89-148

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-418

В.К.Мельников

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ВРИСА С ИСТОЧНИКОМ

Направлено в журнал "Inverse Problems"

1989

Мельников В.К. P2-89-418
Интегрирование уравнения Кортевега - де Вриса
с источником

Показано, что быстро убывающие при $x \to \pm\infty$ решения уравнения Кортевега - де Вриса с источником могут быть найдены с помощью метода обратной задачи рассеяния для одномерного оператора Шредингера на прямой. Найдены условия, при которых уравнение Кортевега - де Вриса с источником имеет чисто солитонное решение. Полученные результаты имеют тесную связь с рядом проблем гидродинамики, физики плазмы, физики твердого тела и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-89-418
Integration of the Korteweg - de Vries
Equation with a Source

It is shown that solutions rapidly decreasing as $x \to \pm\infty$ of the Korteweg - de Vries equation with a source can be obtained by the inverse scattering method for the one-dimensional Schroedinger operator on a straight line. The conditions are found under which the Korteweg - de Vries equation with a source has a pure soliton solution. The obtained result are relevant to some problems of hydrodynamics, plasma physics, solid state physics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

В настоящей работе излагается метод интегрирования /в классе быстро убывающих по x функций/ следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 2\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{N}\phi_n(x)\,\psi_n(x) +$$

$$+ 2\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,\zeta)\,\psi(x,\zeta)\,d\zeta, \qquad /1/$$

$$(L-\lambda_n)\,\phi_n = (L-\lambda_n)\,\psi_n = 0, \quad n=1,\dots,N, \qquad /2/$$

$$(L+\zeta^2)\,\phi = (L+\zeta^2)\,\psi = 0, \quad \zeta\in(-\infty,\infty), \qquad /3/$$

именуемой всюду в дальнейшем уравнением Кортевега - де Вриса с источником. Здесь L - оператор Шредингера, т.е.

$$L = \partial^2 + u, \qquad /4/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, а $u=u(x)$ - вещественная функция этой переменной, обладающая непрерывными производными $u'(x)$, $u''(x)$ и $u'''(x)$ по x, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(|xu(x)| + \sum_{k=0}^{3}|u^{(k)}(x)|\right)dx < \infty. \qquad /5/$$

В соответствии со сказанным выше положительные величины λ_n считаются не зависящими от x и удовлетворяют неравенству $\lambda_m \neq \lambda_n$ при $m\neq n$, а функции $\phi_n = \phi_n(x)$ и $\psi_n = \psi_n(x)$ являются решениями стационарного уравнения Шредингера, удовлетворяющими условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(|\phi_n(x)|^2 + |\psi_n(x)|^2\right)dx < \infty, \quad n=1,\dots,N. \qquad /6/$$

Далее, функции $\phi = \phi(x, \zeta)$ и $\psi = \psi(x, \zeta)$ предполагаются непрерывными по параметру ζ вместе с производными по ζ первого порядка $\phi'_\zeta = \frac{\partial}{\partial \zeta}\phi(x, \zeta)$ и $\psi'_\zeta = \frac{\partial}{\partial\zeta}\psi(x, \zeta)$, такими, что условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|\phi(x, \zeta)|^2 + |\psi(x, \zeta)|^2)\, d\zeta < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|\phi'_\zeta(x, \zeta)|^2 + |\psi'_\zeta(x, \zeta)|^2)\, d\zeta < \infty, \qquad /7/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, \zeta)|^2 + |\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, \zeta)|^2)\, d\zeta < \infty$$

выполняются при любом вещественном x. Эти условия не только гарантируют корректность записи уравнения /1/, но и обеспечат в будущем возможность совершать с функциями $\phi = \phi(x, \zeta)$ и $\psi = \psi(x, \zeta)$ все необходимые операции, в частности, позволяют образовывать с их помощью интегралы в смысле Коши. Наконец, мы будем предполагать, что функции $\phi_1 = \phi_1(x)$, ..., $\phi_N = \phi_N(x)$, $\psi_1 = \psi_1(x)$, ..., $\psi_N = \psi_N(x)$, $\phi = \phi(x, \zeta)$ и $\psi = \psi(x, \zeta)$ выбраны так, что выражение, стоящее в правой части уравнения /1/, принимает только вещественные значения при любом вещественном значении x и $t \ge 0$.

В этой ситуации с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера вида /4/ будет найдено решение задачи Коши для системы /1/-/3/, обладающее следующими свойствами. Пусть $u_0 = u_0(x)$ - произвольная вещественная функция x, удовлетворяющая условию /5/. Пусть, далее, оператор Шредингера L при $u = u_0(x)$ имеет ровно N точек дискретного спектра $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, \ldots, N$. Пусть, наконец, $A_n = A_n(t)$ - произвольные непрерывные функции t, принимающие только вещественные значения, $n = 1, \ldots, N$, а комплекснозначные функции $p = p(\zeta, t)$, $q = q(\zeta, t)$, $r = r(\zeta, t)$ и $s = s(\zeta, t)$ непрерывны по ζ и t вместе с производными по ζ первого порядка $p'_\zeta = \frac{\partial}{\partial\zeta}p(\zeta, t)$, $q'_\zeta = \frac{\partial}{\partial\zeta}q(\zeta, t)$, $r'_\zeta = \frac{\partial}{\partial\zeta}r(\zeta, t)$ и $s'_\zeta = \frac{\partial}{\partial\zeta}s(\zeta, t)$ и при любом $t \ge 0$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|p(\zeta, t)|^2 + |q(\zeta, t)|^2 + |r(\zeta, t)|^2 + |s(\zeta, t)|^2)\, \zeta^2 d\zeta < \infty$$
$$/8/$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} (|p'_\zeta(\zeta, t)|^2 + |q'_\zeta(\zeta, t)|^2 + |r'_\zeta(\zeta, t)|^2 + |s'_\zeta(\zeta, t)|^2)\, d\zeta < \infty.$$

