объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-49

В.К.Мельников

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ N ВОЛН НА ПЛОСКОСТИ x, y

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1989

В настоящей работе получены явные выражения для решений, описывающих взаимодействие на плоскости x, y произвольного числа уединенных волн указанного ниже вида. Характерной особенностью этих волн является искривленность их гребней. Хотя /как это будет показано ниже/ многосолитонное решение при определенных условиях также может образовывать уединенную волну с искривленным гребнем, уединенные волны, получаемые из многосолитонных решений, составляют весьма узкий подкласс среди уединенных волн рассматриваемого здесь вида. Тем не менее приводимые здесь формулы для N-волнового решения по своей структуре очень сходны с аналогичными формулами для N-солитонного решения. Этот факт говорит о том, что граница между солитонными и несолитонными решениями нелинейных интегрируемых систем еще нуждается в уточнении.

Итак, рассмотрим систему уравнений [1,2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial x} |\phi|^2 = 0,$$
$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = u\phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad /1/$$

описывающую /в некотором приближении/ взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Здесь u - амплитуда длинной волны, ϕ - комплексная огибающая пакета коротких волн, параметр κ удовлетворяет условию $\kappa^2 = 1$.

Система /1/ обладает односолитонным решением вида

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu t + 2\sigma y) + \delta]},$$
$$\phi = a\,\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)t + i\tau y]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu t + 2\sigma y) + \delta]}, \qquad /2/$$

где вещественные параметры μ, ν, σ и комплексная величина a удовлетворяют единственному состношению

$$2(\nu - \sigma)\mu^2 + \kappa |a|^2 = 0, \qquad /3/$$

а величины δ и τ принимают произвольные вещественные значения. Из этого соотношения следует, что для существования солитонов /2/ параметры ν и σ должны удовлетворять неравенству

$$(\sigma - \nu)\kappa \geq 0. \qquad /4/$$

С помощью четырех вещественных параметров μ, ν, σ, τ образуем две комплексные величины ω и ρ^2 вида

$$\omega = \mu + i\nu, \quad \rho^2 = \bar{\omega}^2 + \tau + 2i\mu\sigma, \qquad /5/$$

где чертой обозначено комплексное сопряжение. Эти параметры будут играть важную роль в дальнейшем. В частности, при $\sigma = \nu$ солитон /2/ в силу /3/ вырождается в бегущую волну вида

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu x + 2\mu\nu(t + y) + \delta]}, \quad \phi \equiv 0. \qquad /6/$$

В соответствии с /5/ параметр ρ^2 в этом случае может принимать только вещественные значения. Далее, полагая $\sigma = \tau = 0$, согласно /5/ находим, что $\rho^2 = \bar{\omega}^2$. В этом случае солитон /2/ имеет вид

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu t) + \delta]},$$

$$\phi = a\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)t]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu t) + \delta]}, \qquad /7/$$

т.е. является решением системы уравнений [3,4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\kappa\frac{\partial}{\partial x}|\phi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial \phi}{\partial t} = u\phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad /8/$$

получающейся из /1/ в результате выбрасывания члена $\frac{\partial u}{\partial y}$. Наконец, отметим, что $N > 1$ солитонов вида /2/ с одинаковыми величинами ω_m, но с различными величинами ρ_m^2, $m = 1, \ldots, N$, образуют уединенную волну вида

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu t + f)]},$$

$$\phi = A \frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)t]}{\operatorname{ch}[\mu(x + 2\nu t + f)]}, \qquad /9/$$

где величины f и A не зависят от x и t. Однако эти величины могут зависеть от координаты y и удовлетворяют соотношению

$$\frac{df}{dy} = 2\nu + \kappa\mu^{-2}\,|A|^2 . \qquad /10/$$

Из этого соотношения следует, что $\frac{d^2 f}{dy^2} \neq 0$ всюду, где $\frac{d|A|^2}{dy} \neq 0$, т е. гребень волны /9/ имеет отличную от нуля кривизну всюду, где $\frac{d|A|^2}{dy} \neq 0$.

