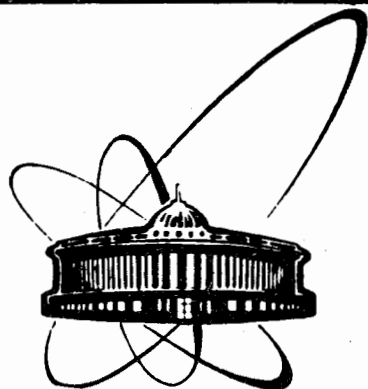


89-494



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Б 952

P2-89-494

Б. В. Быковский, В. А. Мещеряков, Д. В. Мещеряков*

ФОРМФАКТОР ПИОНА
(ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГУНАРИСА - САКУРАИ)

Направлено в журнал "Ядерная физика"

*Научно-исследовательский институт ядерной физики
МГУ

1989

Быковский Б.В., Мещеряков В.А.

P2-89-494

Мещеряков Д.В.

Формфактор пиона /обратная задача

Гунариса - Сакураи/

Получено аналитическое выражение для формфактора пиона с учетом только ρ -мезона. Обнаружена сильная зависимость полюсов $F_{\pi}(t)$ в перекрестном канале от величины a_1^1 . Получено удовлетворительное описание $|F_{\pi}(t)|$ в интервале $|t| \sim 4 \text{ ГэВ}^2$ и фазы $\delta_1^1(t)$ до $t \sim 1 \text{ ГэВ}^2$, а также амплитуды $f_1^1(t)$ в нефизической области, включающей интервал $m_{\pi}^2 < t < 4m_{\pi}^2$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод авторов

Bykovsky B.V., Mescheryakov V.A.,

P2-89-494

Mescheryakov D.V.

Pion Formfactor (Inverse Gounaris-Sakurai Problem)

The analytical expression for the pion formfactor with only ρ -meson contribution is derived. The strong dependence of the poles of $F_{\pi}(t)$ in the crossing channel on the value of a_1^1 is observed. Satisfactory description is obtained both for $|F_{\pi}(t)|$ in the interval $|t| \sim 4 \text{ GeV}^2$ and the phase $\delta_1^1(t)$ in the interval till $t \sim 1 \text{ GeV}^2$ as well as for $f_1^1(t)$ in the unphysical region including the interval $m_{\pi}^2 < t < 4m_{\pi}^2$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

Введение

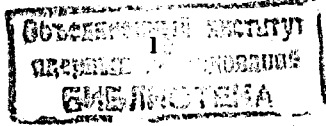
Электромагнитный формфактор пиона $F_{\pi}(t)$ изучается как в ряде теоретико-полевых моделей, так и в дисперсионном подходе [1]. Интерес к последнему направлению объясняется обширной экспериментальной информацией в пространственно- и времениподобных областях $|t| < 10 \text{ ГэВ}/c^2$. Оно дает возможность предсказать наличие радиальных возбуждений ρ -мезона и приводит к хорошему описанию всех опытных данных [2]. Дисперсионный подход важен еще и потому, что позволяет установить связь между обоими направлениями [3]. Так, аналитическое выражение для $F_{\pi}(t)$ может быть использовано в КХД-правилах сумм для двухточечных функций векторных токов с целью получения физических характеристик резонансов, например ρ -мезона. Для этого важно иметь физически обоснованные и достаточно простые выражения для $F_{\pi}(t)$, чему и посвящена настоящая работа.

Формулировка модели

Как следует из результатов работы [2], доминирующим вкладом в формфактор пиона $F_{\pi}(t)$ при $|t| < 10 \text{ ГэВ}/c^2$ является вклад ρ -мезона. Он дает хорошее количественное описание $|F_{\pi}(t)|$ при $|t| < 10 \text{ ГэВ}/c^2$ и фазы $\delta_{\pi}(t)$ в интервале $0 \leq t \leq 1 \text{ ГэВ}^2$. Учет радиальных возбуждений ρ' и ρ'' приводит к количественному описанию примерно 300 экспериментальных значений $|F_{\pi}(t)|$. Ниже мы ограничимся моделью $F_{\pi}(t)$ с учетом только ρ -мезона. В предположении нулевой ширины ρ -мезона из дисперсионной теории для F_{π} имеем

$$F_{\pi}(t) = \frac{m_{\rho}^2}{\pi} \frac{1}{m_{\rho}^2 - t} \quad (1)$$

Вычисленное с помощью формулы (1) значение $\langle r_{\pi}^2 \rangle$ по порядку