Пусть, кроме того, величины P и Q вида

$$P(\zeta) = p(\zeta)\, r(\zeta) + q(-\zeta)\, s(-\zeta),$$
$$/9/$$
$$Q(\zeta) = p(\zeta)\, s(\zeta) + q(-\zeta)\, r(-\zeta)$$

при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям

$$P(-\zeta) = \overline{P(\zeta)}, \quad Q(-\zeta) = \overline{Q(\zeta)}, \qquad /10/$$

где черта означает комплексное сопряжение. Тогда существует решение $u = u(x, t)$, $\phi_1 = \phi_1(x, t)$, ..., $\phi_N = \phi_N(x, t)$, $\psi_1 = \psi_1(x, t)$, ..., $\psi_N = \psi_N(x, t)$, $\phi = \phi(x, \zeta, t)$ и $\psi = \psi(x, \zeta, t)$ системы /1/-/3/, такое, что

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x, t)\, \psi_n(x, t)\, dx = A_n(t), \quad n = 1, \ldots, N, \qquad /11/$$

а при $x \to -\infty$, $t \ge 0$ и $\zeta \in (-\infty, \infty)$ выполняются асимптотики

$$\phi \sim p(\zeta, t) \exp(i\zeta x) + q(\zeta, t) \exp(-i\zeta x),$$
$$/12/$$
$$\psi \sim r(\zeta, t) \exp(i\zeta x) + s(\zeta, t) \exp(-i\zeta x).$$

Заметим сразу же, что в силу /12/ неравенства /8/ гарантируют справедливость неравенств /7/.

Выражение, стоящее в правой части уравнения /1/, распадается на две части. Первая часть порождается собственными функциями, соответствующими дискретному спектру оператора Шредингера. Вторая часть образована собственными функциями, относящимися к непрерывному спектру оператора Шредингера. В том случае, когда второе слагаемое в правой части уравнения /1/ отсутствует, т.е. когда $\phi(x, \zeta) = \psi(x, \zeta) \equiv 0$, получающаяся в результате система /1/, /2/ была проинтегрирована ранее [1].

Далее, в работе [2] был дан иной подход к интегрированию рассмотренной в [1] системы уравнений. Наконец, в работе [3] было обнаружено, что система /1/-/3/ обладает бесконечным числом локальных законов сохранения. Это обстоятельство существенно стимулировало исследование системы /1/-/3/. Примененный в настоящей работе метод является дальнейшим развитием подхода, уже использованного ранее [2] для исследования частного случая рассматриваемой здесь системы уравнений /1/-/3/.

Нелишне отметить, что исследование системы /1/-/3/ является важным по ряду причин. Прежде всего оно определяется несомненной важностью системы /1/-/3/ для различных приложений. Кроме того, многие соображения, используемые в настоящей работе, легко модифицируются и могут быть использованы для исследования ряда других нелинейных эволюционных уравнений, например, для исследования нелинейного уравнений Шредингера с источником, модифицированного уравнения Кортевега - де Вриса с источником, системы, описывающей взаимодействие N волн с источником, уравнения Кадомцева - Петвиашвили с источником и многих других.

§1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Возьмем линейные дифференциальные операторы L и A вида [4]:

$$L = \partial^2 + u, \quad A = 4\partial^3 + 3(u\partial + \partial\cdot u), \qquad /13/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, а $u = u(x)$ - функция этой переменной, обладающая непрерывными производными по x до третьего порядка включительно. Как нетрудно убедиться, справедливо равенство

$$[A, L] = 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \qquad /14/$$

Пусть Δ - некоторая область в плоскости комплексного параметра η. Для произвольного значения параметра $\eta \in \Delta$ рассмотрим линейную систему уравнений

$$(L + \eta^2) f_0 = 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \psi_n f_0, \quad n = 1, \dots, N, \qquad /15/$$

относительно неизвестных функций $f_0 = f_0(x, \eta)$, $f_1 = f_1(x, \eta)$, ..., $f_N = f_N(x, \eta)$. Функции $\psi_1 = \psi_1(x)$, ..., $\psi_N = \psi_N(x)$ будем

считать пока неопределенными. Пусть, далее, функции $F = F(x, \zeta, \eta)$ и $\psi = \psi(x, \zeta)$ связаны соотношением

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \psi(x, \zeta)\, f_0(x, \eta), \quad \zeta \in (-\infty, \infty), \quad \eta \in \Delta. \qquad /16/$$

С помощью решения $f_0, f_1, \dots, f_N$ системы /15/ и функции F, удовлетворяющей соотношению /16/, для любого $\eta \in \Delta$ определим величины $g_0 = g_0(x, \eta)$, $g_1 = g_1(x, \eta)$, ..., $g_N = g_N(x, \eta)$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + A f_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, \zeta)\, F(x, \zeta, \eta)\, d\zeta, \qquad /17/$$

$$g_n = \psi_n \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x} f_0 + (\lambda_n + \eta^2) f_0, \quad n = 1, \dots, N,$$

