума потенциала  $h = \hat{w}h_m \in H$  без учета туннельных эффектов (считаем, что частоты малых колебаний единичны). Суммирование в (5.10) ведется по всем локальным минимумам  $V$  в  $H$ . С другой стороны, из (5.8) следует для  $\theta$  - вакуума с учетом редукции  $\Phi\Pi$

$$\langle h|\theta\rangle^c = \text{const} \sum_w \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{w'} \frac{\langle \hat{w}'h_m|\theta\rangle}{\mu(\hat{w}'h_m)} \right) \langle h|\hat{w}h_m\rangle. \quad (5.11)$$

Волновая функция (5.11) является четной относительно группы  $W$   $\langle \hat{w}h|\theta\rangle^c = \langle h|\theta\rangle^c$ , а (5.10) этим свойством не обладает. Отсюда, в частности, вытекает упомянутое выше различие дискретного и непрерывного спектров  $E_\theta$ . Если бы спектр  $E_\theta$  был дискретным, то части уровней в зоне (5.10) отвечали бы нечетные относительно  $W$  состояния. Поэтому эти уровни оказались бы нефизическими и не попали бы в (5.11). Для непрерывного спектра нет расщепления по свойству четности относительно  $W$ .

Функция (5.11) может быть продолжена калибровочно-инвариантным образом на всю алгебру  $X$  по теореме Шевалле, ввиду её инвариантности относительно  $W$ . Хотя следует обратить внимание на то, что между (5.10) и (5.11) нет привычной связи [24]  $\Psi_E(h) = \sum_w \mu^{-1}(\hat{w}h) \varphi_E(\hat{w}h)$ , где  $\Psi_E(h)$  - волновая функция системы с редуцированным  $\Phi\Pi$ ,  $\varphi_E(h)$  - волновая функция соответствующей системы с плоским  $\Phi\Pi$ , которая вытекает из анализа уравнения Шредингера (см. §§ 3.3 и 3.5, также (3.20)).

Возможно, вместо (5.11) следует написать

$$\langle h|\theta\rangle^c = \sum_w \mu^{-1}(\hat{w}h) \langle \hat{w}h|\theta\rangle, \quad (5.12)$$

исходя из анализа уравнения Шредингера. Соотношение (5.12) справедливо для (5.11) и (5.10) только в точках локального минимума потенциала  $h = \hat{w}h_m$ . Вопрос о том, что предпочтительнее, (5.12) или (5.11), есть, по существу, вопрос о квазиклассическом приближении в криволинейных координатах, т.е. вопрос о том, как поступать с мерой в  $KI$  (которая всегда присутствует при описании в криволинейных координатах) при его квазиклассическом вычислении. Однако, с другой стороны, с квазиклассической степенью точности (5.12) и (5.11)



можно считать совпадающими, поскольку волновые функции сосредоточены в основном в окрестности  $h = \hat{w} h_m$  - точек локального минимума потенциала.

## 5.2. Спектр возбуждений квантового солитона с $\Phi\Pi = \text{con}(\mathcal{T})$

Структура  $\Phi\Pi$  влияет на спектр внутренних возбуждений квантового солитона. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим заряженное скалярное поле в  $(I + I)$  - пространстве-времени, динамика которого задается лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L}(x,t) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |\partial_\mu \varphi + ie A_\mu \varphi|^2 + \frac{m^4}{\lambda} \left( \cos \frac{\sqrt{\lambda} |\varphi|}{m} - 1 \right), \quad (5.13)$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  - электромагнитное поле,  $\mu, \nu = 0, 1, m$ ,  $\lambda$ ,  $e$  - константы. Теория допускает солитоны в скалярном секторе. Действительно, можно проверить, что

$$A_\mu = 0, \quad \sqrt{2} \varphi \equiv \rho = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \left[ \frac{\sin(mv\tau(1+v^2)^{-1/2})}{v \text{ch}(mx(1+v^2)^{-1/2})} \right] \quad (5.14)$$

удовлетворяют лагранжевым уравнениям движения,  $v$  - параметр. (При подстановке в лагранжевы уравнения движения  $A_\mu = 0$  и  $\varphi = \rho/\sqrt{2}$  они сводятся к уравнению движения модели синус - Гордон [35]). При квантовании в окрестности классического решения фазу заряженного поля (точнее физическую компоненту фазы, см. § 4.3) следует отнести в продольную компоненту векторного поля (калибровочная симметрия "спонтанно нарушена"), при этом вещественное скалярное поле будет иметь  $\Phi\Pi = \text{con}(\mathcal{T})$ , как было выяснено в § 4.3.

Наша задача заключается в том, чтобы найти квантовые уровни солитона (5.14). Такие уровни всегда существуют у солитонов, периодических во времени. Решение (5.14) имеет период  $\mathcal{T} = 2\mathcal{T}(1+v^2)^{1/2}/mv$ , и в модели синус - Гордон оно называется бризером. В квантовой теории оно интерпретируется как связанное состояние солитона и антисолитона [35].

Допустим вначале, что  $\Phi\Pi$  поля  $\rho$  плоское. Тогда уровни внутренних возбуждений можно получить методом ВКБ [35]. Суть его состоит в том, что нужно вычислить действие солитона (5.14) как функцию периода  $\mathcal{T} : S_{\text{con}}(\mathcal{T}) = \int_0^{\mathcal{T}} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}|_{\text{бр.пер}}$ . Затем определить период как функцию энергии солитона  $E = -d/d\mathcal{T} S_{\text{con}}(\mathcal{T})$ . Квантовые уровни энергии  $E$  находятся из стандартного условия Бора - Зоммерфельда

$$W(E) \equiv S_{\text{con}}(\mathcal{T}(E)) + E\mathcal{T}(E) = 2\mathcal{T}n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

В теории поля это условие несколько отличается от условия Бора - Зоммерфельда в квантовой механике. Это видно из (5.15), в правой части (5.15) отсутствует вклад вакуумных колебаний. Дело в том, что в теории поля число степеней свободы бесконечно, поэтому вакуумная энергия также оказывается бесконечной, следовательно, требуется перенормировка. Перенормированное значение вакуумной энергии относят в так называемое ренормированное действие, т.е. в (5.15)  $S_{\text{con}}(\mathcal{T}) \rightarrow S_{\text{con}}^{\text{рен}}(\mathcal{T})$ . (Для перенормировки энергии вакуума в исходное действие вводят необходимые контрчлены для сокращения расходимостей). Эта процедура для бризера подробно разобрана в [35]. Уравнение (5.15) дает  $E_n = \frac{16m}{\gamma} \sin \frac{n\gamma}{16}$ ,  $n = 1, 2, \dots < 8\mathcal{T}/\gamma$ , где  $\gamma = (\lambda/m^2)(1 - \lambda/8\mathcal{T}m^2)$  [35]. При  $n > 8\mathcal{T}/\gamma$  бризер диссоциирует на солитон и антисолитон, так как его период становится бесконечным  $\mathcal{T}(E_n) \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим временную эволюцию решения (5.14) в фиксированной точке пространства  $\mathcal{X}$ . Коничность  $\Phi\Pi$  поля  $\rho$  означает, что в каждой точке пространства  $\mathcal{X}$  на фазовой плоскости  $\rho(x,t)$  и  $\rho_p = \partial_t \rho(x,t)$  точки  $(\rho, \rho_p)$  и  $(-\rho, -\rho_p)$  калибровочно-эквивалентны. Следовательно, период физических колебаний бризера  $\mathcal{T}^c$  будет вдвое меньше, т.е.  $\mathcal{T}^c = \mathcal{T}/2$  (подобно осциллятору см. § 2.1). Индексом "с" ниже снабжаем все величины, относящиеся к системе с  $\Phi\Pi = \text{con}(\mathcal{T})$ . Классическое действие  $S_{\text{con}}^c(\mathcal{T}^c)$  за период  $\mathcal{T}^c$  получается интегрированием по времени от нуля до  $\mathcal{T}^c$  лагранжиана (5.13) на решении (5.14). Ввиду квадратичности  $\mathcal{L}$  по  $\rho$  имеем

$$S_{\text{con}}^c(\mathcal{T}^c) = \frac{1}{2} S_{\text{con}}(2\mathcal{T}^c). \quad (5.16)$$