Нетрудно убедиться, что соотношение /10/ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы определенные посредством /9/ функции u и ϕ удовлетворяли системе /1/. Более того, как будет показано ниже, класс пар функций f и A, удовлетворяющих соотношению /10/, существенно шире того, который можно получить из рассмотрения N-солитонного решения системы /1/ при указанном выше выборе параметров ω_m и ρ_m^2, $m = 1,\ldots,N$. Таким образом, волны вида /9/ далеко не всегда могут быть получены из N-солитонного решения системы /1/. Тем не менее взаимодействие $N > 1$ волн вида /9/ всегда описывается формулами, очень сходными по структуре с формулами N-солитонного решения системы /1/. Мы сейчас докажем это утверждение, построив явные выражения для N-волнового решения системы /1/.

С этой целью возьмем вектор-столбец λ с N компонентами λ_m вида

$$\lambda_m = \exp(\omega_m x - i\omega_m^2 t), \quad m = 1,\ldots,N, \qquad /11/$$

где ω_m - комплексные параметры. Возьмем, далее, квадратную матрицу P порядка N с элементами $P_{m,n}$ вида

$$P_{m,n} = \frac{\lambda_m \bar{\lambda}_n}{\omega_m + \bar{\omega}_n}, \quad m, n = 1,\ldots, N. \qquad /12/$$

Пусть, наконец, q - вектор-столбец с N компонентами $q_1,\ldots,q_N$, а Q - эрмитова матрица порядка N с элементами $Q_{m,n}$, $m,n = 1,\ldots, N$, такими, что выполняется равенство

$$\frac{dQ}{dy} - i\bar{\omega}^2 Q + iQ\omega^2 = \kappa\bar{q}\tilde{q}, \qquad /13/$$

где

$$\omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_N), \qquad /14/$$

а знак "~" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Таким образом, выражение $\tilde{q}\tilde{q}$ определяет эрмитову матрицу порядка N с элементами $\bar{q}_m q_n$, $m, n = 1, \ldots, N$. Предположим теперь, что компоненты q_m вектора q и элементы $Q_{m,n}$ матрицы Q не зависят от x и t. Положим

$$D = \det\begin{vmatrix} I & -Q \\ P & I \end{vmatrix}, \qquad \Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{q} \\ 0 & I & -Q \\ \lambda & P & I \end{vmatrix}, \qquad /15/$$

где I - единичная матрица порядка N. Тогда функции

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D, \quad \phi = \frac{\Phi}{D} \qquad /16/$$

удовлетворяют системе /1/ всюду, где $D \neq 0$.

С учетом /16/ легко находим, что для того, чтобы доказать это утверждение, нам достаточно убедиться в справедливости соотношений

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\right)D = \left(\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial y}\right)\frac{\partial D}{\partial x} - \kappa|\Phi|^2, \qquad /17/$$

$$\left(i\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)D = \left(i\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)\Phi - 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \qquad /18/$$

Справедливость этих соотношений, как будет показано ниже, вытекает из следующей алгебраической леммы.

Алгебраическая лемма. Пусть B - квадратная матрица порядка $r+2$, $r > 0$. Пусть, далее, $B_{\mu,\nu}$ - квадратная матрица порядка $r+1$, получающаяся из матрицы B после вычеркивания элементов μ-й строки и ν-го столбца, а $\beta_{\mu,\nu} = \det B_{\mu,\nu}$, $\mu, \nu = 1, \ldots, r+2$. Пусть, наконец, B_0 - минор r-го порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы B. Тогда справедливо равенство

$$(\det B)(\det B_0) = \beta_{1,1}\beta_{2,2} - \beta_{1,2}\beta_{2,1}. \qquad /19/$$

Доказательство этой леммы тривиально и поэтому опущено /см., например, работу [5] /.

Покажем теперь, каким образом соотношения /17/ и /18/ следуют из равенства /19/. С этой целью возьмем квадратные матрицы $F_{m,n}$, G_m и V вида

$$F_{m,n} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda^* \bar{\omega}^n & 0 \\ 0 & 1 & -Q \\ \omega^m \lambda & P & 1 \end{vmatrix}, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0, \qquad /20/$$

$$G_m = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{q} \\ 0 & 1 & -Q \\ \omega^m \lambda & P & 1 \end{vmatrix}, \quad m \geq 0, \qquad /21/$$

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{q} \\ 0 & 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -Q \\ \omega\lambda & \lambda & P & 1 \end{vmatrix}. \qquad /22/$$