величины совпадает с современным экспериментальным значением [4]:

$$\langle r_{\pi}^2 \rangle = (0,439 \pm 0,008) \text{ фм}^2. \quad (2)$$

Однако если для значения (2) вычислить m_{ρ} с помощью формулы (1), то получится величина $m_{\rho} = (736 \pm 9) \text{ МэВ}$, заниженная по сравнению с современным значением $m_{\rho} = (770 \pm 3) \text{ МэВ}$ [8]. Поэтому ниже к характеристикам ρ -мезона наряду с m_{ρ} будем относить и $\langle r_{\pi}^2 \rangle$. Формула (1) приводит к нулевому значению длины рассеяния a_1^1 , а ширина ρ -мезона $\Gamma_{\rho} = 0$ по построению. Обе эти величины также будем относить к характеристикам ρ -мезона, т.к. учет зависимости Γ_{ρ} от энергии приводит к завышенным значениям величины a_1^1 [5].

Окончательно будем считать, что в электромагнитном формфакторе пиона $F_{\pi}(t)$ ρ -мезон характеризуется следующими четырьмя величинами: m_{ρ} , Γ_{ρ} , a_1^1 и $\langle r_{\pi}^2 \rangle$.

Задача сводится к построению $F_{\pi}(t)$ с перечисленными выше параметрами и хорошо известными основными свойствами [6]:

1. Формфактор $F_{\pi}(t)$ представляет собой граничное значение действительной функции $F(t)$, аналитической в комплексной плоскости t с разрезом $[4m_{\pi}^2, \infty)$

$$F_{\pi}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(t + i\epsilon) \quad t \in [4m_{\pi}^2, \infty).$$

2. На разрезе справедливо двухчастичное условие унитарности

$$\text{Im } F_{\pi}(t) = \sqrt{\frac{t-4}{t}} f_1^{1*}(t) F_{\pi}(t), \quad (3)$$

где f_1^1 - изовекторная p -волновая амплитуда рассеяния.

3. Как следствие свойства 2 имеет место равенство

$$\delta_{\pi}(t) = \delta_1^1(t) = a_1^1 q^3 |_{q \rightarrow 0},$$

где $\delta_1^1(t)$ - фаза изовекторной p -волновой амплитуды рассеяния $f_1^1(t)$.

4. Из 3 следуют равенства

$$\text{Im } F_{\pi}(t) |_{q=0} = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \text{Im } F_{\pi}(t) |_{q=0} = 0, \quad (4б)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} \text{Im } F_{\pi}(t) |_{q=0} = 0. \quad (4в)$$

5. Из определения электрического заряда пиона имеем условие нормировки

$$F_{\pi}(t) |_{t=0} = 1. \quad (5)$$

Условие двухчастичной унитарности (3) и равенство фаз $\delta_{\pi}(t)$ и $\delta_1^1(t)$, строго говоря, справедливы только при $t < 16m_{\pi}^2$. Будем считать их верными всюду на разрезе, что, конечно, является приближением и дает возможность уточнять модель. Из условия унитарности (3) следует также корневой характер точки ветвления $t = 4m_{\pi}^2$ и способ аналитического продолжения $F_{\pi}(t)$ на второй лист римановой поверхности

$$F_{\pi}^{(2)}(t) = \frac{F_{\pi}^{(1)}(t)}{1 + 2i\sqrt{\frac{t-4}{t}} f_1^1(t)}. \quad (6)$$

Таким образом, на втором листе $F_{\pi}(t)$ помимо сингулярностей $F_{\pi}^{(1)}(t)$ обладает также и сингулярностями $f_1^1(t)$. Это приводит к наличию у $F_{\pi}^{(2)}(t)$ разреза $(-\infty, 0]$ за счет перекрестного канала амплитуды $f_1^1(t)$. Ранее было показано, что экспериментальное значение a_1^1 удастся получить только при учете или моделировании разреза на втором листе [7]. Поэтому при построении модели формфактора $F_{\pi}(t)$ будем учитывать этот разрез на втором листе римановой поверхности. Таким образом, в формулируемой модели формфактор будет определен на четырехлистной римановой поверхности. Далее будем строить $F_{\pi}(t)$ в виде мероморфной функции на четырехлистной римановой поверхности с минимальным числом нулей и полюсов так,