Определим  $\mathcal{T}^c$  как функцию энергии  $E^c$  уравнением  $E^c = -\frac{d}{d\mathcal{T}^c} S_{\text{con}}^c(\mathcal{T}^c)$ . Из (5.16) находим  $E^c = -\frac{d}{d\mathcal{T}^c} S_{\text{con}}(\mathcal{T})|_{\mathcal{T}=\mathcal{T}^c}$ , откуда  $\mathcal{T}^c(E^c) = \frac{1}{2}\mathcal{T}(E^c)$ . Наконец, условие квантования дает  $W^c(E^c) = S_{\text{con}}^c(\mathcal{T}^c) + E^c\mathcal{T}^c(E^c) = \frac{1}{2} S_{\text{con}}(\mathcal{T}(E^c)) + \frac{1}{2} E^c\mathcal{T}(E^c) = \frac{1}{2} W(E^c) = 2\mathcal{T}n$ . Следовательно, спектр солитона с  $\Phi\Pi = \text{con}(\mathcal{T})$  имеет вид

$$E_n^c = E_{2n}, \quad (5.17)$$

где  $E_n$  определены выше, для солитона с плоским  $\Phi\Pi$ . Таким образом, редукция  $\Phi\Pi$  ведет к исключению части внутренних возбуждений квантового солитона из числа физических (наблюдаемых).

### 5. 3. Природа бозона Хиггса

В § 4.3 было показано, что структура ФП физических степеней свободы зависит не только от вида самой системы, но и от её физической трактовки. Теория, описываемая гамильтонианом (4.18), содержит только калибровочно-инвариантные переменные, причем ФП всех степеней свободы плоское. Иная ситуация возникает при динамической перестройке основного состояния, т.е., когда имеет место феномен Хиггса. В формальной (математической) трактовке этого явления поле  $\Phi = \exp eT(\varphi)$  записывается в полярной системе координат, после чего фаза  $\gamma$  (калибровочный инвариант) переносится в продольную компоненту векторного поля  $A_k = \alpha_k - \partial_k \gamma$ . В результате получается гамильтониан (4.19), пригодный для описания феномена Хиггса. Векторное поле становится массивным, а поле Хиггса  $\varphi$ , как было найдено, обладает коническим ФП.

Остановимся более подробно на анализе динамики скалярного поля с ФП  $= \cos(\pi)$ . Первое, на что следует обратить внимание, это построение самосогласованной квантовой теории.

Поле  $\varphi \geq 0$  не может считаться нормальной канонической переменной, поскольку соответствующий ему канонически-сопряженный оператор импульса не является самосопряженным и не расширяется до него. Следовательно, в строгом смысле не существует квантовой теории, основанной на гамильтониане (4.19)<sup>x</sup>. Однако эту трудность можно обойти, если строить квантовую теорию в полном конфигурационном пространстве. Коничность ФП поля  $\varphi$  учитывается требованием  $\sum_2$  калибровочной инвариантности всех физических величин. Но при таком подходе элементарное поле  $\varphi$  не может выполнять роль поля Хиггса. Действительно, его вакуумное ожидание  $\sum_2$ -неинвариантно:  $v = \langle \varphi \rangle_0 = -\langle \varphi \rangle_0 = -v$ , т.е.  $v = 0$ . Более того, поле с ФП  $= \cos(\pi)$  не может распространяться, поскольку все его функции Вайт-

x) Обозначим  $\hat{p} = -i d/dx$ . Рассмотрим  $\hat{p}$  на полуоси. Чтобы  $\hat{p}^+ = \hat{p}$ , по определению, нужно, чтобы выполнялось равенство  $\int_0^\infty dx (\hat{p}\psi)^* \psi = \int_0^\infty dx \psi^* (\hat{p}\psi)$ . Отсюда следует, что все функции должны удовлетворять условию  $\psi(0) = 0$ . С другой стороны, если  $\hat{p}^+ = \hat{p}$ , то, как и всякому самосопряженному оператору,  $\hat{p}$  должна соответствовать полная система собственных функций. Однако нетрудно проверить, что уравнение  $\hat{p}\psi = p\psi$ , где  $p$  - вещественное число, с дополнительным условием  $\psi(0) = 0$  не имеет решений, кроме тривиального  $\psi = 0$ , поэтому  $\hat{p}^+ \neq \hat{p}$ . Эти соображения можно назвать физическими. Строгое математическое доказательство того, что  $\hat{p}^+ \neq \hat{p}$  на полуоси и не расширяется до самосопряженного, можно найти в [37].

мана также равны нулю  $\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle_0 = 0$  (можно изменять знак в любой точке  $x$  независимо), если  $x_1 \neq \dots \neq x_n$ . Здесь мы воспользовались калибровочной инвариантностью вакуума, как любого другого физического состояния.

Следует подчеркнуть принципиальное отличие спонтанного нарушения глобальной симметрии от "нарушения" калибровочной симметрии. В первом случае динамика может быть в принципе такой, что вакуумное ожидание генераторов симметрии гамильтониана окажется отличным от нуля, т.е. основное состояние имеет симметрию меньшую, нежели гамильтониан. В калибровочной теории генераторы симметрии гамильтониана являются одновременно и связями, которые обращают в нуль всякое физическое состояние, в том числе и вакуум. Связи, с другой стороны, выражают условия непротиворечивости теории, поэтому отказ от их выполнения ведет к отказу от исходного лагранжиана системы (либо к противоречивой динамике), как это было продемонстрировано в § 3.4. Поэтому калибровочная симметрия не может быть нарушена каким-либо образом (см. также [31, 32]). В работах [31]\*, авторы, изучая модель ГВС на решетке, пришли к аналогичному выводу:  $\langle \varphi(x) \rangle_0 = 0$ , а двухточечные функции Грина обращаются в нуль в непрерывном пределе).

Однако, как было показано в конце § 4.3 при описании феномена Хиггса, можно ввести калибровочно-инвариантное поле  $\varphi = \sqrt{\varphi^+ \varphi}$ , тогда  $\langle \varphi \rangle_0 = v \neq 0$ . Как уже говорилось выше, такое элементарное поле не является хорошей канонической переменной. Поэтому в квантовой теории его следует трактовать как составной оператор исходных переменных  $\varphi$ . Для того, чтобы такое составное поле имело корпускулярное проявление (это необходимо для перенормируемости модели ГВС), матричные элементы этого поля должны обладать полюсными особенностями в импульсном пространстве. Тем самым проблема сводится к динамическому вопросу о существовании связанных состояний полей  $\varphi$ . Таким образом, поле Хиггса оказывается составным объектом.

