89-472

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-472

В.К.Мельников

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАКСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в Оргкомитет 5 Международного Совещания по нелинейным эволюционным уравнениям и динамическим системам, Греция, 2-16 июля 1989 г.

1989

Мельников В.К. Р2-89-472
Интегрирование уравнений Лакса
с самосогласованным источником

Показано, что для любой нелинейной эволюционной системы, обладающей операторным представлением (представлением Лакса с помощью L-A-пары), существует возмущение (именуемое самосогласованным источником), которое порождается собственными функциями оператора L и которое не нарушает интегрируемости исходной системы. Для широкого класса операторов L приведена схема интегрирования возмущенной системы с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-89-472
Integration of the Lax Equations with
a Self-Consistent Source

It is shown that for any nonlinear evolution equation having the operator representation (Lax representation by using L-A pair) there exists perturbation (named a self-consistent source) generated by the eigenfunctions of the operator L such that the perturbed equation can also be integrated by the inverse scattering method for the operator L. The scheme of integrating these equations is found for a wide class of operators L.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

В настоящей работе речь идет об интегрировании семейства нелинейных эволюционных уравнений, получаемых следующим образом. Пусть L – линейный дифференциальный оператор вида

$$L = \partial^{k_0+2} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \partial^k , \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad k_0 \geq 0. \tag{1}$$

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$(L-\lambda) f_0 = a \frac{\partial f_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \psi_n f_0 , \quad n = 1, \ldots, N , \tag{2}$$

относительно неизвестных функций $f_0, f_1, \ldots, f_N$. Здесь a – константа, а $\psi_1, \ldots, \psi_N$ – некоторые (пока неопределенные) функции. Возьмем, далее, линейный дифференциальный оператор A вида

$$A = \partial^{m_0+2} + \sum_{m=0}^{m_0} a_m \partial^m , \quad m_0 \geq 0, \tag{3}$$

и с помощью решения $f_0, f_1, \ldots, f_N$ системы (2) определим величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + cAf_0 + \kappa \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n ,$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{k_0+1} (-1)^k \frac{\partial^k \psi_n}{\partial x^k} \frac{\partial^{k_0-k+1} f_0}{\partial x^{k_0-k+1}} + \tag{4}$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \frac{\partial^r (\psi_n u_k)}{\partial x^r} \frac{\partial^{k-r-1} f_0}{\partial x^{k-r-1}} - a \frac{\partial f_n}{\partial y} - (\lambda - \lambda_n) f_n ,$$

$$n = 1, \ldots, N ,$$

где c и κ - константы, а $\psi_1,\dots,\psi_N$ - некоторые функции. Выясним теперь, каким условиям должны удовлетворять функции u_0, $u_1,\dots,u_{k_0}$, $\phi_1,\dots,\phi_N$ и $\psi_1,\dots,\psi_N$ для того, чтобы определенные посредством (1)-(4) величины g_0, $g_1,\dots,g_N$ удовлетворяли требованиям

$$(L-\lambda)g_0 = \alpha\frac{\partial g_0}{\partial y} + \kappa\sum_{n=1}^{N}\phi_n g_n, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x}\equiv 0, \quad n=1,\dots,N. \tag{5}$$

В результате несложных вычислений находим, что для справедливости равенств (5) необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial t} + c[A,L] + \alpha c\frac{\partial A}{\partial y} = \kappa\Gamma,\\ (L-\lambda_n)\phi_n = \alpha\frac{\partial\phi_n}{\partial y}, \quad (\tilde{L}-\lambda_n)\psi_n + \alpha\frac{\partial\psi_n}{\partial y} = 0, \quad n=1,\dots,N,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\tilde{L} = (-1)^{k_0}\partial^{k_0+2} + \sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\partial^k\cdot u_k, \tag{7}$$

а оператор Γ определяется посредством равенства

$$\begin{aligned}\Gamma = {} & \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{k_0+1}\Big\{\partial^{k_0-k+1}\cdot\Big(\frac{\partial^k\phi_n}{\partial x^k}\psi_n\Big) - \\ & -(-1)^k\phi_n\frac{\partial^k\psi_n}{\partial x^k}\partial^{k_0-k+1}\Big\} + \\ & + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{r=0}^{k-1}\Big\{u_k\partial^{k-r-1}\cdot\Big(\frac{\partial^r\phi_n}{\partial x^r}\psi_n\Big) - \\ & -(-1)^r\phi_n\frac{\partial^r(\psi_n u_k)}{\partial x^r}\partial^{k-r-1}\Big\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Из этого равенства следует, что порядок оператора Γ не превосходит k_0. Таким образом, в том случае, когда порядок оператора $[A,L]$ не превосходит $\max(k_0,m_0)$, первое из уравнений (6) определяет некоторую систему нелинейных эволюционных уравнений. Ниже будет приведена схема интегрирования этой системы уравнений в классе быстро убывающих при $x\to\pm\infty$ функций.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В дальнейшем нам потребуется ряд вспомогательных утверждений, имеющих своим идейным источником работу [1]. В несколько ином виде эти утверждения уже встречались ранее в ряде работ (см., например, [2]).

Итак, пусть функция $K = K(x,y,z)$ определена при любых $x, y\in(-\infty,\infty)$ и $z\geq x$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) при любых $x, y\in(-\infty,\infty)$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\int_x^\infty\Big\{|K(x,y,z)| + \Big|\frac{\partial K(x,y,z)}{\partial y}\Big|\Big\}dz < \infty,\\ \sum_{k=1}^{k_0+2}\int_x^\infty\Big\{\Big|\frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial x^k}\Big| + \Big|\frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial z^k}\Big|\Big\}dz < \infty;\end{gathered} \tag{1.1}$$

2) при любых $x, y, \zeta\in(-\infty,\infty)$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{k_0}(i\zeta)^k u_k(x,y)\exp(i\zeta x) - \\ &-\sum_{k=0}^{k_0+1}\frac{\partial^{k_0-k+1}}{\partial x^{k_0-k+1}}\Big\{\frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial x^k}\Big|_{z=x}\exp(i\zeta x)\Big\} + \\ &+\sum_{k=0}^{k_0+1}(i\zeta)^{k_0-k+1}(-1)^k\frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{z=x}\exp(i\zeta x) - \\ &-\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{r=0}^{k-1}u_k(x,y)\frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}}\Big\{\frac{\partial^r K(x,y,z)}{\partial x^r}\Big|_{z=x}\exp(i\zeta x)\Big\} = 0;\end{aligned} \tag{1.2}$$