где функции $\phi_1 = \phi_1(x)$, ..., $\phi_N = \phi_N(x)$ и $\phi = \phi(x, \zeta)$ пока не определены. Наконец, положим

$$G(x, \zeta, \eta) = \psi(x, \zeta)\frac{\partial f_0(x, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x, \zeta)}{\partial x} f_0(x, \eta) - (\zeta^2 - \eta^2) F(x, \zeta, \eta), \quad \zeta \in (-\infty, \infty), \quad \eta \in \Delta. \qquad /18/$$

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять функции $u, \phi_1, \dots, \phi_N, \psi_1, \dots, \psi_N$, ϕ и ψ для того, чтобы определенные посредством /17/ и /18/ величины $g_0, g_1, \dots, g_N$ и G при любом $\eta \in \Delta$ удовлетворяли соотношениям

$$(L + \eta^2) g_0 = \sum_{n=1}^{N} \phi_n g_n + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, \zeta)\, G(x, \zeta, \eta)\, d\zeta,$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \zeta \in (-\infty, \infty). \qquad /19/$$

С учетом равенств /13/ и /14/ легко находим, что для справедливости соотношений /19/ необходимо и достаточно выполнение уравнений системы /1/-/3/. Замечательной особенностью соотношений /19/ является то обстоятельство, что с их помощью удается определить эволюцию во времени всех данных рассеяния для оператора Шредингера с потенциалом $u = u(x,t)$, удовлетворяющим уравнению Кортевега - де Вриса с источником. Поэтому мы будем называть их определяющими соотношениями. Ниже процедура определения эволюции во времени данных рассеяния для оператора Шредингера с помощью соотношений /19/ будет описана детально для случая быстро убывающего по x потенциала $u = u(x)$.

§2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В СЛУЧАЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

В том случае, когда потенциал $u = u(x)$ оператора Шредингера быстро убывает при $x \to \pm\infty$, определяющие соотношения /19/ удается сильно упростить. Именно, предположим, что потенциал $u = u(x)$ удовлетворяет требованию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|u(x)|\,dx < \infty.$$

Как известно, в этом случае уравнение Шредингера

$$(L+\eta^2) f_0 = 0 \qquad /20/$$

при любом $\eta \in (-\infty,\infty)$ имеет фундаментальную системы решений $f_0^- = f_0^-(x,\eta)$ и $f_0^+ = f_0^+(x,\eta)$, обладающую следующим асимптотическим поведением:

$$f_0^- \sim \exp(-i\eta x), \quad x \to -\infty,$$

$$f_0^+ \sim \exp(i\eta x), \quad x \to \infty.$$

Далее, известно, что определенные таким образом функции $f_0^- = f_0^-(x,\eta)$ и $f_0^+ = f_0^+(x,\eta)$ допускают аналитическое продолжение по параметру η в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. При этом в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\eta \geq 0$ справедливы соотношения

$$\lim_{x\to-\infty} [\, f_0^-(x,\eta)\exp(i\eta x)\,] = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} [\, f_0^+(x,\eta)\exp(-i\eta x)\,] = 1. \qquad /21/$$

Следуя /15/, положим при $n = 1, \ldots, N$

$$f_n^- = \int_{-\infty}^{x} \psi_n(z)\, f_0^-(z,\eta)\, dz,$$

$$f_n^+ = -\int_{x}^{\infty} \psi_n(z)\, f_0^+(z,\eta)\, dz. \qquad /22/$$

В том случае, когда функции $\psi_n = \psi_n(x)$ удовлетворяют условию /6/, равенства /22/ в силу /21/ определяют функции $f_n^- = f_n^-(x,\eta)$ и $f_n^+ = f_n^+(x,\eta)$, $n = 1, \ldots, N$, как некоторые аналитические функции параметра η в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$. Более того, при любом значении параметра η, лежащем в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\eta \geq 0$, выполняются асимптотики

$$f_n^- \to 0, \text{ если } x \to -\infty,$$

$$f_n^+ \to 0, \text{ если } x \to \infty. \qquad /23/$$

Наконец, следуя /16/, положим

$$F_-(x,\zeta,\eta) = \int_{-\infty}^{x} \psi(z,\zeta)\, f_0^-(z,\eta)\, dz,$$

$$F_+(x,\zeta,\eta) = -\int_{x}^{\infty} \psi(z,\zeta)\, f_0^+(z,\eta)\, dz. \qquad /24/$$

На основании /21/ эти равенства определяют функции F_- и F_+ при любых $x, \zeta \in (-\infty,\infty)$ как аналитические функции параметра η в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$. Согласно /3/, /20/ и /21/ определенные посредством /24/ функции F_- и F_+ при любом значении параметра η, принадлежащем верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$, могут быть представлены в виде

$$F_- = (\zeta^2-\eta^2)^{-1}\left[\psi(x,\zeta)\frac{\partial f_0^-(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial\psi(x,\zeta)}{\partial x} f_0^-(x,\eta)\right],$$

$$F_+ = (\zeta^2-\eta^2)^{-1}\left[\psi(x,\zeta)\frac{\partial f_0^+(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial\psi(x,\zeta)}{\partial x} f_0^+(x,\eta)\right]. \qquad /25/$$

Правые части приведенных выше выражений /25/, очевидно, имеют смысл и при любых вещественных значениях параметра η, удовлетворяющих условию $\eta^2 \neq \zeta^2$.