Следует еще остановиться на различии квантовой механики и теории поля. В квантовой механике калибровочно-инвариантное скалярное произведение операторов рождения  $\hat{a}_i^+ \hat{a}_i^+$  при действии на вакуум дает собственный вектор гамильтониана. В теории поля инвариантным будет только произведение полей  $\hat{\varphi}_\alpha(x) \hat{\varphi}_\alpha(x)$  в то время как  $\hat{a}_\alpha^+(k) \hat{a}_\alpha^+(k)$  ( $k$  - импульс) не является калибровочным инвариантом, так как  $\hat{\varphi}(x)$  и  $\hat{a}_\alpha^+(k)$  связаны нелокальным преобразованием. Однако поле  $\hat{\varphi}_\alpha(x) \hat{\varphi}_\alpha(x)$  не удовлетворяет асимптотическому условию Лемана-Симанзика - Циммермана [38] (см. также [39, гл. 16]), т.е. для него не существует соответствия  $\hat{\varphi}_\alpha(x) \hat{\varphi}_\alpha(x) \rightarrow \rho_{in/out}(x), t \rightarrow \pm\infty$ , где  $\rho_{in/out}$  - локальные асимптотичес-

\* См. также работу/51/.

кие свободные поля. Лишь если существует аппроксимирующее поле  $\rho(\alpha)$ , такое, что  $\rho \rightarrow \rho_{int}$ ,  $t \rightarrow \pm \infty$  и  $\langle \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\alpha(y) \hat{\rho}(z) \rangle \neq 0$ , т.е. если существует связанное состояние полей  $\hat{\psi}_\alpha$ , отвечающее полю  $\rho$ , только в этом случае можно говорить о корпускулярном проявлении поля  $\psi_\alpha$ . Приведенные рассуждения являются следствием бесконечности числа степеней свободы в теории поля. Поле  $\Phi$  в (4.18) описывает заряженную частицу вместе со своим кулоновским полем. При формальном описании феномена Хиггса мы "оторвали" кулоновское поле частицы, описываемое переменной  $\eta$ , и эту степень свободы перенесли в продольную компоненту векторного поля, тем самым перешли к (4.19). Но с физической точки зрения эта процедура неудовлетворительна, так как кулоновское поле реально нельзя оторвать у заряженной частицы (оно является её атрибутом). Поэтому можно попробовать рассуждать иначе. В принципе, ничто не запрещает в гамильтониане (4.18) в качестве  $V(\phi^2)$  потенциал хиггсовского типа, т.е.  $\min V = V(\phi^2 = v^2)$ . Гамильтониан (4.18) обладает только глобальной  $SO(2)$ -симметрией, поэтому на первый взгляд она может быть спонтанно нарушена, т.е. в качестве основного состояния можно было бы выбрать, например,  $\langle v | \phi_1 | v \rangle = v$ , а  $\phi_2$  отправить в продольную компоненту векторного поля. Однако такое состояние не является основным, т.е. вакуумом, поскольку его энергия оказывается выше, чем у состояния  $\langle 0 | \phi_\alpha | 0 \rangle = 0$ . Дело в том, что конденсат поля  $\Phi$  имеет заряд (конденсируется заряженное поле), поэтому в вакууме плотность электрического заряда  $j_e(x)$  будет отлична от нуля  $j_e(x) = j_e = \text{const}$ . Увеличение кулоновской энергии конденсата превосходит уменьшение энергии самодействия поля  $\Phi$  при переходе в состояние  $\langle v | \phi_1 | v \rangle = v$ . Действительно, возьмем стандартный потенциал  $V = \lambda(\phi^2 - v^2)^2/4!$ , тогда изменение энергии самодействия есть  $\Delta E \sim -\lambda v^4 V$ , где  $V$  - объем системы. Изменение кулоновской энергии, очевидно, равно энергии кулоновского расталкивания конденсата  $\Delta E_{кул} \sim \int d^3x j_e \Delta^{-1} j_e \sim j_e^2 V^{5/3}$  (интегрирование по каждой координате дает множитель  $V^{1/3}$ , ядро  $\Delta^{-1} \sim |x-y|^{-1}$  дает  $\sim V^{-1/3}$ ). Поскольку  $V \rightarrow \infty$ , то очевидно, что  $\Delta E_{кул} \gg \Delta E$ . Поэтому элементарное заряженное поле также не может образовывать конденсат, ввиду дальнего действия кулоновских сил. Следует, однако, отметить, что указанную трудность с кулоновским расталкиванием можно обойти, если взять, скажем, два скалярных поля с противоположными зарядами, так, чтобы они конденсировались с одинаковой плотностью. Это приведет к нулевой плотности заряда вакуума, подобно сверхпроводнику, где заряд конденсата поля Хиггса (поля куперовских пар) компенсируется зарядом атомного остова (впрочем, такое рассуждение оказывается справедливым только для моделей с абелевой симметрией [40]).

Итак, мы приходим к выводу, что как формальная (математическая), так и физическая трактовка феномена Хиггса в калибровочной теории ве-

дут к одному и тому же выводу: элементарное скалярное поле не может выполнять роль поля Хиггса. Если допустить, что поле Хиггса построено из каких-либо других полей, то, вообще говоря, меняется закон калибровочных преобразований. Он совпадает со стандартным только в локальном пределе, т.е. когда калибровочные функции мало меняются на расстоянии порядка размера связанного состояния. У такого поля после отнесения фазы в продольную компоненту векторного поля уже не будет нетривиальной дискретной остаточной калибровочной группы: для каждого из двух составляющих полей это будет группа  $\Sigma_2$  (калибровочная группа имеет ранг 1), поэтому для составного поля остаточная группа - тривиальная, состоящая из единицы. Тогда заключаем, что в калибровочных теориях перестройка основного состояния, связанная с появлением у векторных полей массы, есть процесс, целиком обусловленный динамикой системы: он возможен лишь при наличии составных скалярных полей с эффективным самодействием хиггсовского типа.

В заключение коснемся вопроса о сверхпроводимости как примера теории, где конечность ФП некоторых физических степеней свободы (поля электронов проводимости) приводит к составному полю Хиггса. В сверхпроводнике калибровочная симметрия  $U(1)$  взаимодействия между электронами проводимости "нарушается", т.е. электромагнитное поле в сверхпроводнике приобретает "массу" - эффект Мейснера [41, § 8.4]. Следовательно, в формальном подходе физическая компонента фазы спинорного (грассманового) поля электронов  $\psi$  относится в продольную компоненту электромагнитного поля. При этом фаза спинорного поля становится нефизической, что ведет к конечности ФП физических компонент спинора (см. § 2.6). В квантовой теории это означает, что физическими величинами являются  $\Sigma_2$ -локально-четные (см. § 2.7), т.е. калибровочными инвариантами электронного поля оказываются  $\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x)$  ( $\alpha, \beta$  - нумеруют поляризации электронов). Данное локальное поле будет иметь корпускулярное проявление, если динамика устроена так, что существует связанное состояние полей  $\psi_\alpha(x)$  (см. рассуждения, проведенные выше относительно составных операторов). Это, действительно, наблюдается на практике, роль квантов этого составного поля играют куперовские пары. Аналогичная трактовка сверхпроводимости была дана Вайнбергом [42], где он предположил, что калибровочная группа электродинамики  $U(1)$  нарушается до  $\Sigma_2$  в сверхпроводнике. Очевидно, что в нашем подходе этого предположения не требуется, а сохранение  $\Sigma_2$  как калибровочной группы есть следствие конечности ФП физического спинорного поля.