3) при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $z \ge x$ функция $K = K(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^{k_0+2} K(x,y,z)}{\partial x^{k_0+2}} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k(x,y) \frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial x^k} = \tag{1.3}$$

$$= a \frac{\partial K(x,y,z)}{\partial y} + (-1)^{k_0} \frac{\partial^{k_0+2} K(x,y,z)}{\partial z^{k_0+2}}.$$

Тогда при любом ζ, принадлежащем полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \ge 0$, функция $f_0 = f_0(x,y,\zeta)$ вида

$$f_0 = \exp(i\zeta x) + \int_x^\infty K(x,y,z) \exp(i\zeta z)\, dz \tag{1.4}$$

удовлетворяет уравнению

$$L f_0 - a \frac{\partial f_0}{\partial y} = (i\zeta)^{k_0+2} f_0 . \tag{1.5}$$

Действительно, в силу (1.1) функция f_0 вида (1.4) определена при любом ζ, лежащем в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \ge 0$. Кроме того, функция f_0 обладает производными по x до (k_0+2)-го порядка. При этом справедливы равенства

$$\frac{\partial^k f_0}{\partial x^k} = (i\zeta)^k \exp(i\zeta x) -$$

$$- \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}} \left\{ \frac{\partial^r K(x,y,z)}{\partial x^r}\bigg|_{z=x} \exp(i\zeta x) \right\} +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial x^k} \exp(i\zeta z)\, dz, \quad k = 1, \dots, k_0+2 .$$

С другой стороны, произведя в равенстве (1.4) интегрирование по z, получаем соотношение

$$(i\zeta)^{k_0+2} f_0 = (i\zeta)^{k_0+2} \exp(i\zeta x) -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_0+1} (i\zeta)^{k_0-k+1} (-1)^k \frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial z^k}\bigg|_{z=x} \exp(i\zeta x) +$$

$$+ (-1)^{k_0} \int_x^\infty \frac{\partial^{k_0+2} K(x,y,z)}{\partial z^{k_0+2}} \exp(i\zeta z)\, dz .$$

Наконец, имеет место равенство

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} = \int_x^\infty \frac{\partial K(x,y,z)}{\partial y} \exp(i\zeta z)\, dz .$$

Подставляя полученные выше выражения для $\dfrac{\partial^k f_0}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial f_0}{\partial y}$ и $(i\zeta)^{k_0+2} f_0$ в уравнение (1.5), легко убеждаемся, что в соответствии с равенствами (1.2) и (1.3) уравнение (1.5) удовлетворено.

Пусть теперь функция $F = F(x,y,z)$ определена при любых $x, y, z \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^{k_0+2} F(x,y,z)}{\partial x^{k_0+2}} = a \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} + (-1)^{k_0} \frac{\partial^{k_0+2} F(x,y,z)}{\partial z^{k_0+2}} . \tag{1.6}$$

Предположим, что при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $z \ge x$ уравнение Гельфанда - Левитана

$$K(x,y,z) + F(x,y,z) + \int_x^\infty K(x,y,\eta) F(\eta,y,z)\, d\eta = 0 \tag{1.7}$$

имеет единственное решение $K = K(x,y,z)$. Тогда функция $K = K(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1.3) при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $z \ge x$.

Действительно, согласно (1.7) справедливы равенства

$$\frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial x^k} + \frac{\partial^k F(x,y,z)}{\partial x^k} -$$

$$- \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}} \left\{ \frac{\partial^r K(x,y,\eta)}{\partial x^r}\bigg|_{\eta=x} F(x,y,z) \right\} +$$

$$+\int_x^\infty \frac{\partial^k K(x,y,\eta)}{\partial x^k}\, F(\eta,y,z)\, d\eta = 0, \quad k = 1,\dots, k_0+2, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial K(x,y,z)}{\partial y} + \int_x^\infty \frac{\partial K(x,y,\eta)}{\partial y}\, F(\eta,y,z)\, d\eta +$$

$$+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} + \int_x^\infty K(x,y,\eta)\, \frac{\partial F(\eta,y,z)}{\partial y}\, d\eta = 0,$$

$$\frac{\partial^{k_0+2} K(x,y,z)}{\partial z^{k_0+2}} + \frac{\partial^{k_0+2} F(x,y,z)}{\partial z^{k_0+2}} +$$

$$+\int_x^\infty K(x,y,\eta)\, \frac{\partial^{k_0+2} F(\eta,y,z)}{\partial z^{k_0+2}}\, d\eta = 0.$$

С учетом (1.6) из этих равенств вытекает соотношение

$$M(x,y,z) + \int_x^\infty M(x,y,\eta)\, F(\eta,y,z)\, d\eta + R(x,y,z) = 0,$$

где

$$M = \frac{\partial^{k_0+2} K(x,y,z)}{\partial x^{k_0+2}} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k(x,y)\, \frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial x^k} -$$

$$- \alpha\, \frac{\partial K(x,y,z)}{\partial y} - (-1)^{k_0}\, \frac{\partial^{k_0+2} K(x,y,z)}{\partial z^{k_0+2}}, \tag{1.9}$$

$$R = \sum_{k=0}^{k_0} u_k(x,y)\, \frac{\partial^k F(x,y,z)}{\partial x^k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{r=0}^{k-1} u_k(x,y)\, \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}} \left\{ \frac{\partial^r K(x,y,\eta)}{\partial x^r}\Big|_{\eta=x} F(x,y,z) \right\} -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_0+1} \frac{\partial^{k_0-k+1}}{\partial x^{k_0-k+1}} \left\{ \frac{\partial^k K(x,y,\eta)}{\partial x^k}\Big|_{\eta=x} F(x,y,z) \right\} -$$

$$- \int_x^\infty K(x,y,\eta)\, \frac{\partial^{k_0+2} F(\eta,y,z)}{\partial \eta^{k_0+2}}\, d\eta +$$

$$+ (-1)^{k_0} \int_x^\infty \frac{\partial^{k_0+2} K(x,y,\eta)}{\partial \eta^{k_0+2}}\, F(\eta,y,z)\, d\eta.$$