чтобы

$$F_{\pi}(t) \rightarrow \frac{m_{\rho}^2}{m_{\rho}^2 - t} \quad \text{при } a_1^1 \rightarrow 0, \Gamma_{\rho} \rightarrow 0. \quad (7)$$

Для построения римановой поверхности функции $F_{\pi}(t)$ отобразим физический лист (комплексную плоскость t с разрезом $[4m_{\pi}^2, \infty)$) на верхнюю полуплоскость плоскости q с помощью функции $q = \left(\frac{t}{4m_{\pi}^2} - 1\right)^{1/2}$. Второй лист при этом переходит в область $\text{Im } q < 0$. В нижней полуплоскости будет расположен разрез $(-\infty, -i]$ от перекрестного канала $\pi\pi$ -рассеяния. Учитывая, что точка $-i$ - корневая точка ветвления, определим унифицирующую переменную

$$w(t) = \sqrt{iq - 1}. \quad (8)$$

Многозначная функция $w(t)$ имеет четыре ветви

$$w_1(t) = \sqrt{iq - 1}, \quad w_2(t) = -\sqrt{iq - 1}, \quad w_3(t) = -\sqrt{-iq - 1}, \quad w_4(t) = \sqrt{-iq - 1}.$$

Гиперболы в плоскости w - образ действительной оси $\text{Im } q = 0$. Формфактор $F_{\pi}[w(q)]$ является мероморфной функцией переменной w с четырьмя полюсами в точках

$$w_{\rho}^j = \pm u^j(q_{\rho}) \pm iv^j(q_{\rho}), \quad (11)$$

$$q_{\rho} = \left(\frac{m_{\rho}^2}{4m_{\pi}^2} - 1\right)^{1/2}.$$

Симметрия полюсов (w_{ρ}^j) относительно оси $\text{Im } w = 0$ отражает действительность аналитической функции $F(t)$, а относительно оси $\text{Re } w = 0$ - следствие равенства нулю длины рассеяния и ширины ρ -мезона.

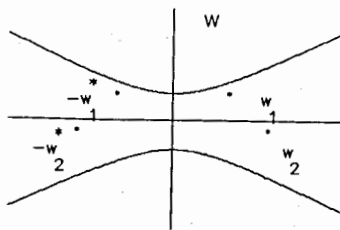


Рис. 1. Расположение полюсов формфактора $F_{\pi}(t)$ в комплексной плоскости переменной w .

Отказавшись от симметрии полюсов относительно оси $\text{Re } w = 0$, придем к выражению для формфактора $F_{\pi}(t)$

$$F_{\pi}(t) = \frac{C}{(w - w_1)(w + w_1^*)(w - w_2)(w + w_2^*)} \quad (12)$$

с пятью произвольными параметрами.

Условие нормировки (5) определяет действительную константу C

$$C = (i\sqrt{2} - w_1)(i\sqrt{2} + w_1^*)(i\sqrt{2} - w_2)(i\sqrt{2} + w_2^*). \quad (13)$$

Структура конформного преобразования и явный вид формфактора (12) приводят к тому, что условия (4а) и (4в) выполняются тождественно, а условие (4б) приводит к ограничению на полюса w_j

$$\left(\frac{1}{i - w_1} + \frac{1}{i + w_1^*}\right) + (w_1 \leftrightarrow w_2) = 2 \left[\text{Im} \left(\frac{1}{i - w_1} + \frac{1}{i - w_2} \right) \right] = 0. \quad (14)$$

Оставшиеся три свободных параметра должны обеспечить выполнение следующих четырех уравнений

$$\text{Re } F_{\pi}(t) \Big|_{t=m_{\rho}^2} = 0, \quad (15)$$

$$\Gamma = \left(m_{\rho} \frac{d\delta(t)}{dt} \right)^{-1} \Big|_{t=m_{\rho}^2}, \quad (16)$$

$$\langle r^2 \rangle = 6 \frac{dF_{\pi}(t)}{dt} \Big|_{t=0}, \quad (17)$$

$$a_1^1 = \frac{1}{6 |F_{\pi}(t)|} \frac{d^3 F_{\pi}(t)}{dq^3} \Big|_{t=4m_{\pi}^2}. \quad (18)$$