Теперь встанем на физическую точку зрения, т.е. не будем отрывать кулоновское поле от электронов, как было сделано в формальной трак-

товке. Какой объект играет роль продольной компоненты векторного поля в этом случае? Очевидно, этот объект — кулоново поле зарядов, но движение его сопровождается движением самих зарядов. В самом деле, движение электромагнитной волны вызывает возмущение заряженной среды (конденсата куперовских пар), колебания этой среды порождают колебания ее кулонова поля, которые и образуют эффективно продольную степень свободы у векторного поля.

Подведем итоги рассмотрения роли дискретных калибровочных групп, редуцирующих ФП физических переменных в теории поля. Во-первых, поле с редуцированным ФП не может распространяться и не имеет корпускулярного проявления. Ясно, что вывод справедлив и в общем случае, т.е. когда ФП редуцируется калибровочной группой Вейля (инварианты группы Вейля в любом представлении всегда есть полиномы степени больше единицы).

Во-вторых, требование инвариантности относительно дискретной калибровочной группы приводит к необходимости рассматривать составные операторы в качестве операторов физических полей\*, следовательно, вопрос о корпускулярном проявлении таких полей сводится к вопросу о существовании связанных состояний исходных полей теории (следствие бесконечности числа степеней свободы (см. стр. 69)). Последнее находится в полном соответствии с тем, что наблюдаемыми в природе являются только калибровочно-инвариантные объекты, так как, используя теорему Шевалле [20], можно восстановить по дискретной группе все калибровочные инварианты путем аналитического продолжения. Это в конечном итоге эквивалентно явному решению связей в калибровочной теории.

В-третьих, редукция ФП всегда имеет место, когда калибровочные преобразования затрагивают "фазовые" степени свободы исходных полей. Поэтому поле Хиггса всегда имеет редуцированное ФП, т.е. элементарное поле Хиггса не может обеспечить появление массы у векторных полей. Таким образом, физическим полям в моделях Хиггса отвечают калибровочно-инвариантные составные операторы (см., например, (4.33) для модели ГВС), которые имеют частицеподобные возбуждения, если динамика теории допускает соответствующие связанные состояния. В локальном пределе (при низких энергиях) теория описывается эффективным лагранжианом, который совпадает со стандартным лагранжианом модели Хиггса, следовательно, теория возмущений в низкоэнергетическом пределе остается без изменений (в частности, лагранжиан ГВС можно формально переписать в переменных (4.33) [32]).

\* Например, в работах [50] авторы предлагают рассматривать наблюдаемый электрон как связанное состояние "голого" электрона и хиггсовского бозона в модели ГВС, что соответствует введению составных операторов (4.22).

## Приложение А

Для решения уравнения (2.266) воспользуемся голоморфным представлением, которое вводится заданием операторов рождения и уничтожения (2.16)  $(i, j, k = 1, 2, \dots, N)$ , причем векторы состояний являются функциями комплексной переменной  $a_j^* = (x_j - ip_j)/\sqrt{2}$  и

$$\hat{a}_j^+ \psi(a^*) = a_j^* \psi(a^*), \quad \hat{a}_j \psi(a^*) = \frac{\partial}{\partial a_j^*} \psi(a^*). \quad (A.1)$$

Скалярное произведение определяется следующим образом:

$$\int d^N(a^*, a) [\psi_1(a^*)]^* \psi_2(a^*) = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad (A.2)$$

где мера  $d^N(a^*, a) = (2\pi i)^{-N} d^N a^* d^N a \exp(-a_j^* a_j)$ , т.е. интегрирование ведется по полному ФП  $= \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N$  системы. Всякое состояние в голоморфном представлении может быть разложено по базису

$$\langle a^* | n_1, \dots, n_N \rangle = \prod_{i=1}^N (a_i^*)^{n_i} / \sqrt{n_i!} \equiv \langle a^* | \vec{n} \rangle. \quad (A.3)$$

Здесь  $n_i = 0, 1, \dots$ . Базис (A.3) ортонормирован относительно скалярного произведения (A.2). Операторы связей (2.266) принимают вид  $\hat{G}_a = T_{ij}^a \hat{a}_i^+ \hat{a}_j$ . Отметим, что здесь нет проблемы упорядочения операторов в связях, ввиду антисимметричности матриц  $T^a$ . Очевидно, вакуум  $\langle a^* | \vec{0} \rangle = 1$  удовлетворяет (2.266), следовательно, всякое физическое состояние строится применением к нему некоторой функции от операторов  $\hat{a}_j^+$ , которая коммутирует со всеми  $\hat{G}_a$ . Легко понять, что любая такая функция разлагается в ряд по степеням оператора  $\hat{a}_k^+ \hat{a}_k^+$ , поскольку всякий инвариант в  $\mathbb{R}^N$  относительно группы вращений  $SO(N)$  выражается через квадрат вектора в  $\mathbb{R}^N$  (см. § 2.3). Тогда базис физического подпространства имеет вид

$$\langle a^* | n \rangle_{ph} = c_n \langle a^* | (\hat{a}_k^+ \hat{a}_k^+)^n | 0 \rangle = c_n [a_k^{*2}]^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (A.4)$$

Нормировочный множитель  $c_n$  вычисляется согласно (A.2)

$$\langle n|n' \rangle_{ph} = \delta_{nn'}, \quad C_n^{-2} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial a_k^*} \right)^2 \right]^n [a_k^{*2}]^n = \frac{4^n n! \Gamma(n + \frac{N}{2})}{\Gamma(\frac{N}{2})}. \quad (A.5)$$

Полный базис (A.3) нумеруется  $N$  целыми неотрицательными числами  $n_i$ , так как система содержит  $N$  степеней свободы. Базис (A.4) задается единственной целочисленной переменной  $n$ , т.е. система обладает единственной физической степенью свободы. Заметим, что спектр гамильтониана осциллятора  $H = \hat{a}_k^+ \hat{a}_k^+ + \frac{N}{2}$  в физическом подпространстве оказывается равным  $E = 2n + N/2$ . Видно, что расстояние между уровнями удвоено, что указывает на коничность физического  $\Phi$ . Тот же результат можно получить, решая уравнение (2.27) с  $V = \frac{1}{2} \omega^2 [z]$

Ядро оператора эволюции в физическом подпространстве запишем с помощью формулы Фейнмана - Каца (2.31)

$$U_t^{ph}(a^*, a) = \sum_E \psi_E^{ph}(a^*) [\psi_E^{ph}(a^*)]^* e^{-iEt}. \quad (A.6)$$

Здесь изменено обозначение физического оператора эволюции: вместо знака "с", введенного в (2.30), использован значок "ph", поскольку в (A.6) нет явного выделения "конической" степени свободы (все степени свободы входят равноправно, нет фиксации калибровки). Суммирование в (A.6) ведется по всему физическому спектру гамильтониана (2.26a). Если суммирование в (A.6) проводить по полному спектру гамильтониана (2.26a) (система (2.26) без условия (2.26b), то получится ядро оператора эволюции  $N$ -мерной системы в полном пространстве состояний (A.3), которое обозначим  $U_t(a^*, a)$ .