По аналогии с равенством /17/ положим теперь при $\mathrm{Im}\,\eta > 0$

$$g_0^- = \frac{\partial f_0^-}{\partial t} + A f_0^- + \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n^- + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\zeta)\, F_-(x,\zeta,\eta)\, d\zeta,$$

$$g_0^+ = \frac{\partial f_0^+}{\partial t} + A f_0^+ + \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n^+ + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\zeta)\, F_+(x,\zeta,\eta)\, d\zeta. \qquad /26/$$

В соответствии со сказанным выше определенные так величины $g_0^- = g_0^-(x,\eta)$ и $g_0^+ = g_0^+(x,\eta)$ зависят аналитически от параметра η в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\eta > 0$. Однако в силу того, что при любом вещественном $\eta \neq 0$ функции F_- и F_+ имеют особенности в точках $\zeta = \eta$ и $\zeta = -\eta$, предельные значения функций g_0^- и g_0^+ при $\mathrm{Im}\,\eta \to +0$ нуждаются в аккуратном определении. Подставляя правые части равенств /25/ в выражения /26/ для величин g_0^- и g_0^+, с помощью несложных вычислений получаем, что при $\mathrm{Im}\,\eta = 0$ справедливы равенства

$$g_0^- = \frac{\partial f_0^-}{\partial t} + A f_0^- + \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n^- + \fint_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\zeta)\, F_-(x,\zeta,\eta)\, d\zeta +$$

$$+ \Phi_1^-(\eta)\,\phi(x,\eta) + \Phi_2^-(\eta)\,\phi(x,-\eta), \qquad /27/$$

$$g_0^+ = \frac{\partial f_0^+}{\partial t} + A f_0^+ + \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n^+ + \fint_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\zeta)\, F_+(x,\zeta,\eta)\, d\zeta +$$

$$+ \Phi_1^+(\eta)\,\phi(x,\eta) + \Phi_2^+(\eta)\,\phi(x,-\eta),$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения, а величины Φ_1^-, Φ_2^-, Φ_1^+ и Φ_2^+ определяются выражениями

$$\Phi_1^-(\eta) = \frac{\pi i}{2\eta}\left[\psi(x,\eta)\,\frac{\partial f_0^-(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,\eta)}{\partial x}\, f_0^-(x,\eta)\right],$$

$$\Phi_2^-(\eta) = \frac{\pi i}{2\eta}\left[\psi(x,-\eta)\,\frac{\partial f_0^-(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,-\eta)}{\partial x}\, f_0^-(x,\eta)\right],$$

$$\Phi_1^+(\eta) = \frac{\pi i}{2\eta}\left[\psi(x,\eta)\,\frac{\partial f_0^+(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,\eta)}{\partial x}\, f_0^+(x,\eta)\right], \qquad /28/$$

$$\Phi_2^+(\eta) = \frac{\pi i}{2\eta}\left[\psi(x,-\eta)\,\frac{\partial f_0^+(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,-\eta)}{\partial x}\, f_0^+(x,\eta)\right].$$

С учетом /3/ и /20/ из этих равенств следует, что величины Φ_1^-, Φ_2^-, Φ_1^+ и Φ_2^+ не зависят от x.

Далее, пусть при $n = 1, \ldots, N$ величины g_n^- и g_n^+ определены посредством аналогичных /17/ равенств

$$g_n^- = \psi_n(x)\,\frac{\partial f_0^-(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x}\, f_0^-(x,\eta) + (\lambda_n + \eta^2)\, f_n^-(x,\eta). \qquad /29/$$

$$g_n^+ = \psi_n(x)\,\frac{\partial f_0^+(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x}\, f_0^+(x,\eta) + (\lambda_n + \eta^2)\, f_n^+(x,\eta).$$

Нетрудно видеть, что эти равенства определяют величины $g_n^- = g_n^-(x,\eta)$ и $g_n^+ = g_n^+(x,\eta)$ в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\eta \geq 0$. Кроме того, на основании /6/ и /23/ находим, что в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\eta \geq 0$ справедливы асимптотики

$g_n^- \to 0$ при $x \to -\infty$,

$g_n^+ \to 0$ при $x \to \infty$.

Поскольку определенные посредством /29/ величины g_n^- и g_n^+ согласно /19/ не зависят от x, то отсюда следует, что

$$g_n^- = g_n^+ = 0, \quad n = 1, \ldots, N. \qquad /30/$$

Наконец, следуя /18/, положим

$$G_- = \psi(x,\zeta)\,\frac{\partial f_0^-(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,\zeta)}{\partial x}\, f_0^-(x,\eta) -$$

$$- (\zeta^2 - \eta^2)\, F_-(x,\zeta,\eta),$$

$$G_+ = \psi(x,\zeta)\,\frac{\partial f_0^+(x,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,\zeta)}{\partial x}\, f_0^+(x,\eta) - (\zeta^2 - \eta^2)\, F_+(x,\zeta,\eta). \qquad /31/$$

Однако в соответствии с равенствами /25/ отсюда следует, что в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\eta \geq 0$ справедливы тождества

$$G_- = G_+ \equiv 0, \quad \zeta \in (-\infty, \infty). \qquad /32/$$

Таким образом, в силу /19/ и /29/-/32/ находим, что определенные с помощью /27/ величины $g_0^- = g_0^-(x, \eta)$ и $g_0^+ = g_0^+(x, \eta)$ при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют уравнению Шредингера, т.е.

$$(L + \eta^2)\, g_0^- = (L + \eta^2)\, g_0^+ = 0. \qquad /33/$$

Равенства /30/, /32/ и /33/ свидетельствуют о том, что в случае быстроубывающего потенциала определяющие соотношения /19/ имеют наиболее простой вид.