Далее, справедливо равенство

$$\int_x^\infty K(x,y,\eta)\, \frac{\partial^{k_0+2} F(\eta,y,z)}{\partial \eta^{k_0+2}}\, d\eta =$$

$$= (-1)^{k_0} \int_x^\infty \frac{\partial^{k_0+2} K(x,y,\eta)}{\partial \eta^{k_0+2}}\, F(\eta,y,z)\, d\eta -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_0+1} (-1)^k\, \frac{\partial^k K(x,y,\eta)}{\partial \eta^k}\Big|_{\eta=x} \frac{\partial^{k_0-k+1} F(x,y,z)}{\partial x^{k_0-k+1}}.$$

На основе этого равенства выражение для R может быть записано в следующем виде:

$$R = \sum_{k=0}^{k_0} u_k(x,y)\, \frac{\partial^k F(x,y,z)}{\partial x^k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{r=0}^{k-1} u_k(x,y)\, \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}} \left\{ \frac{\partial^r K(x,y,\eta)}{\partial x^r}\Big|_{\eta=x} F(x,y,z) \right\} -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_0+1} \frac{\partial^{k_0-k+1}}{\partial x^{k_0-k+1}} \left\{ \frac{\partial^k K(x,y,\eta)}{\partial x^k}\Big|_{\eta=x} F(x,y,z) \right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0+1} (-1)^k\, \frac{\partial^k K(x,y,\eta)}{\partial \eta^k}\Big|_{\eta=x} \frac{\partial^{k_0-k+1} F(x,y,z)}{\partial x^{k_0-k+1}}.$$

С помощью (1.2) нетрудно убедиться, что при любых $x, y \in \in (-\infty,\infty)$ и $z \geq x$ справедливо тождество $R(x,y,z) \equiv 0$. Отсюда следует, что определенная посредством равенства (1.9) величина $M = M(x,y,z)$ при любых $x, y \in (-\infty,\infty)$ и $z \geq x$ удовлетворяет уравнению

$$M(x, y, z) + \int\limits_x^{\infty} M(x, y, \eta)\, F(\eta, y, z)\, d\eta = 0 .$$

Из предположения, что уравнение (1.7) имеет единственное решение, следует, что при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $z \ge x$ справедливо равенство $M(x, y, z) \equiv 0$, то есть решение $K = K(x, y, z)$ уравнения (1.7) в силу (1.6) обязательно удовлетворяет уравнению (1.3).

Предположим теперь, что функция $F = F(x, y, z)$ при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет требованию

$$|F(x, y, z)| + \int\limits_x^{\infty} |F(\eta, y, z)|\, d\eta \to 0, \qquad \text{если} \quad z \to \infty. \tag{1.10}$$

В соответствии с этим требованием из уравнения (1.7) следует, что при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ имеет место асимптотика

$$K(x, y, z) \to 0, \qquad \text{если} \quad z \to \infty .$$

Более того, предположим, что при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ справедливо условие

$$\int\limits_x^{\infty} |F(x, y, z)|\, dz + \int\limits_x^{\infty}\int\limits_x^{\infty} |F(\eta, y, z)|\, d\eta dz < \infty . \tag{1.11}$$

Тогда согласно (1.7) немедленно убеждаемся, что при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_x^{\infty} |K(x, y, z)|\, dz < \infty .$$

Далее, предположим, что функция $F = F(x, y, z)$ при любых x, $y \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет требованиям

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right| + \int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial F(\eta,y,z)}{\partial y}\right| d\eta \to 0, \qquad \text{если} \quad z \to \infty, \\ \int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right| dz + \int\limits_x^{\infty}\int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial F(\eta, y, z)}{\partial y}\right| d\eta dz < \infty . \end{gathered} \tag{1.12}$$

С учетом уравнения (1.7) отсюда вытекает, что при любых x, $y \in (-\infty, \infty)$ выполняются условия

$$\frac{\partial K(x, y, z)}{\partial y} \to 0, \qquad \text{если} \quad z \to \infty,$$

$$\int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial K(x, y, z)}{\partial y}\right| dz < \infty .$$

Аналогичным образом получаем, что если при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $k = 1, \dots, k_0 + 2$ справедливы требования

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial^k F(x, y, z)}{\partial z^k}\right| + \int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial^k F(\eta, y, z)}{\partial z^k}\right| d\eta \to 0, \qquad \text{если} \quad z \to \infty, \\ \int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial^k F(x, y, z)}{\partial z^k}\right| dz + \int\limits_x^{\infty}\int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial^k F(\eta, y, z)}{\partial z^k}\right| d\eta dz < \infty, \end{gathered} \tag{1.13}$$

то при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $k = 1, \dots, k_0 + 2$ имеют место соотношения

$$\frac{\partial^k K(x, y, z)}{\partial z^k} \to 0, \quad \text{если} \quad z \to \infty,$$

$$\int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial^k K(x, y, z)}{\partial z^k}\right| dz < \infty .$$

Наконец, предположим, что при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $k = 1, \dots, k_0 + 2$ функция $F = F(x, y, z)$ удовлетворяет требованиям

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial^k F(x, y, z)}{\partial x^k}\right| + \int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial^k F(\eta, y, z)}{\partial \eta^k}\right| d\eta \to 0, \qquad \text{если} \quad z \to \infty, \\ \int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial^k F(x, y, z)}{\partial x^k}\right| dz + \int\limits_x^{\infty}\int\limits_x^{\infty} \left|\frac{\partial^k F(\eta, y, z)}{\partial \eta^k}\right| d\eta dz < \infty . \end{gathered} \tag{1.14}$$

На основе этих требований с помощью соотношений (1.8) получаем, что при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $k = 1, \dots, k_0 + 2$ выполняются условия

$$\frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial x^k} \to 0\,, \qquad \text{если} \quad z\to\infty,$$

$$\int_x^\infty \left| \frac{\partial^k K(x,y,z)}{\partial x^k} \right| dz < \infty .$$

Таким образом, налагая дополнительно на функцию $F = F(x,y,z)$ кроме условия (1.6) еще и требования (1.10)-(1.14), мы получим решение $K = K(x,y,z)$ уравнения (1.7), удовлетворяющее уравнению (1.3) и неравенствам (1.1). Отсюда следует, что если коэффициенты $u_0 = u_0(x,y)$, $u_1 = u_1(x,y), \dots, u_{k_0} = u_{k_0}(x,y)$ оператора L вида (1) выбраны так, что выполняется соотношение (1.2), то определенная посредством (1.4) функция $f_0 = f_0(x,y,\zeta)$ удовлетворяет уравнению (1.5).

2. ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Начиная с этого момента, мы должны будем отказаться от традиционного способа использования уравнения Гельфанда - Левитана для построения эволюционного оператора. Цель этого отклонения - нахождение величин $g_0, g_1, \dots, g_N$ вида (4), удовлетворяющих соотношениям (5). Достигается это следующим образом.