Задача заключается в том, чтобы установить связь между  $\hat{U}_t$  и  $\hat{U}_t^{ph}$ , не исключая явно нефизические степени свободы, т.е. не устрояя  $N-1$  переменных  $a_k^*$  выбором калибровки. Тогда получится новый рецепт построения КИ в калибровочных теориях, в котором не требуется явного выделения физических степеней свободы. Все переменные входили бы в него равноправно, при этом по построению сохранялась бы явная калибровочная инвариантность.

Заметим, что при  $t=0$   $U_{t=0}^{ph}(a^*, a) = Q(a^*, a)$  есть проектор на физическое подпространство, так как функции  $\psi_E^{ph}(a^*)$  образуют полную систему в физическом подпространстве. Последнее следует из самосопряженности гамильтониана  $H$  и коммутативности  $\hat{G}_a$  с  $H$  в (2.26a), т.е. пространство векторов, натянутое на собственные векторы  $H$ , может быть разложено в прямую сумму физического и нефизического подпространства. Исходя из этого замечания,

закключаем, что

$$U_t^{ph}(a^*, a) = \int d^N(b, \bar{b}) U_t(a^*, b) Q(b^*, a). \quad (A.7)$$

Оператор  $\hat{Q}$  устраняет вклад нефизических состояний в спектральную сумму для  $\hat{U}_t$  (аналогичную A.6) за счет своих проекционных свойств. Для ядра оператора  $U_t(a^*, a)$  справедливо стандартное представление КИ [II] по полному  $\Phi$   $\Pi = \mathbb{R}^{2N}$

$$U_t(a^*, a) = \int \prod_{\tau=0}^t \left[ \frac{d^N a^* d^N a}{(2\pi i)^N} \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} (a_k^*(t) a_k(t) + a_k^*(0) a_k(0)) \right\} e^{iS}, \quad (A.8)$$

где  $a^*(t) = a^*$ ,  $a(0) = a$  - стандартное граничное условие для КИ в голоморфном представлении,  $S = \int_0^t d\tau \left[ \frac{1}{2i} (\dot{a}_k^* a_k - a_k^* \dot{a}_k) - H(a^*, a) \right]$  - действие системы, включающее и нефизические степени свободы,  $H(a^*, a)$  - ядро гамильтониана (2.26a), которое получается из оператора  $\hat{H}$  заменой операторов  $\hat{a}_k^+$  и  $\hat{a}_k$  на числа  $a_k^*$ ,  $a_k$  после расстановки всех  $\hat{a}_k$  справа от  $\hat{a}_k^+$ .

Таким образом, задача свелась к поиску ядра  $Q(a^*, a)$ . Поскольку  $Q$  - проектор на физическое подпространство, а векторы (A.4) образуют базис в нем, то воспользуемся разложением единицы в физическом подпространстве:

$$Q(a^*, a) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 (a_k^{*2} a_j^2)^n = \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \xi^{1-\frac{N}{2}} I_{\frac{N}{2}-1}(2\xi), \quad (A.9)$$

где  $\xi = \frac{1}{2} (a_k^{*2} a_j^2)^{1/2}$ ,  $I_\nu$  - модифицированная функция Бесселя.

Формулы (A.7), (A.9) решают поставленную задачу. Видно, что структуры (2.33) и (A.7) аналогичны, но в (2.33) оператор  $\hat{Q}$  определен только на физическом конфигурационном пространстве, в то время как в (A.7)  $Q$  определяется в полном  $\Phi$  системы.

Можно пойти дальше. Используя аналитичность  $Q$  (A.7), КИ можно придать стандартный вид

$$U_t^{ph}(a^*, a) = \int \prod_{\tau} [d^N(a^*, a) \mu(a^*, a)] \exp \Phi \exp i S_{ef}. \quad (A.10)$$

Здесь  $\mu(a^*, a)$  - некоторая мера в полном  $\Phi$  системы,  $S_{ef}$  - эффективное действие в нем,  $\Phi$  - множитель, связанный с выбором начальных условий, аналогичный множителю в (A.8). Согласно (A.6), ядро оператора  $\hat{U}_t^{ph}$  удовлетворяет уравнению



$$i \partial_t U_t^{Ph}(a^*, a) = H(\hat{a}^+, \hat{a}) U_t^{Ph}(a^*, a) \quad (A.II)$$

с начальным условием  $\hat{U}_{t=0}^{Ph} = \hat{Q}$  (отметим, что ядро (A.8)) также удовлетворяет уравнению (A.II), но с начальным условием  $U_{t=0}(a^*, a) = \exp a_k^* a_k$  - ядро единичного оператора в полном пространстве состояний (A.3)). Из уравнения (A.II) для инфинитезимального ядра оператора  $\hat{U}_\varepsilon^{Ph}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем

$$U_\varepsilon^{Ph}(a^*, a) = Q(a^*, a) \exp[-i\varepsilon H_{ef}(a^*, a)] + O(\varepsilon^2), \quad (A.I2)$$

где

$$H_{ef}(a^*, a) = \frac{1}{Q(a^*, a)} H(a^*, \frac{\partial}{\partial a^*}) Q(a^*, a). \quad (A.I3)$$

Итерируя ядро (A.I2) согласно скалярному произведению (A.2), получим ядро оператора  $\hat{U}_t^{Ph}$  за конечный промежуток времени в виде КИ (A.I0), в котором

$$\mu(a^*, a) = Q(a^*, a), \quad (A.I4a)$$

$$S_{ef} = \int_0^t dt \left[ \frac{1}{Q} (\dot{a}_k^* \frac{\partial}{\partial a_k^*} - \dot{a}_k \frac{\partial}{\partial a_k}) Q - H_{ef}(a^*, a) \right], \quad (A.I4b)$$

$$\Phi = a_k^*(t) \dot{a}_k(t) - a_k^*(0) \dot{a}_k(0) - \frac{1}{2} \ln \frac{Q(a^*(t), a(t))}{Q(a^*(0), a(0))} \quad (A.I4b)$$

и  $a^*(t) = a^*$ ,  $a(0) = a$ . Отметим, что при отсутствии калибровочной симметрии  $Q(a^*, a) = \exp a_k^* a_k$  и (A.I0) переходит в (A.8).

Итак, чтобы избежать явного выделения физических степеней в КИ, можно воспользоваться проекционной формулой (A.7), либо изменить в обычном КИ по полному ФП меру интегрирования и действие по рецепту (A.I0), (A.I4). Существо дела, однако, заключается в отыскании оператора  $\hat{Q}$  в обоих случаях.

В качестве примера вычислим оператор  $\hat{Q}$  для механики Янга-Миллса [45] с группой  $SU(2)$ . Эта модель получается из обычной теории Янга-Миллса (см. § 4.1) при дополнительном условии, что все поля зависят только от времени, т.е. они пространственно однородны.

Структура ФП физических переменных в этой системе определена в §4.1, т.е. дискретная калибровочная группа, редуцирующая ФП, есть  $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$  (в случае теории поля эта группа действует локально также и по пространственным переменным (в каждом узле решетки = точке пространства)).

Для удобства запишем лагранжиан в следующем виде [46]:

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr} (\dot{x} + yx)^T (\dot{x} + yx) - V(x). \quad (A.I5)$$

Здесь  $x$  - вещественная матрица  $3 \times 3$ ,  $y$  - антисимметричная матрица. Лагранжиан (A.I5) получается из лагранжиана (4.1), если положить  $x_{ai}(t) = A_i^a(t)$  ( $a = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, 3$  - нумеруют изотопические и пространственные компоненты соответственно) и  $y_{ab}(t) = -g \varepsilon^{abc} A_0^c(t)$ , где  $g$  - константа связи. Тогда  $V = \frac{1}{4} g^2 [(\text{Tr} x^T x)^2 - \text{Tr} (x^T x)^2]$ , однако для наших целей вид потенциала несуществен.