§3. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ S-МАТРИЦЫ

Теперь мы в состоянии получить уравнения, описывающие эволюцию во времени элементов S-матрицы оператора Шредингера L. Достигается это следующим образом. Нетрудно видеть, что при любом вещественном $\eta \neq 0$ пара функций $f_0^-(x, \eta)$ и $f_0^-(x, -\eta)$ образует фундаментальную систему решений уравнения /20/. Значит, справедливо равенство

$$f_0^+(x, \eta) = a(\eta)\, f_0^-(x, -\eta) + b(\eta)\, f_0^-(x, \eta), \qquad /34/$$

где величины $a = a(\eta)$ и $b = b(\eta)$ не зависят от x. Из равенства /34/ вытекают хорошо известные соотношения

$$a(\eta) = \frac{1}{2i\eta}\left[f_0^-(x, \eta)\, \frac{\partial f_0^+(x, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial f_0^-(x, \eta)}{\partial x}\, f_0^+(x, \eta)\right], \qquad /35/$$

$$b(\eta) = \frac{1}{2i\eta}\left[f_0^+(x, \eta)\, \frac{\partial f_0^-(x, -\eta)}{\partial x} - \frac{\partial f_0^+(x, \eta)}{\partial x}\, f_0^-(x, -\eta)\right].$$

На основе первого из равенств /35/ нетрудно убедиться, что функция $a = a(\eta)$ допускает аналитическое продолжение по η в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. С учетом /21/ получаем, что нулям функции $a(\eta)$, лежащим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$,

соответствуют точки дискретного спектра оператора Шредингера L. Матрица $S = S(\eta)$ вида

$$S(\eta) = \begin{vmatrix} a(\eta) & b(\eta) \\ b(-\eta) & a(-\eta) \end{vmatrix} \qquad /36/$$

называется S-матрицей оператора Шредингера. На основании /34/ и /36/ справедливо равенство

$$D(\eta) = \det S(\eta) = a(\eta)\,a(-\eta) - b(\eta)\,b(-\eta) = 1. \qquad /37/$$

Согласно /12/ при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \phi(x, \zeta) &= p(\zeta)\, f_0^-(x, -\zeta) + q(\zeta)\, f_0^-(x, \zeta), \\ \phi(x, \zeta) &= r(\zeta)\, f_0^-(x, -\zeta) + s(\zeta)\, f_0^-(x, \zeta), \end{aligned} \qquad /38/$$

где величины $p = p(\zeta)$, $q = q(\zeta)$, $r = r(\zeta)$ и $s = s(\zeta)$ не зависят от x. С другой стороны, в соответствии с /34/ и /37/ имеем

$$\begin{aligned} \phi(x, \zeta) &= \alpha(\zeta)\, f_0^+(x, \zeta) + \beta(\zeta)\, f_0^+(x, -\zeta), \\ \psi(x, \zeta) &= \gamma(\zeta)\, f_0^+(x, \zeta) + \delta(\zeta)\, f_0^+(x, -\zeta), \end{aligned} \qquad /39/$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\zeta) &= a(-\zeta)\,p(\zeta) - b(-\zeta)\,q(\zeta), \\ \beta(\zeta) &= -b(\zeta)\,p(\zeta) + a(\zeta)\,q(\zeta), \\ \gamma(\zeta) &= a(-\zeta)\,r(\zeta) - b(-\zeta)\,s(\zeta), \\ \delta(\zeta) &= -b(\zeta)\,r(\zeta) + a(\zeta)\,s(\zeta). \end{aligned} \qquad /40/$$

В силу /28/, /38/ и /39/ получаем равенства

$$\begin{aligned} \Phi_1^-(\eta) &= \pi\, r(\eta), \quad \Phi_2^-(\eta) = \pi\, s(-\eta), \\ \Phi_1^+(\eta) &= -\pi\,\delta(\eta), \quad \Phi_2^+(\eta) = -\pi\,\gamma(-\eta). \end{aligned} \qquad /41/$$

Из равенств /33/ следует, что при любом вещественном $\eta \neq 0$ величина g_0^- может быть представлена как линейная комбинация решений $f_0^-(x, \eta)$ и $f_0^-(x, -\eta)$, а величина g_0^+ может быть представлена как линейная комбинация решений $f_0^+(x, \eta)$ и $f_0^+(x, -\eta)$. С учетом /13/, /21/ и /27/ положим

$$g_0^-(x,\eta) = [\,4i\eta^3 + K^-(\eta)]\, f_0^-(x,\eta) + K_0^-(\eta)\, f_0^-(x,-\eta),$$
$$g_0^+(x,\eta) = K_0^+(\eta)\, f_0^+(x,-\eta) + [-4i\eta^3 + K^+(\eta)]\, f_0^+(x,\eta), \qquad /42/$$

где величины $K^- = K^-(\eta)$, $K_0^- = K_0^-(\eta)$, $K^+ = K^+(\eta)$ и $K_0^+ = K_0^+(\eta)$ не зависят от x. Определим эти величины.