Пусть A - линейный дифференциальный оператор вида (3). Положим

$$T = \frac{\partial}{\partial t} + cA, \tag{2.1}$$

где c - константа. Пусть, далее, функция $K = K(t,x,y,z)$ определена при любых $t,\ x, y \in (-\infty,\infty)$ и $z \geq x$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) при любых $t,\ x,\ y \in (-\infty,\infty)$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\int_x^\infty \left\{ |K(t,x,y,z)| + \left|\frac{\partial K(t,x,y,z)}{\partial t}\right| \right\} dz < \infty, \\ \sum_{m=1}^{m_0+2} \int_x^\infty \left\{ \left|\frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial x^m}\right| + \left|\frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial z^m}\right| \right\} dz < \infty ;\end{gathered} \tag{2.2}$$

2) при любых $t,\ x,\ y,\ \zeta \in (-\infty,\infty)$ выполняется соотношение

$$\begin{gathered}\sum_{m=0}^{m_0} (i\zeta)^m a_m(t,x,y) \exp(i\zeta x) - \\ - \sum_{m=1}^{m_0}\sum_{r=0}^{m-1} a_m(t,x,y) \frac{\partial^{m-r-1}}{\partial x^{m-r-1}} \left\{ \frac{\partial^r K(t,x,y,z)}{\partial x^r}\Big|_{z=x} \exp(i\zeta x) \right\} - \\ - \sum_{m=0}^{m_0+1} \frac{\partial^{m_0-m+1}}{\partial x^{m_0-m+1}} \left\{ \frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial x^m}\Big|_{z=x} \exp(i\zeta x) \right\} + \\ + \sum_{m=0}^{m_0+1} (i\zeta)^{m_0-m+1} (-1)^m \frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial z^m}\Big|_{z=x} \exp(i\zeta x) = 0 .\end{gathered} \tag{2.3}$$

Тогда при любом ζ, принадлежащем полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \geq 0$, функция $f_0 = f_0(t,x,y,\zeta)$ вида

$$f_0 = \exp(i\zeta x) + \int_x^\infty K(t,x,y,z)\exp(i\zeta z)\,dz \tag{2.4}$$

удовлетворяет соотношению

$$Tf_0 - c(i\zeta)^{m_0+2} f_0 = c\int_x^\infty \hat{K}(t,x,y,z)\exp(i\zeta z)\,dz , \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered}\hat{K} = \frac{1}{c}\frac{\partial K(t,x,y,z)}{\partial t} + \frac{\partial^{m_0+2} K(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0+2}} + \\ + \sum_{m=0}^{m_0} a_m(t,x,y)\frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial x^m} - (-1)^{m_0}\frac{\partial^{m_0+2} K(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+2}} .\end{gathered} \tag{2.6}$$

Действительно, в силу (2.2) и (2.4) имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \int_x^\infty \frac{\partial K(t,x,y,z)}{\partial t}\exp(i\zeta z)\,dz ,$$

$$\frac{\partial^m f_0}{\partial x^m} = (i\zeta)^m \exp(i\zeta x) -$$

$$- \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\partial^{m-r-1}}{\partial x^{m-r-1}} \left\{ \frac{\partial^r K(t,x,y,z)}{\partial x^r} \Big|_{z=x} \exp(i\zeta x) \right\} +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial x^m} \exp(i\zeta z)\, dz, \quad m = 1, \dots, m_0 + 2 .$$

С другой стороны, после интегрирования по частям из равенства (2.4) вытекает соотношение

$$(i\zeta)^{m_0+2} f_0 = (i\zeta)^{m_0+2} \exp(i\zeta x) -$$

$$- \sum_{m=0}^{m_0+1} (i\zeta)^{m_0-m+1} (-1)^m \frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial z^m} \Big|_{z=x} \exp(i\zeta x) +$$

$$+ (-1)^{m_0} \int_x^\infty \frac{\partial^{m_0+2} K(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+2}} \exp(i\zeta z)\, dz .$$

В соответствии с (3), (2.1) и (2.3) из этих равенств следует справедливость соотношений (2.5) и (2.6).

Рассмотрим теперь при $z \geq x$ уравнение Гельфанда - Левитана

$$K(t,x,y,z) + F(t,x,y,z) + \int_x^\infty K(t,x,y,\eta) F(t,\eta,y,z)\, d\eta = 0 . \qquad (2.7)$$

Покажем, что из этого уравнения вытекает соотношение

$$\hat{K}(t,x,y,z) + \int_x^\infty \hat{K}(t,x,y,\eta) F(t,\eta,y,z)\, d\eta + \hat{F}(t,x,y,z) + \int_x^\infty K(t,x,y,\eta) \hat{F}(t,\eta,y,z)\, d\eta = 0, \qquad (2.8)$$

где

$$\hat{F} = \frac{1}{c} \frac{\partial F(t,x,y,z)}{\partial t} + \frac{\partial^{m_0+2} F(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0+2}} - (-1)^{m_0} \frac{\partial^{m_0+2} F(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+2}} . \qquad (2.9)$$

Действительно, согласно (2.7) имеем

$$\frac{\partial K(t,x,y,z)}{\partial t} + \int_x^\infty \frac{\partial K(t,x,y,\eta)}{\partial t} F(t,\eta,y,z)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\partial F(t,x,y,z)}{\partial t} + \int_x^\infty K(t,x,y,\eta) \frac{\partial F(t,\eta,y,z)}{\partial t}\, d\eta = 0,$$

$$\frac{\partial^m K(t,x,y,z)}{\partial x^m} + \frac{\partial^m F(t,x,y,z)}{\partial x^m} -$$

$$- \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\partial^{m-r-1}}{\partial x^{m-r-1}} \left\{ \frac{\partial^r K(t,x,y,\eta)}{\partial x^r} \Big|_{\eta=x} F(t,x,y,z) \right\} +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{\partial^m K(t,x,y,\eta)}{\partial x^m} F(t,\eta,y,z)\, d\eta = 0, \quad m = 1, \dots, m_0 + 2,$$

$$\frac{\partial^{m_0+2} K(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+2}} + \frac{\partial^{m_0+2} F(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+2}} +$$

$$+ \int_x^\infty K(t,x,y,\eta) \frac{\partial^{m_0+2} F(t,\eta,y,z)}{\partial z^{m_0+2}}\, d\eta = 0 .$$