Лагранжиан (A.I5) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$x \rightarrow \Omega x, \quad y \rightarrow \Omega y \Omega^T + \Omega \partial_t \Omega^T, \quad (A.I6)$$

где  $\Omega = \Omega(t)$ ,  $\Omega \Omega^T = \Omega^T \Omega = 1$ ,  $\Omega$  - ортогональная матрица. Нет нужды подробно рассматривать гамильтонов формализм для этой системы, поскольку имеется полная аналогия с полем Янга-Миллса (см. § 4.1). Остановимся кратко на инвариантном способе выделения физических переменных для модели (A.I5) [46, 47, 30]. Очевидно, что импульс, канонически сопряженный  $y$ , обращается в нуль:  $\partial L / \partial y = 0$ , поэтому  $y$  - нефизическая переменная, и мы не будем за ней следить. Вторичные связи являются генераторами изотопических вращений столбцов матрицы  $x$  (следствие закона калибровочных преобразований (A.I6)). Всякую вещественную матрицу  $x$  можно представить в виде полярного разложения [48]  $x = U \rho$ , где  $U$  - ортогональная матрица, а  $\rho$  - положительно-определенная симметричная матрица  $\rho^T = \rho$ . Ясно, что  $U$  содержит только нефизические степени свободы (они могут быть исключены калибровочным преобразованием  $x \rightarrow U^T x$ , т.е.  $\Omega = U^T$ ). Таким образом, теория содержит шесть физических степеней свободы. Однако физическое конфигурационное пространство не совпадает с  $\mathbb{R}^6$ , поскольку на  $\rho$  наложено ограничение:  $\rho$  - положительно-определенная матрица. Следовательно, физическое конфигурационное пространство оказывается уже  $\mathbb{R}^6$ , т.е. является его подмножеством. Последнее, как уже неоднократно демонстрировалось выше, связано с редукцией физического ФП в данной системе.



Ясно, что при построении КИ возникает проблема интегрирования по положительно определенным матрицам  $\mathcal{P}$ . Она может быть решена подобно тому, как это делалось в главах 2 и 3. Ввиду некоторой громоздкости выкладок мы не будем разбирать вывод КИ для этой системы в физическом ФП. Однако результат может быть легко получен, если использовать рецепт (А.14) для КИ.

Заметим, что после перехода к голоморфному представлению по каждой компоненте матрицы  $\mathcal{X}_{ai}$ , все физические векторы состояний должны быть калибровочно-инвариантны, т.е.

$$\Psi_{ph}(a^*) = \Psi_{ph}(\Omega a^*), \quad a_{aj}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{aj} - i p_{aj}), \quad (\text{A.17})$$

где  $p_{aj} = \partial L / \partial \dot{x}_{aj}$  - импульс, канонически сопряженный  $x_{aj}$ ,  $\Omega \Omega^T = \Omega^T \Omega = 1$ . Легко понять, что всякий вектор  $\Psi_{ph}(a^*)$  должен быть аналитической функцией от элементов матрицы  $(a^{*T} a^*)_{ij} = a_{ia}^* a_{aj}^*$ , которые описывают шесть независимых степеней свободы в данной системе. Действительно, из (А.16) следует, что  $\mathcal{X}$  содержит три трехмерных вектора (столбцы матрицы  $\mathcal{X}$ ), которые одновременно преобразуются под действием ортогональной группы в  $\mathbb{R}^3$ . Поэтому любой групповой инвариант строится из всевозможных скалярных произведений этих векторов [49], из которых и составлена матрица  $\mathcal{X}^T \mathcal{X}$ . Отсюда заключаем, что ортонормированный базис в физическом подпространстве имеет вид

$$\langle a^* | n \rangle = c(n_{ij}) [(a^{*T} a^*)_{ij}]^{n_{ij}}, \quad n_{ij} = 0, 1, \dots, \quad (\text{A.18})$$

где  $i \leq j$ . Нормировка состояний определяется согласно скалярному произведению (А.2), где в мере следует положить  $N = 9$  - полное число степеней свободы в модели, а в показателе экспоненты нужно поставить  $-\text{Tr} a^{*T} a = -a_{ia}^* a_{ai}$ . Нормировочные коэффициенты  $c(n_{ij})$  (нет суммирования по  $i$ ) получаются из (А.5) подстановкой  $n = n_{ii}$  и  $N = 3$ , а  $c(n_{ij})$ ,  $i < j$ , получаются из (А.5) отбрасыванием фактора  $4^n$  с последующей заменой  $n = n_{ij}$  и  $N = 6$ .

Теперь воспользуемся разложением единицы в физическом подпространстве состояний для отыскания  $\hat{Q}$ . Подобно вычислению (А.9), имеем

$$Q(a^*, a) = \pi^{3/2} \prod_{i=1}^3 \xi_{ii}^{-1/2} I_{1/2}(\xi_{ii}) \prod_{i < j=1}^3 \xi_{ij}^{-2} I_2(2\xi_{ij}), \quad (\text{A.19})$$

$$\text{где } \xi_{ij} = [(a^{*T} a^*)_{ij} (a^T a)_{ij}]^{1/2}, \quad i \leq j.$$

Далее по формулам (А.13-14) восстанавливаем КИ для калибровочно-инвариантного ядра оператора эволюции, определенного в полном ФП  $= \mathbb{R}^9 \otimes \mathbb{R}^9$  системы, либо можно воспользоваться формулой (А.7).

В заключение укажем групповой метод вычисления оператора  $\hat{Q}$  для любой модели с конечным числом степеней свободы и произвольной калибровочной группой. Пусть скобки  $\langle, \rangle$  означают скалярное произведение в некотором пространстве представления компактной калибровочной группы  $G$ , а  $T_g$  - групповой элемент в этом представлении. Тогда

$$Q(a^*, a) = \frac{1}{\mu_G} \int_G d\mu(g) \exp \langle a_i^*, T_g a_i \rangle. \quad (\text{A.20})$$

Здесь  $\mu_G$  - объем группового пространства,  $d\mu(g)$  - право и лево-инвариантная мера Хаара на  $G$  [43], индекс  $i$  нумерует число "частиц" в пространстве представления, т.е. степени свободы нумеруются индексом  $i$  и групповым индексом, на который действуют операторы  $T_g$ . Также предполагается, что  $T_g$  унитарны относительно выбранного скалярного произведения:  $\langle T_g a_i^*, T_g a_i \rangle = \langle a_i^*, T_g^+ T_g a_i \rangle = \langle a_i^*, a_i \rangle$ , т.е.  $T_g^+ = T_g^{-1}$ . Теперь нетрудно проверить, что  $Q(a^*, a) = Q(T_g a^*, T_g a)$ . Это следует из унитарности  $T_g$  и инвариантности меры  $d\mu(g^+ a \cdot \tilde{g}) = d\mu(g)$ .