С этой целью найдем асимптотику величины

$$\Phi_- = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\zeta)\, F_-(x,\zeta,\eta)\, d\zeta$$

при $x \to -\infty$ и асимптотику величины

$$\Phi_+ = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\zeta)\, F_+(x,\zeta,\eta)\, d\zeta$$

при $x \to \infty$. С помощью /25/ и /38/ находим, что при $x \to -\infty$ справедлива асимптотика

$$\Phi_- \sim C^-(\eta)\exp(-i\eta x) + C(\eta)\exp(i\eta x), \qquad /43/$$

где

$$C^-(\eta) = i\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{p(\zeta)s(\zeta)}{\zeta+\eta} - \frac{q(\zeta)r(\zeta)}{\zeta-\eta}\Big]d\zeta,$$
$$C(\eta) = -\pi[\,p(\eta)r(\eta) + q(-\eta)s(-\eta)]. \qquad /44/$$

Аналогичным образом на основании /25/ и /39/ получаем, что при $x \to \infty$ имеет место асимптотика

$$\Phi_+ \sim C_0(\eta)\exp(-i\eta x) + C^+(\eta)\exp(i\eta x), \qquad /45/$$

где

$$C_0(\eta) = \pi[\,\alpha(-\eta)\gamma(-\eta) + \beta(\eta)\delta(\eta)],$$
$$/46/$$
$$C^+(\eta) = i\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{\alpha(\zeta)\delta(\zeta)}{\zeta-\eta} - \frac{\beta(\zeta)\gamma(\zeta)}{\zeta+\eta}\Big]d\zeta.$$

Воспользуемся теперь неравенством /6/. Тогда из равенств /27/ согласно /1/, /5/, /8/, /23/, /38/, /39/, /41/, /43/ и /45/ следуют равенства

$$K^-(\eta) = C^-(\eta) + \pi[\,p(-\eta)s(-\eta) + q(\eta)r(\eta)],$$
$$K^+(\eta) = C^+(\eta) - \pi[\,\alpha(\eta)\delta(\eta) + \beta(-\eta)\gamma(-\eta)]. \qquad /47/$$

Кроме того, справедливы равенства

$$K_0^-(\eta) = C(\eta) + \pi[\,p(\eta)r(\eta) + q(-\eta)s(-\eta)],$$
$$K_0^+(\eta) = C_0(\eta) - \pi[\,\alpha(-\eta)\gamma(-\eta) + \beta(\eta)\delta(\eta)],$$

т.е. в соответствии с /44/ и /46/ имеем

$$K_0^-(\eta) = K_0^+(\eta) \equiv 0.$$

Таким образом, в силу /42/ получаем равенства

$$g_0^-(x,\eta) = [\,4i\eta^3 + K^-(\eta)]\, f_0^-(x,\eta),$$
$$g_0^+(x,\eta) = [-4i\eta^3 + K^+(\eta)]\, f_0^+(x,\eta). \qquad /48/$$

С помощью /44/ и /46/ нетрудно убедиться, что определенные посредством /47/ величины $K^-(\eta)$ и $K^+(\eta)$ допускают аналитическое продолжение по η в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. Очевидно, что при $\operatorname{Im}\eta > 0$ выполняются равенства

$$K^-(\eta) = i\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{p(\zeta)s(\zeta)}{\zeta+\eta} - \frac{q(\zeta)r(\zeta)}{\zeta-\eta}\Big]d\zeta,$$
$$/49/$$
$$K^+(\eta) = i\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{\alpha(\zeta)\delta(\zeta)}{\zeta-\eta} - \frac{\beta(\zeta)\gamma(\zeta)}{\zeta+\eta}\Big]d\zeta.$$

Положим теперь

$$g(x,\eta) = g_0^+(x,\eta) - a(\eta)\, g_0^-(x,-\eta) - b(\eta)\, g_0^-(x,\eta).$$

С учетом /34/ и /48/ находим, что

$$g(x,\eta) = [\,K^+(\eta) - K^-(-\eta)]\, a(\eta)\, f_0^-(x,-\eta) + \qquad /50/$$
$$+ [-8i\eta^3 + K^+(\eta) - K^-(\eta)]\, b(\eta)\, f_0^-(x,\eta).$$

С другой стороны, на основании /22/ и /34/ при $n = 1, \ldots, N$ имеем

$$f_n^+(x, \eta) - a(\eta) f_n^-(x, -\eta) - b(\eta) f_n^-(x, \eta) = 0.$$

Далее, согласно /25/ и /34/ при любых $\zeta, \eta \in (-\infty, \infty)$ справедливо равенство

$$F_+(x, \zeta, \eta) - a(\eta) F_-(x, \zeta, -\eta) - b(\eta) F_-(x, \zeta, \eta) = 0.$$

Наконец, в соответствии с /38/, /40/, /41/ и /44/ получаем равенство

$$[\Phi_1^+(\eta) - a(\eta)\Phi_2^-(-\eta) - b(\eta)\Phi_1^-(\eta)]\,\phi(x, \eta) +$$

$$+ [\Phi_2^+(\eta) - a(\eta)\Phi_1^-(-\eta) - b(\eta)\Phi_2^-(\eta)]\,\phi(x, -\eta) =$$

$$= -2a(\eta)[\pi Q(\eta) f_0^-(x, -\eta) - C(-\eta) f_0^-(x, \eta)],$$

где величина $Q(\eta)$ определена посредством /9/. В силу этих равенств с помощью /27/ находим, что

$$g(x, \eta) = \left[\frac{\partial a(\eta)}{\partial t} - 2\pi Q(\eta)\, a(\eta)\right] f_0^-(x, -\eta) +$$

$$+ \left[\frac{\partial b(\eta)}{\partial t} + 2C(-\eta)\, a(\eta)\right] f_0^-(x, \eta).$$

Сравнивая это равенство с равенством /50/, получаем эволюционные уравнения для величин $a = a(\eta)$ и $b = b(\eta)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial a(\eta)}{\partial t} = [K^{+}(\eta) - K^-(-\eta) + 2\pi Q(\eta)]\, a(\eta),$$

$$\frac{\partial b(\eta)}{\partial t} = -2C(-\eta)\, a(\eta) - [8i\eta^3 - K^+(\eta) + K^-(\eta)]\, b(\eta). \qquad /51/$$