С учетом этих равенств получаем соотношение

$$\hat{K}(t,x,y,z) + \int_x^\infty \hat{K}(t,x,y,\eta) F(t,\eta,y,z)\, d\eta +$$

$$+ \hat{F}(t,x,y,z) + \int_x^\infty K(t,x,y,\eta) \hat{F}(t,\eta,y,z)\, d\eta = P,$$

где функции $\hat{K}$ и $\hat{F}$ определены соответственно посредством равенств (2.6) и (2.9), а величина P допускает представление

$$P = - \sum_{m=0}^{m_0} a_m(t,x,y) \frac{\partial^m F(t,x,y,z)}{\partial x^m} +$$

$$+\sum_{m=1}^{m_0}\sum_{r=0}^{m-1} a_m(t,x,y)\frac{\partial^{m-r-1}}{\partial x^{m-r-1}}\left\{\frac{\partial^r K(t,x,y,\eta)}{\partial x^r}\Big|_{\eta=x} F(t,x,y,z)\right\}+$$

$$+\sum_{m=0}^{m_0+1}\frac{\partial^{m_0-m+1}}{\partial x^{m_0-m+1}}\left\{\frac{\partial^m K(t,x,y,\eta)}{\partial x^m}\Big|_{\eta=x} F(t,x,y,z)\right\}-$$

$$-(-1)^{m_0}\int_x^{\infty}\frac{\partial^{m_0+2}K(t,x,y,\eta)}{\partial\eta^{m_0+2}}F(t,\eta,y,z)\,d\eta+$$

$$+\int_x^{\infty}K(t,x,y,\eta)\frac{\partial^{m_0+2}F(t,\eta,y,z)}{\partial\eta^{m_0+2}}\,d\eta.$$

На основе равенства

$$\int_x^{\infty}K(t,x,y,\eta)\frac{\partial^{m_0+2}F(t,\eta,y,z)}{\partial\eta^{m_0+2}}\,d\eta=$$

$$=(-1)^{m_0}\int_x^{\infty}\frac{\partial^{m_0+2}K(t,x,y,\eta)}{\partial\eta^{m_0+2}}F(t,\eta,y,z)\,d\eta-$$

$$-\sum_{m=0}^{m_0+1}(-1)^m\frac{\partial^m K(t,x,y,\eta)}{\partial\eta^m}\Big|_{\eta=x}\frac{\partial^{m_0-m+1}F(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0-m+1}}$$

выражение для P принимает вид

$$P=-\sum_{m=0}^{m_0}a_m(t,x,y)\frac{\partial^m F(t,x,y,z)}{\partial x^m}+$$

$$+\sum_{m=1}^{m_0}\sum_{r=0}^{m-1}a_m(t,x,y)\frac{\partial^{m-r-1}}{\partial x^{m-r-1}}\left\{\frac{\partial^r K(t,x,y,\eta)}{\partial x^r}\Big|_{\eta=x}F(t,x,y,z)\right\}+$$

$$+\sum_{m=0}^{m_0+1}\frac{\partial^{m_0-m+1}}{\partial x^{m_0-m+1}}\left\{\frac{\partial^m K(t,x,y,\eta)}{\partial x^m}\Big|_{\eta=x}F(t,x,y,z)\right\}-$$

$$-\sum_{m=0}^{m_0+1}(-1)^m\frac{\partial^m K(t,x,y,\eta)}{\partial\eta^m}\Big|_{\eta=x}\frac{\partial^{m_0-m+1}F(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0-m+1}}.$$

В силу (2.3) из этого равенства следует, что $P\equiv 0$ при любых $t,\ x,\ y\subset(-\infty,\infty)$ и $z\geq x$. Таким образом, справедливость соотношения (2.8) доказана. Это значит, что эволюционный оператор T вида (2.1) действует на определенную посредством (2.4) функцию $\hat{f}_0$ так, что выполняется соотношение (2.5). При этом величина $\breve{K}=K(t,x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (2.8).

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (2.8)

Теперь нам необходимо установить связь между определенной с помощью равенства (4) величиной $\hat{g}_0$ и входящей в соотношение (2.5) величиной $\breve{K}$. Для этого нам нужно найти решение уравнения (2.8). С этой целью предположим, что справедливо равенство

$$F=F_0(t,x,y,z)+\sum_{n=1}^{N}F_n(t,x,y,z),\tag{3.1}$$

где F_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F_0(t,x,y,z)}{\partial t}+\frac{\partial^{m_0+2}F_0(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0+2}}=(-1)^{m_0}\frac{\partial^{m_0+2}F_0(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+2}},\tag{3.2}$$

а величины F_n при $n=1,\dots,N$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F_n(t,x,y,z)}{\partial t}+\frac{\partial^{m_0+2}F_n(t,x,y,z)}{\partial x^{m_0+2}}-(-1)^{m_0}\frac{\partial^{m_0+2}F_n(t,x,y,z)}{\partial z^{m_0+2}}=\frac{\kappa}{c}A_n(t)\,F_n(t,x,y,z).\tag{3.3}$$

С учетом равенств (3.1)-(3.3) получаем, что определенная посредством (2.9) величина $\breve{F}$ в данном случае имеет вид

$$\hat{F}=\frac{\kappa}{c}\sum_{n=1}^{N}A_n(t)\,F_n(t,x,y,z).\tag{3.4}$$

Предположим, далее, что входящая в равенство (3.1) функция $F_0 = F_0(t,x,y,z)$ при любых $t, x, y, z \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет уравнению (1.6), а функции $F_n = F_n(t,x,y,z)$ при $n = 1, \ldots, N$ имеют вид

$$F_n = \Phi_n(t,x,y)\,\Psi_n(t,z,y), \tag{3.5}$$

где функции $\Phi_n = \Phi_n(t,x,y)$ и $\Psi_n = \Psi_n(t,z,y)$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{gathered} a\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = \frac{\partial^{k_0+2}\Phi_n}{\partial x^{k_0+2}} - \lambda_n \Phi_n, \\ a\frac{\partial \Psi_n}{\partial y} + (-1)^{k_0}\frac{\partial^{k_0+2}\Psi_n}{\partial z^{k_0+2}} = \lambda_n \Psi_n. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Кроме того, предположим, что при любых $t, y \in (-\infty, \infty)$ справедливы асимптотики

$$\begin{gathered} |\Phi_n(t,x,y)| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\Phi_n(t,x,y)\right| \to 0, \qquad \text{если } x \to \infty, \\ |\Psi_n(t,z,y)| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\Psi_n(t,z,y)\right| \to 0, \qquad \text{если } z \to \infty. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Согласно (3.4) и (3.5) справедливо равенство

$$\begin{gathered} \hat{F}(t,x,y,z) + \int_x^\infty K(t,x,y,\eta)\,\hat{F}(t,\eta,y,z)\,d\eta = \\ = \frac{\kappa}{c}\sum_{n=1}^{N} A_n(t)\,\phi_n(t,x,y)\,\Psi_n(t,z,y), \end{gathered} \tag{3.8}$$