В дальнейшем удобнее использовать уравнения (15)-(18), выраженные непосредственно через $w_j = u_j + iv_j$, ($j=1,2$)

$$(w_{\rho} - w_1)(w_{\rho} + w_1^*)(w_{\rho} - w_2)(w_{\rho} + w_2^*) + (w_j \leftrightarrow w_j^*) = 0, \quad (19)$$

$$\Gamma^{-1} = m_{\rho} \frac{d\delta(t)}{dt} \Big|_{t=m_{\rho}^2}, \quad (20)$$

$$\langle r^2 \rangle = -\frac{3}{4\sqrt{2}m_{\pi}^2} \text{Im} \left(\frac{1}{i\sqrt{2} - w_1} + \frac{1}{i\sqrt{2} - w_2} \right), \quad (21)$$

$$a_1^1 = -\frac{1}{24i} \left[\left(\frac{1}{(i-w_1)^3} + \frac{1}{(i+w_1^*)^3} \right) + (w_1 - w_2) \right] + \frac{1}{16} \left[\left(\frac{1}{(i-w_1)^2} + \frac{1}{(i-w_1^*)^2} \right) + (w_1 - w_2) \right]. \quad (22)$$

Система уравнений (19)-(22) для определения положения полюсов переопределена: четыре параметра u_j, v_j ($j=1,2$) должны обеспечить выполнение условия (14) и уравнений (19)-(22). Существуют две возможности:

1. Решать систему методом наименьших квадратов, вводя веса, обратно пропорциональные экспериментальным ошибкам соответствующих характеристик ρ -мезона.
2. При определении положения полюсов исключить из рассмотрения одно из уравнений системы (19)-(22) так, чтобы число параметров было равно количеству уравнений. Отброшенное уравнение позволит рассчитать соответствующую ему физическую характеристику ρ -мезона по известным значениям параметров.

В таблице 1 в первой строке приведены полученные методом наименьших квадратов значения массы, ширины ρ -мезона, $\langle r^2 \rangle$ и длины рассеяния, а также значения параметров, определяющих положение полюсов, при котором достигается наилучшее приближение перечисленных выше характеристик к табличным значениям. Во второй

Таблица 1

u_1	v_1	u_2	v_2	m_ρ [МэВ]	Γ [МэВ]	$\langle r^2 \rangle$ [фм ²]	a_1^1
0.976	1.291	1.755	-1.109	768	152.6	0.418	0.0397
0.984	1.293	1.724	-0.290	770	153	0.439	0.0559
-	-	-	-	770	153	0.439	0.038
				± 3	± 2	± 0.008	± 0.002

строке таблицы 1 помещаются координаты полюсов, найденные без учета уравнения (22). Такой выбор объясняется тем, что по сравнению с массой, шириной и среднеквадратичным радиусом экспериментальное значение длины рассеяния известно с наименьшей точностью. Система уже не является переопределенной, и для нахождения параметров u_j, v_j ($j=1,2$) использованы табличные значения массы, ширины и среднеквадратичного радиуса $\langle r^2 \rangle$. Длина рассеяния a_1^1 рассчитана по формуле (22) и известным значениям параметров. В третьей строке приведены для сравнения табличные значения физических характеристик ρ -мезона.

Отметим, что полюса w_1 и $-w_1^*$ мало сдвигаются с гиперболы образа разреза $[4m_\pi^2, \infty)$ из-за малости отношения Γ_ρ/m_ρ . Принимая во внимание соотношение $\Gamma_\rho - f_{\rho\pi\pi}^2$, можно заключить, что сдвиг полюсов w_1 и $-w_1^*$ с гиперболы представляет пертурбативный эффект. В противоположность этому полюса w_2 и $-w_2^*$ значительно удалены от гиперболы и их сдвиг по отношению к ней естественно рассматривать как непертурбативный эффект, который всегда присутствует в реальных вычислениях $F_\pi(t)$ в КХД[9].