Определим теперь в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ функцию $\hat{K}^-(\eta)$ посредством равенства

$$\hat{K}^-(\eta) = i\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{p(\zeta)s(\zeta)}{\zeta - \eta} - \frac{q(\zeta)r(\zeta)}{\zeta + \eta}\right] d\zeta. \qquad /52/$$

В силу /49/ и /52/ нетрудно убедиться, что при вещественных значениях параметра η выполняется равенство

$$\hat{K}^-(\eta) = K^-(-\eta) - 2\pi Q(\eta).$$

С помощью этого равенства система /51/ может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial a(\eta)}{\partial t} = [K^+(\eta) - \hat{K}^-(\eta)]\, a(\eta),$$

$$\frac{\partial b(\eta)}{\partial t} = -2C(-\eta)\, a(\eta) - [8i\eta^3 - K^+(\eta) + K^-(\eta)]\, b(\eta). \qquad /53/$$

Очевидным недостатком этой системы является то обстоятельство, что функция $K^+(\eta)$ зависит от величин $\alpha = \alpha(\zeta)$, $\beta = \beta(\zeta)$, $\gamma = \gamma(\zeta)$ и $\delta = \delta(\zeta)$, которые, в свою очередь, согласно /40/ зависят от элементов S-матрицы. Однако этот недостаток легко обходится. Действительно, на основе /53/ получаем, что коэффициент отражения

$$R(\eta) = \frac{b(\eta)}{a(\eta)} \qquad /54/$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R(\eta)}{\partial t} + [8i\eta^3 + K(\eta)]\, R(\eta) = M(\eta), \qquad /55/$$

где

$$K(\eta) = K^-(\eta) - \hat{K}^-(\eta), \quad M(\eta) = -2C(-\eta). \qquad /56/$$

С учетом /49/ и /52/ отсюда следует, что при $\operatorname{Im}\eta > 0$ справедливо равенство

$$K(\eta) = i \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta + \eta} - \frac{1}{\zeta - \eta} \right) d\zeta, \qquad /57/$$

где

$$h(\zeta) = p(\zeta) s(\zeta) + q(\zeta) r(\zeta). \qquad /58/$$

Таким образом, на основании /9/, /44/ и /56/ находим, что при любом вещественном η выполняются равенства

$$K(\eta) = i \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta + \eta} - \frac{1}{\zeta - \eta} \right) d\zeta + \pi [Q(\eta) + Q(-\eta)],$$
$$M(\eta) = 2\pi P(-\eta) \qquad /59/$$

В соответствии с равенствами /54/ и /55/ получаем, что безотражательные потенциалы в процессе эволюции, определяемой уравнением Кортевега - де Вриса с источником, остаются безотражательными только в случае $M(\eta) \equiv 0$, т.е. согласно /59/ только тогда, когда определенная посредством /9/ величина $P(\zeta)$ равна тождественно нулю. Далее, из уравнения /55/ следует, что на эволюцию коэффициента отражения R влияет только та часть источника, которая порождается собственными функциями, относящимися к непрерывному спектру оператора Шредингера. Наоборот, та часть источника, которая порождается собственными функциями, соответствующими дискретному спектру оператора Шредингера, на эволюцию коэффициента отражения никак не влияет. Наконец, отметим, что согласно /9/, /58/ и /59/ равенство $K(\eta) = 0$ возможно только при условии $Q(\eta) + Q(-\eta) \equiv 0$, $\eta \in (-\infty, \infty)$.

§4. СОВМЕСТНОСТЬ СИСТЕМЫ /53/ И РАВЕНСТВА /37/

Убедимся теперь, что система /53/ совместна с равенством /37/. Действительно, в силу /40/, /49/ и /52/ имеем при $\operatorname{Im}\eta > 0$

$$K^{+}(\eta) - \hat{K}^{-}(\eta) = i \int_{-\infty}^{\infty} H(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - \eta} - \frac{1}{\zeta + \eta} \right) d\zeta, \qquad /60/$$

где

$$H(\zeta) = [p(\zeta) s(\zeta) + q(\zeta) r(\zeta)] b(\zeta) b(-\zeta) -$$
$$- [p(\zeta) r(\zeta) a(-\zeta) b(\zeta) + q(\zeta) s(\zeta) a(\zeta) b(-\zeta)]. \qquad /61/$$

Отсюда следует, что при любых вещественных значениях параметра η справедливо равенство

$$K^{+}(\eta) + K^{+}(-\eta) - \hat{K}^{-}(\eta) - \hat{K}^{-}(-\eta) = -2\pi [H(\eta) + H(-\eta)]. \qquad /62/$$

С другой стороны, согласно /57/ при любых вещественных значениях параметра η выполняется соотношение

$$K(\eta) + K(-\eta) = 2\pi [h(\eta) + h(-\eta)], \qquad /63/$$

где величина $h(\eta)$ определена с помощью равенства /58/. Далее, с учетом /53/, /62/ и /63/ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} [a(\eta) a(-\eta) - b(\eta) b(-\eta)] = -2\pi [H(\eta) + H(-\eta)] a(\eta) a(-\eta) +$$
$$+ 2C(-\eta) a(\eta) b(-\eta) + 2C(\eta) a(-\eta) b(\eta) +$$
$$+ 2\pi [H(\eta) + H(-\eta) + h(\eta) + h(-\eta)] b(\eta) b(-\eta).$$