где

$$\phi_n = \Phi_n(t,x,y) + \int_x^\infty K(t,x,y,\eta)\,\Phi_n(t,\eta,y)\,d\eta. \tag{3.9}$$

Покажем, что определенная посредством (3.9) функция $\phi_n = \phi_n(t,x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$a\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = (L - \lambda_n)\phi_n, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{3.10}$$

Действительно, в силу (3.7) справедливы равенства

$$\frac{\partial \phi_n(t,x,y)}{\partial y} = \int_x^\infty \frac{\partial K(t,x,y,\eta)}{\partial y}\Phi_n(t,\eta,y)\,d\eta +$$

$$+ \frac{\partial \Phi_n(t,x,y)}{\partial y} + \int_x^\infty K(t,x,y,\eta)\frac{\partial \Phi_n(t,\eta,y)}{\partial y}\,d\eta,$$

$$\frac{\partial^k \phi_n(t,x,y)}{\partial x^k} = \frac{\partial^k \Phi_n(t,x,y)}{\partial x^k} -$$

$$- \sum_{r=0}^{k-1}\frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}}\left\{\frac{\partial^r K(t,x,y,\eta)}{\partial x^r}\Big|_{\eta=x}\Phi_n(t,x,y)\right\} +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{\partial^k K(t,x,y,\eta)}{\partial x^k}\Phi_n(t,\eta,y)\,d\eta, \quad k = 1, \ldots, k_0+2.$$

На основе этих равенств в соответствии с уравнениями (1.3) и (3.6) справедливо соотношение

$$a\frac{\partial \phi_n}{\partial y} - (L - \lambda_n)\phi_n + P_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N,$$

где

$$P_n = \sum_{k=0}^{k_0} u_k(t,x,y)\frac{\partial^k \Phi_n(t,x,y)}{\partial x^k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{r=0}^{k-1} u_k(t,x,y)\frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}}\left\{\frac{\partial^r K(t,x,y,\eta)}{\partial x^r}\Big|_{\eta=x}\Phi_n(t,x,y)\right\} -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_0+1}\frac{\partial^{k_0-k+1}}{\partial x^{k_0-k+1}}\left\{\frac{\partial^k K(t,x,y,\eta)}{\partial x^k}\Big|_{\eta=x}\Phi_n(t,x,y)\right\} -$$

$$- \int_x^\infty K(t,x,y,\eta) \frac{\partial^{k_o+2} \Phi_n(t,\eta,y)}{\partial \eta^{k_o+2}} d\eta +$$

$$+ (-1)^{k_o} \int_x^\infty \frac{\partial^{k_o+2} K(t,x,y,\eta)}{\partial \eta^{k_o+2}} \Phi_n(t,\eta,y)\, d\eta .$$

С помощью равенства

$$\int_x^\infty K(t,x,y,\eta) \frac{\partial^{k_o+2} \Phi_n(t,\eta,y)}{\partial \eta^{k_o+2}} d\eta =$$

$$= (-1)^{k_o} \int_x^\infty \frac{\partial^{k_o+2} K(t,x,y,\eta)}{\partial \eta^{k_o+2}} \Phi_n(t,\eta,y)\, d\eta -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_o+1} (-1)^k \frac{\partial^k K(t,x,y,\eta)}{\partial \eta^k}\Big|_{\eta=x} \frac{\partial^{k_o-k+1} \Phi_n(t,x,y)}{\partial x^{k_o-k+1}}$$

выражение для P_n может быть записано в следующем виде:

$$P_n = \sum_{k=0}^{k_o} u_k(t,x,y) \frac{\partial^k \Phi_n(t,x,y)}{\partial x^k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{k_o} \sum_{r=0}^{k-1} u_k(t,x,y) \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}} \left\{ \frac{\partial^r K(t,x,y,\eta)}{\partial x^r}\Big|_{\eta=x} \Phi_n(t,x,y) \right\} -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_o+1} \frac{\partial^{k_o-k+1}}{\partial x^{k_o-k+1}} \left\{ \frac{\partial^k K(t,x,y,\eta)}{\partial x^k}\Big|_{\eta=x} \Phi_n(t,x,y) \right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_o+1} (-1)^k \frac{\partial^k K(t,x,y,\eta)}{\partial \eta^k}\Big|_{\eta=x} \frac{\partial^{k_o-k+1} \Phi_n(t,x,y)}{\partial x^{k_o-k+1}} .$$

С учетом соотношения (1.2) получаем, что при любых $t,\ x,\ y \in (-\infty,\infty)$ выполняется тождество $P_n(t,x,y) \equiv 0$, $n = 1,\dots,N$. Следовательно, справедливость уравнения (3.10) доказана.

Определим теперь по аналогии с (2) величины $f_n = f_n(t,x,y,\zeta)$, $n = 1,\dots,N$, посредством равенств

$$f_n = - \int_x^\infty \psi_n(t,z,y)\, f_0(t,z,y,\zeta)\, dz , \tag{3.11}$$

где величины $\psi_n = \psi_n(t,z,y)$ будем считать пока неопределенными. После несложных вычислений на основе (2.4) находим, что при $n = 1,\dots,N$ справедливо равенство

$$f_n = - \int_x^\infty [\, \psi_n(t,z,y) + \int_x^z \psi_n(t,\eta,y) K(t,\eta,y,z)\, d\eta] \exp(i\zeta z)\, dz . \tag{3.12}$$

С учетом равенств (4) и (2.5) потребуем выполнения соотношения

$$c \int_x^\infty \hat{K}(t,x,y,z) \exp(i\zeta z) dz = -\kappa \sum_{n=1}^{N} \phi_n(t,x,y) f_n(t,x,y,\zeta), \tag{3.13}$$