Нетрудно видеть, что модель не позволяет одновременно описать все четыре основные характеристики ρ -мезона с достаточной точностью: значение среднеквадратичного радиуса в первом и длины рассеяния во втором случаях выходят за пределы экспериментальной ошибки. На наш взгляд, это связано с тем, что при построении модели были сделаны существенные упрощения, например, нигде не учитывалась неупругость, а также радиальные возбуждения ρ -мезона. Что касается первого приближения, то в работе [7] введение эффективного неупругого порога позволило

удовлетворительно описать формфактор пиона и характеристики ρ -мезона, а также дать объяснение зависимости Γ_ρ от импульса, которая ранее была обнаружена эмпирически [5].

Влияние радиальных возбуждений изучалось в работе [2]. Было показано, что они дают вклад в $F_\pi(t)$ порядка нескольких процентов. Для оценки влияния этих поправок был проведен анализ уравнений (19)–(22) в предположении о 4%-й ошибке всех четырех экспериментальных характеристик ρ -мезона, и оказалось, что в этом случае система уравнений (19)–(22) является совместной, т.е. тремя параметрами удастся описать четыре величины с 4%-й точностью.

Поведение модуля формфактора в различных диапазонах энергии фазы изовекторной ρ -волновой амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния как функции t показано на рис. 2–5. Оно достаточно хорошо описывает экспериментальные данные.

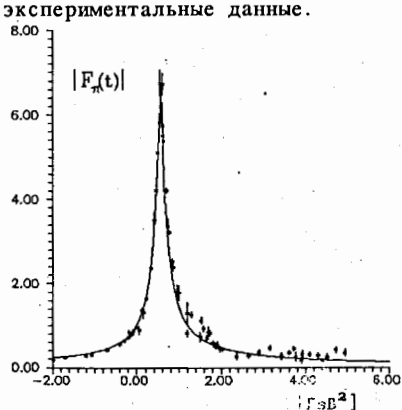


Рис. 2. Модуль формфактора пиона в области ρ -мезонного резонанса.

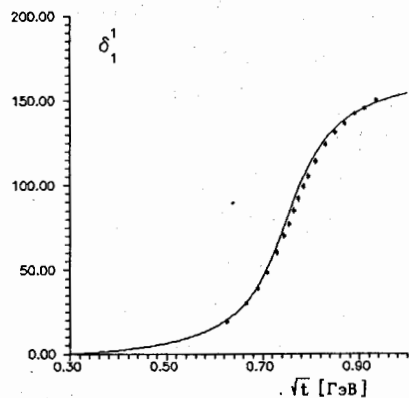


Рис. 3. Фаза δ_1^1 $\pi\pi$ -амплитуды в области ρ -мезонного резонанса.

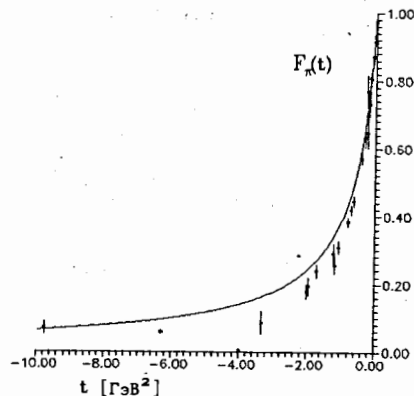


Рис. 4. Формфактор $F_\pi(t)$ пиона в пространственноподобной области.

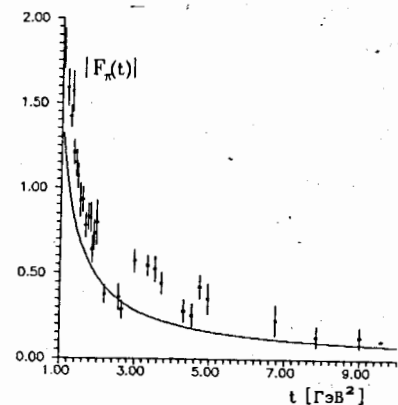


Рис. 5. Модуль формфактора пиона во времениподобной области.