Здесь и всюду в дальнейшем звездочкой обозначено эрмитово сопряжение, т.е. транспонирование и комплексное сопряжение, выполняемые одновременно. Нетрудно видеть, что матрицы $F_{m,n}$ и G_m имеют порядок $2N + 1$, а матрица V имеет порядок, равный $2N + 2$. С помощью несложных вычислений, основанных на равенствах /11/, /12/ и /15/, нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$\frac{\partial D}{\partial x} = -\det F_{0,0}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -\det F_{0,1} - \det F_{1,0},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \det G_1, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \det G_2 - \det V, \qquad /23/$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -i \det F_{0,1} + i \det F_{1,0},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i \det G_2 - i \det V. \qquad /24/$$

Отсюда следует, что

$$i\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=-2\det F_{1,0}\ ,$$

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}=2\det V. \qquad /25/$$

Воспользуемся теперь алгебраической леммой. Положим $B = V$. Тогда согласно /20/-/22/ имеем

$$B_{1,1}=F_{0,0}\ ,\quad B_{1,2}=F_{1,0}\ ,\quad B_{2,1}=G_0\ ,\quad B_{2,2}=G_1\ .$$

Далее, на основе /22/ получаем равенство

$$B_0=\begin{vmatrix} I & -Q \\ P & I \end{vmatrix}.$$

Отсюда в силу /15/ следует, что

$$\det B_0=D.$$

Таким образом, в этой ситуации равенство /19/ принимает вид

$$D\det V=\det\begin{vmatrix} \det F_{0,0} & \det G_0 \\ \det F_{1,0} & \det G_1 \end{vmatrix}. \qquad /26/$$

В соответствии с равенствами /15/, /21/, /23/ и /25/ получаем, что соотношение /26/ совпадает с соотношением /18/. Следовательно, справедливость соотношения /18/ доказана.

Вычислим теперь величину $\frac{\partial D}{\partial y}$. С этой целью возьмем диагональную матрицу Y вида

$$Y=\exp(i\omega^2 y), \qquad /27/$$

где матрица ω определена посредством равенства /14/, и положим

$$\hat{P}=Y^{-1}P\bar{Y}^{-1}\ ,\quad \hat{Q}=\bar{Y}QY. \qquad /28/$$

На основании /13/ матрица $\hat{Q}$ удовлетворяет условию

$$\frac{d\hat{Q}}{dy} = \kappa\, \bar{Y} \bar{q} \tilde{q} Y \,. \qquad /29/$$

С другой стороны, в силу /15/ имеем

$$D = \det \begin{vmatrix} I & -\hat{Q} \\ \hat{P} & I \end{vmatrix} .$$

С учетом /11/, /12/, /20/ и /27/-/29/ отсюда следует равенство

$$\frac{\partial D}{\partial y} = -i \det F_{0,1} + i \det F_{1,0} + \kappa \det R \,,$$

где

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{q} \\ \bar{q} & I & -Q \\ 0 & P & I \end{vmatrix} . \qquad /30/$$

Согласно /24/ получаем равенство

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial y} = -\kappa \det R \,, \qquad /31/$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t\, \partial x} - \frac{\partial^2 D}{\partial x\, \partial y} = \kappa \det U \,, \qquad /32/$$

где

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{q} \\ 0 & 0 & \lambda^* & 0 \\ \bar{q} & 0 & I & -Q \\ 0 & \lambda & P & I \end{vmatrix} . \qquad /33/$$

Воспользуемся снова алгебраической леммой. Пусть $B = U$. Тогда в соответствии с равенствами /15/, /20/, /30/ и /33/ находим, что

$$B_{1,1} = F_{0,0} \,, \quad \det B_{2,1} = \Phi \,, \quad B_{2,2} = R \,, \quad \det B_0 = D \,.$$

Далее, на основе эрмитовости матриц P и Q убеждаемся в справедливости равенства

$$\bar{\Phi} = \det \begin{vmatrix} 0 & \lambda^* & 0 \\ \bar{q} & I & -Q \\ 0 & P & I \end{vmatrix},$$

т.е. в силу /33/ имеем $\det B_{1,2} = \bar{\Phi}$. Таким образом, в рассматриваемом нами сейчас случае равенство /19/ принимает вид

$$D \det U = \det \begin{vmatrix} \det F_{0,0} & \bar{\Phi} \\ \Phi & \det R \end{vmatrix}. \qquad /34/$$

Согласно равенствам /23/, /31/ и /32/ соотношение /34/ эквивалентно соотношению /17/. Следовательно, справедливость соотношений /17/ и /18/ доказана полностью.