где ϕ_n и f_n определены соответственно посредством равенств (3.9) и (3.11). В силу (3.12) из равенства (3.13) следует, что

$$\hat{K}(t,x,y,z) = \frac{\kappa}{c} \sum_{n=1}^{N} \phi_n(t,x,y) [\, \psi_n(t,z,y) +$$

$$+ \int_x^z \psi_n(t,\eta,y) K(t,\eta,y,z)\, d\eta] . \tag{3.14}$$

В соответствии с этим равенством в результате несложных вычислений убеждаемся в справедливости соотношения

$$\hat{K}(t,x,y,z) + \int_x^\infty \hat{K}(t,x,y,\eta) F(t,\eta,y,z)\, d\eta =$$

$$= \frac{\kappa}{c} \sum_{n=1}^{N} \phi_n(t,x,y) [\, \psi_n(t,z,y) - \int_z^\infty \psi_n(t,\eta,y) K(t,\eta,y,z)\, d\eta] . \tag{3.15}$$

При этом функция $K = K(t,x,y,z)$ при $x > z$ определяется по значениям этой функции в полуплоскости $x \le z$ с помощью равенства

$$K(t,x,y,z) = - F(t,x,y,z) - \int_x^\infty K(t,x,y,\eta) F(t,\eta,y,z)\, d\eta . \tag{3.16}$$

Сравнивая равенство (3.15) с равенством (3.8), легко убеждаемся, что функция $\hat{K} = \hat{K}(t,x,y,z)$ вида (3.14) будет удовлетворять уравнению (2.8), если выполняются соотношения

$$\psi_n(t,z,y) - \int_z^\infty \psi_n(t,x,y)\, K(t,x,y,z)\, dx + A_n(t)\, \Psi_n(t,z,y) \equiv 0, \quad n = 1, \dots, N. \tag{3.17}$$

Предположим теперь, что это уравнение имеет единственное решение $\psi_n = \psi_n(t,x,y)$. Покажем, что в этом случае функция $\psi_n = \psi_n(t,x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha \frac{\partial \psi_n}{\partial y} + (\tilde{L} - \lambda_n)\, \psi_n = 0, \quad n = 1, \dots, N, \tag{3.18}$$

где оператор $\tilde{L}$ определен посредством равенства (7). Действительно, из равенства (3.17) вытекает, что при $n = 1, \dots, N$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial \psi_n(t,z,y)}{\partial y} - \int_z^\infty \frac{\partial \psi_n(t,x,y)}{\partial y} K(t,x,y,z)\, dx - \int_z^\infty \psi_n(t,x,y) \frac{\partial K(t,x,y,z)}{\partial y} dx + A_n(t) \frac{\partial \Psi_n(t,z,y)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^{k_0+2} \psi_n(t,z,y)}{\partial z^{k_0+2}} + A_n(t) \frac{\partial^{k_0+2} \Psi_n(t,z,y)}{\partial z^{k_0+2}} + \sum_{k=0}^{k_0+1} \frac{\partial^{k_0-k+1}}{\partial z^{k_0-k+1}} \Big\{ \psi_n(t,z,y) \frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial z^k} \Big|_{x=z} \Big\} - \int_z^\infty \psi_n(t,x,y) \frac{\partial^{k_0+2} K(t,x,y,z)}{\partial z^{k_0+2}} dx = 0.$$

Из равенства (3.16) следует, что определенная посредством этого равенства при $x > z$ функция $K = K(t,x,y,z)$ и при $x > z$ удовлетворяет уравнению (1.3). На основе этого факта в силу (3.6) справедливо равенство

$$\alpha \frac{\partial \psi_n(t,z,y)}{\partial y} + (-1)^{k_0} \frac{\partial^{k_0+2} \psi_n(t,z,y)}{\partial z^{k_0+2}} - \lambda_n \psi_n(t,z,y) -$$

$$- \int_z^\infty \psi_n(t,x,y) \Big\{ \frac{\partial^{k_0+2} K(t,x,y,z)}{\partial x^{k_0+2}} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k(t,x,y) \frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial x^k} \Big\} dx -$$

$$- \int_z^\infty \Big\{ \alpha \frac{\partial \psi_n(t,x,y)}{\partial y} - \lambda_n \psi_n(t,x,y) \Big\} K(t,x,y,z)\, dx +$$

$$+ (-1)^{k_0} \sum_{k=0}^{k_0+1} \frac{\partial^{k_0-k+1}}{\partial z^{k_0-k+1}} \Big\{ \psi_n(t,z,y) \frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial z^k} \Big|_{x=z} \Big\} = 0.$$

Далее, справедливы равенства

$$\int_z^\infty \psi_n(t,x,y)\, u_k(t,x,y) \frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial x^k} dx = (-1)^k \int_z^\infty \Big\{ \frac{\partial^k}{\partial x^k} [\psi_n(t,x,y)\, u_k(t,x,y)] \Big\} K(t,x,y,z)\, dx -$$

$$- \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial z^r} [\psi_n(t,z,y)\, u_k(t,z,y)] \frac{\partial^{k-r-1} K(t,x,y,z)}{\partial x^{k-r-1}} \Big|_{x=z},$$

$$\int_z^\infty \psi_n(t,x,y) \frac{\partial^{k_0+2} K(t,x,y,z)}{\partial x^{k_0+2}} dx = (-1)^{k_0} \int_z^\infty \frac{\partial^{k_0+2} \psi_n(t,x,y)}{\partial x^{k_0+2}} K(t,x,y,z)\, dx -$$

$$- \sum_{k=0}^{k_0+1} (-1)^k \frac{\partial^k \psi_n(t,z,y)}{\partial z^k} \frac{\partial^{k_0-k+1} K(t,x,y,z)}{\partial x^{k_0-k+1}} \Big|_{x=z}.$$