Докажем проекционные свойства оператора (А.20). Пусть  $N$  - полное число степеней свободы, тогда

$$\hat{Q}\Psi = \int \frac{d^N b^* d^N b}{(2\pi i)^N} \exp(-\langle b_i^*, b_i \rangle) Q(a^*, b) \Psi(b^*) = \quad (\text{A.21})$$

$$= \frac{1}{\mu_G} \int_G d\mu(g) \int \frac{d^N b^* d^N b}{(2\pi i)^N} \exp(-\langle b_i^*, b_i \rangle) \Psi(b^* + T_g^+ a^*) = \quad (\text{A.22})$$

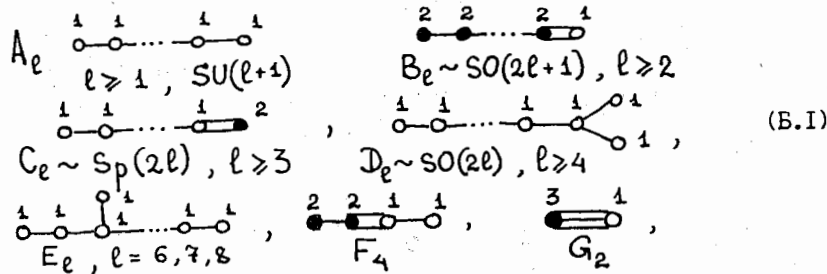
$$= \frac{1}{\mu_G} \int_G d\mu(g) \Psi(T_g^+ a^*).$$

Для получения равенства (А.21) воспользовались определением (А.20) и сделали замену переменных интегрирования  $b_i^* \rightarrow b_i^* - T_g^+ a_i^*$ . Правая часть (А.22) означает, что действие оператора  $\hat{Q}$  эквивалентно операции усреднения вектора состояния по группе  $G$ . Очевидно, что эта операция суть проектор на физическое подпространство состояний.

Приложение Б

(Краткие сведения по теории групп Ли)

Теорема Дынкина: любая простая алгебра Ли характеризуется одной из следующих схем (схем Дынкина) [20,26]:



где  $l$  указывает число кружочков.

По схеме Дынкина восстанавливается любая простая алгебра Ли. Делается это следующим образом. Каждому кружочку ставится в соответствие вектор  $\omega$  в  $\mathbb{R}^l$ , причем цифры под кружочком указывают относительное (либо абсолютное при определенной нормировке) значение квадрата вектора  $\omega$ . Черточки между кружочками указывают взаимное расположение этих векторов:  $\circ \bullet 90^\circ$ ,  $\circ \circ 120^\circ$ ,  $\circ \text{---} \circ 135^\circ$ ,  $\circ \text{---} \text{---} \circ 150^\circ$ . Следовательно, каждая схема задает  $l$  линейно-независимых векторов в  $\mathbb{R}^l$ . Пространство  $\mathbb{R}^l$  называется корневым пространством алгебры  $X$ , а система векторов  $\omega$  простыми корнями в нем. По системе простых корней восстанавливается система всех корней алгебры. Все корни алгебры распадаются на положительные и отрицательные. Положительным корнем называется вектор  $\alpha = \sum_{i=1}^l n_i \omega_i$ , где  $n_i$  - некоторые неотрицательные целые числа. Каждому положительному корню  $\alpha > 0$  соответствует отрицательный корень  $-\alpha$  ( $n_i \rightarrow -n_i$ ). Числа  $n_i$  определяются из соотношения

$$-\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = p + q, \quad (B.2)$$

которое справедливо для любых корней  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $p = \min(n)$ ,  $q = \max(n)$  в серии корней  $\gamma_n = \beta + n\alpha$ , т.е. при  $n = p, p+1, \dots, q-1, q$   $\gamma_n$  является корнем алгебры. Заметим, что, если  $\alpha$  и  $\beta$  - простые корни, то  $p = 0$ , так как  $\alpha - \beta$  не может быть корнем (у корня либо все  $n_i \geq 0$ , либо все  $n_i < 0$ ). Кроме того, следует учитывать, что кратных корней в алгебре нет.

Пример  $A_2$   $\circ \text{---} \circ$  (алгебра  $SU(3)$ ). Из (B.2) следует  $-2(\omega_1, \omega_2) = q = 1$ , поэтому  $\omega_1 + \omega_2$  - корень. Убеждаемся, что других корней нет, используя (B.2)

Аналогично можно рассмотреть алгебры  $A_2$  и  $G_2$ . Их корневое пространство изображено на рис. 1Б.

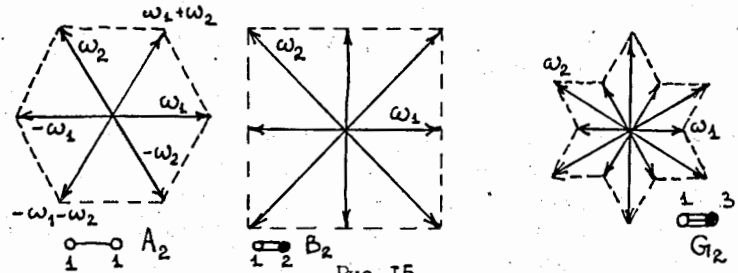


Рис. 1Б

Из (B.2) следует, что  $4(\alpha, \beta)^2 / (\alpha, \alpha)(\beta, \beta) = 4 \cos^2 \theta_{\alpha\beta}$  - целое число ( $\theta_{\alpha\beta}$  - угол между корнями). Поэтому  $\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = 0, 1/4, 1/2, 3/4$ . Из анализа этого соотношения нетрудно вывести, что взаимное расположение корней в плоскости, проходящей через любые два корня  $\alpha, \beta$ , совпадает с одним из изображенных на рис. 1Б (конечно, может быть еще случай  $\circ \circ$ , т.е. когда в плоскости  $(\alpha, \beta)$  есть только корни  $\pm \alpha$  и  $\pm \beta$ , и  $\alpha \perp \beta$ ). Если  $G_2$  исключить из рассмотрения, то для всех остальных достаточно использовать при построении системы корней только  $A_2$  и  $B_2$ .

После того, как система корней восстановлена, можно реконструировать всю алгебру  $X$ , используя канонический базис Картана - Вейля. Корневое пространство изоморфно подалгебре Картана  $H$  в  $X$  (максимальная коммутативная подалгебра в  $X$ , т.е. все простые корни, как элементы  $H$ , коммутируют друг с другом  $[\omega_i, \omega_j] = 0$ ). Всякий элемент  $H$  есть линейная комбинация корней. Всякая простоя алгебра  $X$  разлагается в ортогональную сумму

$$X = H \oplus \sum_{\alpha > 0} \oplus (X_\alpha \oplus X_{-\alpha}), \quad (B.3)$$

где суммирование ведется по всем положительным корням  $\alpha > 0$ , и  $\dim X_{\pm \alpha} = 1$ . Обозначим базисный элемент в  $X_\alpha$  как  $e_\alpha$ , а в  $X_{-\alpha}$  как  $e_{-\alpha}$ . Тогда любой элемент  $x \in X$  можно разложить по этому базису

$$x = \sum_{\alpha > 0} (x_\alpha^+ e_\alpha + x_\alpha^- e_{-\alpha}) + \sum_{\omega} x_\omega \omega, \quad (B.4)$$

где  $\omega$  пробегает простые корни. Базисные элементы подчиняются следующим коммутационным соотношениям (базис Картана - Вейля):

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha, [h, e_\alpha] = (h, \alpha) e_\alpha, [e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}, \quad (B.5)$$