Здесь необходимо отметить, что определенная посредством /11/ и /12/ эрмитова матрица P будет неотрицательной, если величины ω_m удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \omega_m > 0, \quad m = 1, \ldots, N. \qquad /35/$$

Наоборот, матрица P будет неположительной, если выполняется условие

$$\operatorname{Re} \omega_m < 0, \quad m = 1, \ldots, N. \qquad /36/$$

Таким образом, выбирая эрмитову матрицу Q неотрицательной, если имеет место условие /35/, или, наоборот, беря ее неположительной, если справедливо условие /36/, мы в обоих случаях с учетом равенства /15/ убеждаемся в справедливости неравенства $D \geq 1$. Это значит, что определенное посредством /16/ решение системы /1/ в этой ситуации не имеет особенностей. Кроме того, из эрмитовости матриц P и Q следует, что определенная посредством /15/ и /16/ функция u при любых вещественных значениях x, y, t принимает только вещественные значения.

Пусть теперь

$$q_m = a_m \exp[-i(\omega_m^2 - \bar{\rho}_m^2) y], \quad m = 1, \ldots, N,$$
$$Q_{m,n} = i\kappa \frac{\bar{q}_m q_n}{\rho_m^2 - \bar{\rho}_n^2}, \quad m, n = 1, \ldots, N, \qquad /37/$$

где $a_m \neq 0$, ω_m и ρ_m^2 - комплексные параметры. С помощью несложных вычислений находим, что в этом случае вектор q и эрмитова матрица Q удовлетворяют равенству /13/. В соответствии с /5/ положим

$$\omega_m = \mu_m + i\nu_m, \quad \rho_m^2 = \bar{\omega}_m^2 + \tau_m + 2i\mu_m\sigma_m, \quad m = 1, \ldots, N,$$

где μ_m, ν_m, σ_m и τ_m - вещественные параметры. Нетрудно убедиться, что матрица Q будет неотрицательной, если выполнено условие /35/, а параметры ν_m и σ_m удовлетворяют аналогичному /4/ неравенству

$$(\sigma_m - \nu_m)\kappa > 0, \quad m = 1, \ldots, N. \qquad /38/$$

Наоборот, матрица Q будет неположительной, если одновременно выполнены условия /36/ и /38/. Следовательно, подчиняя выбор величин ω_m и ρ_m^2 либо условиям /35/ и /38/, либо условиям /36/ и /38/, мы получим решение системы /1/, не имеющее особенностей при любых вещественных значениях x, y, t. Полученное таким образом решение системы /1/ является уже известным N-солитонным решением[6]. Оно описывает взаимодействие N солитонов вида /2/. Если в этом решении при некоторых значениях индекса m положить $\sigma_m = \nu_m + \kappa|a_m|^2 c_m$, где $c_m > 0$, и перейти к пределу при $a_m \to 0$, то полученное в результате N-солитонное решение системы /1/ будет содержать некоторое число солитонов вида /6/. Далее, полагая $\rho_m^2 = \bar{\omega}_m^2$ при некоторых значениях индекса m, мы добьемся того, что наше N-солитонное решение системы /1/ будет содержать также некоторое число солитонов вида /7/. Наконец, полагая в исходном решении $\rho_m^2 = \bar{\omega}_m^2$ при всех значениях индекса $m = 1, \ldots, N$, мы получим N-солитонное решение системы /8/.