В соответствии с этими равенствами получаем следующее соотношение:

$$\alpha \frac{\partial \psi_n(t,z,y)}{\partial y} + (-1)^{k_0} \frac{\partial^{k_0+2} \psi_n(t,z,y)}{\partial z^{k_0+2}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z^k} [\psi_n(t,z,y)\, u_k(t,z,y)] - \lambda_n \psi_n(t,z,y) -$$

$$- \int_z^\infty \Big\{ \alpha \frac{\partial \psi_n(t,x,y)}{\partial y} + (-1)^{k_0} \frac{\partial^{k_0+2} \psi_n(t,x,y)}{\partial x^{k_0+2}} +$$

$$+\sum_{k=0}^{k_o}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}[\psi_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)]\,-$$

$$-\lambda_n\psi_n(t,x,y)\,\}\,K(t,x,y,z)\,dx\,-$$

$$-\sum_{k=0}^{k_o}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial z^k}[\psi_n(t,z,y)\,u_k(t,z,y)]\,+$$

$$+(-1)^{k_o}\sum_{k=0}^{k_o+1}\frac{\partial^{k_o-k+1}}{\partial z^{k_o-k+1}}\{\psi_n(t,z,y)\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{x=z}\}\,+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_o}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r\frac{\partial^r}{\partial z^r}[\psi_n(t,z,y)\,u_k(t,z,y)]\,\frac{\partial^{k-r-1}K(t,x,y,z)}{\partial x^{k-r-1}}\Big|_{x=z}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k_o+1}(-1)^k\frac{\partial^k\psi_n(t,z,y)}{\partial z^k}\,\frac{\partial^{k_o-k+1}K(t,x,y,z)}{\partial x^{k_o-k+1}}\Big|_{x=z}=0.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{aligned}&(a\frac{\partial}{\partial y}+\tilde{L}-\lambda_n)\,\psi_n(t,z,y)\,-\\&-\int_z^{\infty}[(a\frac{\partial}{\partial y}+\tilde{L}-\lambda_n)\psi_n(t,x,y)]\,K(t,x,y,z)\,dx=Q_n,\end{aligned}\qquad(3.19)$$

где

$$Q_n=\sum_{k=0}^{k_o}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial z^k}[\psi_n(t,z,y)\,u_k(t,z,y)]\,+$$

$$+\sum_{k=0}^{k_o+1}(-1)^{k_o-k}\frac{\partial^{k_o-k+1}\psi_n(t,z,y)}{\partial z^{k_o-k+1}}\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial x^k}\Big|_{x=z}\,-$$

$$-(-1)^{k_o}\sum_{k=0}^{k_o+1}\frac{\partial^{k_o-k+1}}{\partial z^{k_o-k+1}}\{\psi_n(t,z,y)\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{x=z}\}\,-$$

$$-\sum_{k=1}^{k_o}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-r}\frac{\partial^{k-r-1}}{\partial z^{k-r-1}}[\psi_n(t,z,y)\,u_k(t,z,y)]\,\frac{\partial^r K(t,x,y,z)}{\partial x^r}\Big|_{x=z}.$$

С учетом условий $u_k(t,x,y)\to 0$, $\psi_n(t,x,y)\to 0$ при $x\to\pm\infty$ справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}(i\zeta)^k\psi_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)\,\exp(i\zeta x)\,dx=$$

$$=(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{\partial^k}{\partial x^k}[\psi_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)]\}\exp(i\zeta x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(t,x,y)\,\frac{\partial^{k_o-k+1}}{\partial x^{k_o-k+1}}\{\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial x^k}\Big|_{z=x}\exp(i\zeta x)\}\,dx=$$

$$=(-1)^{k_o-k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{k_o-k+1}\psi_n(t,x,y)}{\partial x^{k_o-k+1}}\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial x^k}\Big|_{z=x}\exp(i\zeta x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(i\zeta)^{k_o-k+1}(-1)^k\psi_n(t,x,y)\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{z=x}\exp(i\zeta x)\,dx=$$

$$=(-1)^{k_o+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{k_o-k+1}}{\partial x^{k_o-k+1}}\{\psi_n(t,x,y)\,\frac{\partial^k K(t,x,y,z)}{\partial z^k}\Big|_{z=x}\}\exp(i\zeta x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)\,\frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}}\{\frac{\partial^r K(t,x,y,z)}{\partial x^r}\Big|_{z=x}\exp(i\zeta x)\}\,dx=$$

$$=(-1)^{k-r-1}\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}}[\psi_n(t,x,y)\,u_k(t,x,y)]\}\,\frac{\partial^r K(t,x,y,z)}{\partial x^r}\Big|_{z=x}\exp(i\zeta x)\,dx.$$

Предположим теперь, что коэффициенты $u_0=u_0(t,x,y)$, $u_1=u_1(t,x,y)$, ..., $u_{k_o}=u_{k_o}(t,x,y)$ оператора L вида (1) выбраны так, что соотношение (1.2) выполняется при любых $t,x,y,\zeta\in(-\infty,\infty)$. Отсюда следует, что входящая в равенство (3.19) величина $Q_n=Q_n(t,z,y)$ при любых t, y, $\zeta\in(-\infty,\infty)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(t,z,y)\exp(i\zeta z)\,dz=0.$$

Это значит, что при любых t, $x,y\in(-\infty,\infty)$ имеем тождество $Q_n(t,x,y)\equiv 0$, то есть величина

$$\hat{\psi}_n(t, x, y) = (\alpha \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{L} - \lambda_n)\psi_n(t, x, y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\hat{\psi}_n(t, z, y) - \int_z^\infty \hat{\psi}_n(t, x, y)\, K(t, x, y, z)\, dx = 0 . \qquad (3.20)$$

На основе предположения, что уравнение (3.17) имеет единственное решение, из равенства (3.20) следует, что $\hat{\psi}_n(t,x,y) \equiv 0$, то есть определенная с помощью (3.17) функция $\psi_n = \psi_n(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению (3.18).

Возьмем теперь определенные посредством (2.4), (3.11), (3.9) и (3.17) величины $f_0, f_1, \ldots, f_N, \phi_1, \ldots, \phi_N$ и $\psi_1, \ldots, \psi_N$, и с их помощью образуем согласно (4) величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$. Нетрудно видеть, что определенные так величины $g_1, \ldots, g_N$ удовлетворяют условию $g_1 = \ldots = g_N \equiv 0$, а в силу (2.5) и (3.13) справедливо равенство $g_0 = (i\zeta)^{m_0+2} f_0$. Отсюда следует, что выполняется равенство

$$\{ \frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] + \alpha c \frac{\partial A}{\partial y} - \kappa \Gamma \} f_0 = 0,$$

где оператор Γ определен равенством (8). На основе этого равенства получаем, что

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] + \alpha c \frac{\partial A}{\partial y} = \kappa \Gamma,$$

то есть определенные с помощью (1.2) и (2.3) коэффициенты операторов L и A вида (1) и (3) удовлетворяют системе (6), если оператор Γ вида (8) определен с помощью решений уравнений (3.9) и (3.17). Таким образом, интересующее нас решение системы (6) найдено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. - Известия АН СССР, серия матем., 1951, т.15, №4, с.309.
2. Захаров В.Е., Шабат А.Б. - Функциональный анализ, 1974, т.8, вып.3, с.43.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1989 года.