Представляет интерес проверить другие свойства аналитической модели (12). До сих пор изучались лишь вычеты в полюсах $m_\rho \pm i\Gamma_\rho/2$, которые приводили к разумным значениям эффективных констант связи $f_{\rho\pi\pi}/f_\rho \approx 1.3$ [7]. Определим фазу δ_1^1 с помощью формулы

$$e^{2i\delta_1^1(t)} = \frac{F_\pi^{(1)}(t)}{F_\pi^{(2)}(t)}, \quad (23)$$

где $F_\pi^{(2)}(t)$ — значение формфактора пиона $F_\pi^{(1)}(t)$, продолженное через разрез $t \geq 4m_\pi^2$ на второй лист римановой поверхности $F_\pi(t)$, который является физическим для амплитуды $f_1^1(t)$

$$f_1^1(t) = \sqrt{\frac{t}{t-4}} \frac{e^{2i\delta_1^1(t)} - 1}{2i}. \quad (24)$$

Формулы (23) и (24) позволяют вычислить $f_1^1(t)$ как в нефизической области $0 < t < 4m_\pi^2$, так и на кроссинг-разрезе. Обратимся для начала к первой, нефизической области. Результаты вычислений приведены

на рис. 6 (кривая а). На этом же рисунке для сравнения имеется график $f_1^1(t)$, полученный на основе уравнений Роя [10] (кривая б).

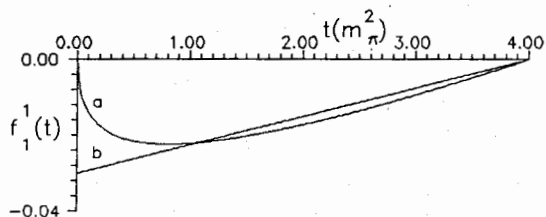


Рис. 6. Амплитуда f_1^1 $\pi\pi$ -рассеяния в нефизической области.

При $1 < t < 4$ поведение аналитической модели и модели, использующей уравнения Роя, практически совпадают. Обращение в ноль амплитуды $f_1^1(t)$ в точке $t=0$ связано с присутствием множителя \sqrt{t} в формуле (24) и конечностью $\exp(2i\delta_1^1(t))$ в этой точке. Конечное значение $f_1^1(t)$ может быть обеспечено наличием у матричного элемента S -матрицы при $t=0$ поведения вида $\exp(2i\delta_1^1(t)) - 1/\sqrt{t}$, которое является динамическим эффектом и должно учитываться дополнительно, подобно условиям (4а)-(4в) на $\text{Im } F_\pi(t)$ при $t=4m_\pi^2$. При учете одного только ρ -мезона такое поведение фазы может быть обеспечено только с помощью "ad hoc" гипотезы. Однако вклады высших радиальных возбуждений, например $\rho'(1250)$, дают возможность получить такое поведение естественным образом, после чего разумно переходить к изучению перекрестного канала.

Таким образом, предложенная аналитическая модель формфактора пиона $F_\pi(t)$ позволяет удовлетворительно описать основные физические характеристики ρ -мезона, а также поведение модуля формфактора и его фазы. Модель допускает аналитическое продолжение на второй лист римановой поверхности формфактора $F_\pi(t)$, который является физическим листом для изовекторной ампли-

туды ρ -волны $\pi\pi$ -рассеяния $f_1^1(t)$. На этом листе модель дает разумные количественные результаты в комплексной области, которая наиболее просто может быть описана в плоскости униформирующей переменной w (рис. 1) как область со значениями $\text{Im } w > 0.63$, ограниченная сверху гиперболой - образом физического разреза $[4m_\pi^2, \infty)$.

Литература

1. Ebert D., Volkov M.K. Fortschr.d.Phys., 29, 35, 1981
Ефимов Г.В., Иванов М.А., Машник С.Г. ОИЯИ P2-88-253, Дубна, 1988
2. Dubnička S., Furdik I., Meshcheryakov V.A., JINR, E2-88-521, Dubna, 1988
3. Das A., Mathur V.S., Panigrahi P., Phys. Rev. D, 35, 2178, 1987
4. Amendolia S.R. et al., Nucl. Phys., B277, 168, 1986
5. Быковский Б.В., Мешеряков В.А., ЯФ, 47, вып. 5, 1414, 1988
6. Gourdin M., Phys.Reports, C12, 29, 1974
7. Dubnička S., Meshcheryakov V.A., Sararu M. Czech. J. Phys., B34 1282, 1984
8. Particle Data Group, Review of particle properties, 1988
9. Ioffe B.L., Smilga A.V., Phys. Lett., B114, 353, 1982
Nucl. Phys., B216, 373, 1983
10. Nesterenko V.A., Radyushkin A.V., Phys. Lett., B115, 410, 1982
10. Pennington M.R., Protopopescu S.D., Phys. Rev., D7, 1429, 1973

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июня 1989 года.