Положим теперь в равенствах /37/ $\omega_1 = \ldots = \omega_N = \mu + i\nu$, где μ и ν - вещественные параметры. С помощью несложных вычислений убеждаемся в справедливости равенств

$$D = 1 + K \exp[2\mu(x + 2\nu t)],$$

$$\Phi = L \exp[\mu(x + 2\nu t)] \exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)t],$$

где

$$K = \frac{i\kappa}{2\mu} \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\bar{q}_m q_n}{\rho_m^2 - \bar{\rho}_n^2}, \quad L = -\sum_{m=1}^{N} q_m. \qquad /39/$$

Если все величины ρ_m^2 взяты разными, то из неравенства /38/ следует, что квадратичная форма K положительно определена. Это значит, что $K > 0$ при любом вещественном значении координаты y. Таким образом, в силу /16/ рассматриваемое нами решение системы /1/ в данном случае действительно имеет вид /9/, если положить

$$f = \frac{1}{2\mu} \ln K, \quad A = \frac{1}{2} L K^{-1/2} . \qquad /40/$$

С учетом /37/ получаем, что определенные выше величины K и L удовлетворяют соотношению

$$2\mu \frac{dK}{dy} = 8\mu^2 \nu K + \kappa |L|^2 .$$

Отсюда вытекает, что определенные посредством /39/ и /40/ величины f и A удовлетворяют соотношению /10/. Далее, справедливо равенство

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{\kappa}{4\mu^2 K^2}\left(K \frac{d}{dy}|L|^2 - |L|^2 \frac{dK}{dy}\right).$$

Из этого равенства согласно /39/ следует, что если среди величин ρ_m^2 имеются по крайней мере две разные, то справедливо неравенство $\frac{d^2 f}{dy^2} \neq 0$, т.е. гребень волны /9/ в этом случае не является прямой линией.

Рассмотренная выше уединенная волна не исчерпывает всех возможных здесь случаев. Чтобы убедиться в этом, положим

$$q_m = \sum_{r=0}^{N} a_{m,r} \exp[-i(\omega_m^2 - \bar{\rho}_{m,r}^2) y], \quad m = 1, \dots, N ,$$

$$Q_{m,n} = C_{m,n} \exp[i(\bar{\omega}_m^2 - \omega_n^2) y] + \qquad /41/$$

$$+ i\kappa \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_{m,r}\, a_{n,s}}{\rho_{m,r}^2 - \bar{\rho}_{n,s}^2} \exp[i(\bar{\omega}_m^2 - \omega_n^2 - \rho_{m,r}^2 + \bar{\rho}_{n,s}^2) y],$$

$$m, n = 1, \dots, N ,$$

где $a_{m,r}$, $C_{m,n}$, ω_n и $\rho_{m,r}^2$ - комплексные параметры. Нетрудно видеть, что так определенные вектор q и матрица Q удовлетворяют соотношению /13/. Кроме того, матрица Q будет, очевидно, эрмитовой, если величины $C_{m,n}$ образуют эрмитову матрицу. Далее, нетрудно убедиться, что если $C_{m,n} = 0$ при $m, n = 1, \ldots, N$, а среди величин $a_{m,r}$ имеется только конечное число отличных от нуля, то получаемое в этом случае с помощью /41/ решение системы /1/ описывает взаимодействие N уединенных волн вида /9/, каждая из которых может быть получена из многосолитонного решения системы /1/ указанным выше способом, и, следовательно, само решение может быть получено из многосолитонного решения системы /1/. Однако в случае, когда среди величин $a_{m,r}$ имеется бесконечно много отличных от нуля, получаемое с помощью /41/ решение системы /1/, очевидно, невозможно получить из многосолитонного решения этой системы. Существуют и другие возможности для выбора вектора q и матрицы Q, которые удовлетворяют соотношению /13/ и позволяют получить другие типы уединенных волн вида /9/, отличных от многосолитонных. Заслуживают особого упоминания уединенные волны вида /9/ с ограниченными при всех $y \in (-\infty, \infty)$ функциями f_m, такими, что $\frac{df_m}{dy} \not\equiv 0$. Такого типа уединенные волны распространяются вдоль оси x и имеют искривленный гребень.

В заключение необходимо отметить, что полученное нами N-волновое решение системы /1/ имеет богатую нетривиальную динамику. Детальному рассмотрению этого вопроса будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mel'nikov V.K. - Lett. Math. Phys., 1983, v.7, No.2, p.129.
2. Мельников В.К.- Препринт ОИЯИ Р2-87-494, Дубна, 1987.
3. Yajima N., Oikawa M. - Progr. Theor. Phys., 1976, v.56, No.6, p.1719.
4. Ma Y.-C. - Stud. Appl. Math., 1978, v.59, No.3, p.201.
5. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1987, v.112, N 4, p.639.
6. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-86-724, Дубна, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 января 1989 года.