где  $h \in \mathfrak{H}$ ,  $N_{\alpha\beta}$  - числа,  $N_{\alpha\beta} = 0$ , если  $\alpha + \beta$  не является корнем и  $N_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} q(1-p)(\alpha, \alpha)$ , где  $p = \min(n)$ ,  $q = \max(n)$  в серии корней  $\beta + n\alpha$ , причем  $N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta}$ . Правильные знаки у  $N_{\alpha\beta}$  восстанавливаются из требования выполнения тождества Якоби для всех базисных элементов. Таким образом, по схемам Дынкина восстанавливается любая простая алгебра. При этом число простых корней  $\ell = \dim \mathfrak{H}$  называется рангом алгебры и соответствующей группы. Присоединенное действие группы  $G$  в своей алгебре Ли  $X$  может быть задано с помощью соотношения (окрестность групповой единицы).

$$x \rightarrow \Omega x \Omega^{-1} = \exp(ad_y) x, \quad \Omega = \exp y, \quad (B.6)$$

где  $x, y \in X$ , оператор  $ad$  определен по правилу  $(ad_y)x = [y, x]$ . Формулы (B.4) и (B.5) позволяют проводить явные вычисления. Отметим, что для компактных групп нормировка базиса может быть выбрана так, что в матричном представлении алгебры (которое всегда существует по теореме Адо [43])  $\text{Tr } xy = \text{Tr } ad_y ad_x \equiv (x, y)$  - форма Картана - Киллинга в  $X$ . Между базисом (B.5) и ортогональным базисом в такой нормировке можно установить соответствие [20]. Ортогональный вещественный базис в  $X$  образован системой векторов  $iC_\alpha, S_\alpha, ih_\omega$ , где

$$C_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\alpha + e_{-\alpha}), \quad S_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\alpha - e_{-\alpha}), \quad (B.7)$$

а  $h_\omega$  - некоторый ортогональный базис в  $\mathfrak{H}$  (ортогонализированный некоторым способом базис простых корней).

Теорема 2 [20, 26]. Всякий полином в алгебре  $X$  простой группы  $G$ , инвариантный относительно присоединенного действия группы (B.6), разлагается по образующим  $\text{Tr } x^{\tau_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, \ell = \text{rank } G$ , где  $\tau_\alpha$  - степени независимых операторов Казимира в  $X$  [44]:

Таблица I

$A_\ell$	$\alpha+1$	$C_\ell$	$2\alpha$	$G_2$	2,6	$E_6$	2,5,6,8,9,12
$B_\ell$	$2\alpha$	$D_\ell$	$2\alpha, \ell$ $\alpha \neq \ell$	$F_4$	$\frac{2,6}{8,12}$	$E_7$	2,6,8,10,12,14,18
серия	$\tau_\alpha$	$E_8$	2,8,12,14,18,20,24,30				

## Литература

1. Yang C.N., Mills R.L. Phys. Rev., 1954, v.96, No I, p.191.
2. Fock V.A. Zeit. Phys., 1927, v. 39, p. 226.
3. Weyl H. Zeit. Phys., 1929, v. 56, p. 330.
4. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1264.
5. Salam A. - in: Proceeding of the Eight Nobel Symposium Stockholm, 1968.
6. Pati J., Salam A., Phys. Rev. D., 1973, v. 8, p. 1240; Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. Phys. Lett., B, 1973, v.47, p. 365; Weinberg S. Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 494.
7. Прохоров Л.В. ЯФ, 1982, т. 35, № I, с. 229.
8. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики - М.: Физматгиз, 1960.
9. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по путям. М.: Мир, 1968.
10. Дирак П.А.М. Лекции по квантовой механике М.: Мир, 1968.
11. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
12. Прохоров Л.В. ЭЧАЯ, 1982, т. 13, № 5, с. 1094.
13. Прохоров Л.В. ЯФ, 1984, т. 39, № 2., с. 496.
14. Прохоров Л.В., Шабанов С.В. Вестник ЛГУ, 1988, сер. 4, № 4, с. 68.
15. Шабанов С.В. ТМФ, 1989, т. 78, № 3, с. 411.
16. Pauli W. Pauli lectures on physics. Massachusetts, 1973.
17. Janke W., Kleinert H. Lett. Nuovo Cim., 1979, v.25, No 10, p.297.
18. Прохоров Л.В. Вестник ЛГУ, 1983, сер. 4, № 4, с. 14.
19. Рамон П. Теория поля. (Современный вводный курс). М.: Мир, 1985.
20. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
21. Partasarathy K.P., Ranga Rao V.S., Varadarajan. Ann. Math., 1967, v. 85, No 3, p. 383.
22. Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: МГУ, 1983.
23. Березин Ф.Л. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
24. Prokhorov L.V., Shabanov S.V. Phys. Lett., B., 1989, v. 216, No 3,4, p. 341.
25. Прохоров Л.В., Шабанов С.В. Вестник ЛГУ, сер. 4, № II, с. 8.
26. Желобенко Д.П. Лекции по теории групп Ли. Дубна: ОИЯИ, 1965.
27. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции, т. 2, М.: Наука, 1974.
28. Shabanov S.V. - in: Proceeding of the Seminar "Theory of representations and group methods in physics", Tambov, 24-28 January, 1989, Nauka, Moscow, 1989.

29. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1988.
30. Изергин А.Г., Коперин В.Е., Семенов-Тянь-Шанский М.А., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1979, т. 38, № 1, с. 3.
31. Fröhlich J., Morchio G., Strocchi F. Phys. Lett. B., 1980, v. 97, No 2, p. 249-252; Nucl. Phys., B., 1981, v. 190, p. 553-582.
32. Матвеев В.А., Тавхелидзе А.Н., Шапошников М.Е. ТМФ, т. 59, № 3, с. 323-344.
33. Prokhorov L.V., Shabanov S.V. - in : Proceeding of the Seminar "Geometrical aspects of quantum theory", Dubna, 2-4 September 1988. World Scientific Publishing Company PTE.LTD., Singapore, 1989.
34. Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. УФН, 1982, т. 136, № 4, с. 553.
35. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
36. Coleman S. - in : The Ways of Subnuclear Physics, Ed. A. Zichichi. - N.Y. : Plenum Press, 1979.
37. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т. 1, М.: Мир, 1977, т. 2, М.: Мир, 1978.
38. Lehman H., Symanzik K., Zimmerman W. Nuovo Cimento, 1955, v. 6, p. 319.
39. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. т. 2, М.: Наука, 1978.
40. де ля Ййсера В., Феррер Э., Шабад А.Е. - в трудах 3-го семинара "Теоретико-групповые методы в физике", Дрмала, 22-24 мая 1986. М., Наука, 1986.
41. Райдер Л. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987.
42. Weinberg S. Prog. Theor. Phys. Suppl. 1986, v. 86, p. 43-53.
43. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения т. 1, И.: Мир, 1980.
44. Englefield M.J., King R.C. J. Phys. A.: Math. Gen., 1980, v. 13, No 7, p. 2297.
45. Savvidy G.K. Phys. Lett., B., 1983, v. 130, p. 303.
46. Соловьев М.А. ТМФ, 1987, 73, № 1, с. 3.
47. Goldstone J., Jackiw R. Phys. Lett., B., 1978, No 1, p. 81.
48. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, М.: Наука, 1966.
49. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления,
50. Abbott L.F., Farhi E. Phys. Lett. B, 1981, v. 101, No 1, p. 69; Nucl. Phys. B, 1981, v. 189, p. 547.
51. Creutz M., Tudron T.N. Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 2619.

Рукопись поступила в издательский отдел  
13 июля 1989 года.