На основании /44/, /58/ и /61/ находим, что

$$\pi [H(\eta) + H(-\eta)] = \pi [h(\eta) + h(-\eta)] b(\eta) b(-\eta) +$$
$$+ C(-\eta) a(\eta) b(-\eta) + C(\eta) a(-\eta) b(\eta).$$

В соответствии с этим равенством величина $D(\eta) = a(\eta) a(-\eta) - b(\eta) b(-\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial D(\eta)}{\partial t} + 2\pi [H(\eta) + H(-\eta)] [D(\eta) - 1] = 0.$$

В силу условия $D(\eta) = 1$ при $t = 0$ отсюда следует тождество $D(\eta) \equiv 1$ при всех $t > 0$. Таким образом, совместность равенства /37/ и системы /53/ доказана полностью.

§5. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

С учетом равенств /37/, /54/ и /58/ определенная посредством /61/ величина $H(\zeta)$ может быть записана в следующем виде:

$$H(\zeta) = [1 - R(\zeta)R(-\zeta)]^{-1}[h(\zeta)R(\zeta)R(-\zeta) - p(\zeta)r(\zeta)R(\zeta) - q(\zeta)s(\zeta)R(-\zeta)]. \qquad /64/$$

В правую часть этого равенства входят величины $p = p(\zeta)$, $q = q(\zeta)$, $r = r(\zeta)$ и $s = s(\zeta)$ и уже не входят величины $\alpha = \alpha(\zeta)$, $\beta = \beta(\zeta)$, $\gamma = \gamma(\zeta)$ и $\delta = \delta(\zeta)$. Поэтому с помощью уравнения /55/ величина $H(\zeta)$ может быть определена при любом вещественном ζ и любом $t \geq 0$. Таким образом, согласно равенству /60/ величина $K^+(\eta) - K^-(\eta)$ определена в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ при любом $t \geq 0$. Отсюда на основании первого уравнения системы /53/ следует, что нули $\eta = \eta_n$ функции $a(\eta)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ не зависят от времени t. В силу /21/ и /35/ нулям $\eta = \eta_n$ функции $a(\eta)$, лежащим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$, соответствуют точки дискретного спектра оператора Шредингера, т.е. при $n = 1, \ldots, N$ имеем $\lambda_n + \eta_n^2 = 0$. Следовательно, при $\eta = \eta_n$ выполняется равенство

$$f_0^+(x, \eta_n) = B_n f_0^-(x, \eta_n), \qquad /65/$$

где величины B_n не зависят от x, $n = 1, \ldots, N$. Далее, справедливы равенства

$$\phi_n(x) = U_n f_0^-(x, \eta_n), \quad \psi_n(x) = V_n f_0^-(x, \eta_n), \qquad /66/$$

где величины U_n и V_n также не зависят от x, $n = 1, \ldots, N$.

Как было установлено ранее, определенные с помощью равенств /26/ величины $g_0^- = g_0^-(x, \eta)$ и $g_0^+ = g_0^+(x, \eta)$ являются аналитическими функциями параметра η в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$. Исходя из этого обстоятельства, положим

$$G_n(x) = g_0^+(x, \eta_n) - B_n g_0^-(x, \eta_n), \quad n = 1, \ldots, N.$$

Согласно /48/ и /65/ при $n = 1, \ldots, N$ имеем

$$G_n(x) = [-8i\eta_n^3 + K^+(\eta_n) - K^-(\eta_n)]\, B_n f_0^-(x, \eta_n). \qquad /67/$$

С другой стороны, в силу /20/, /38/ и /66/ выполняются соотношения ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \zeta) f_0^-(x, \eta_n)\, dx = 0, \quad \zeta \in (-\infty, \infty), \quad n = 1, \ldots, N,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0, \text{ если } m \neq n.$$

С учетом этих равенств в соответствии с /11/, /22/, /24/, /26/ и /65/ получаем, что

$$G_n(x) = \left[\frac{\partial B_n}{\partial t} - A_n B_n\right] f_0^-(x, \eta_n), \quad n = 1, \ldots, N.$$

Сравнивая это равенство с равенством /67/, получаем эволюционное уравнение для величин B_n, $n = 1, \ldots, N$, в следующем виде:

$$\frac{\partial B_n}{\partial t} + [8i\eta_n^3 - A_n(t) - K_n(t)]\, B_n = 0, \qquad /68/$$

где

$$K_n = K^+(\eta_n) - K^-(\eta_n). \qquad /69/$$

Убедимся теперь, что условия /10/ гарантируют выполнение соотношений

$$R(-\eta) = \overline{R(\eta)}, \quad \eta \in (-\infty, \infty), \quad B_n = \overline{B}_n, \quad n = 1, \ldots, N, \qquad /70/$$

при $t > 0$, если эти соотношения выполнены при $t = 0$. Действительно, в силу /10/ и /59/ имеем

$$K(-\eta) - \overline{K(\eta)} = i \fint_{-\infty}^{\infty} [\overline{h(\zeta)} - h(\zeta)] \left(\frac{1}{\zeta + \eta} - \frac{1}{\zeta - \eta}\right) d\zeta,$$

$$M(-\eta) = \overline{M(\eta)},$$

т.е.

$$K(-\eta) - \overline{K(\eta)} = i \fint_{-\infty}^{\infty} [\overline{h(\zeta)} + \overline{h(-\zeta)} - h(\zeta) - h(-\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta + \eta}.$$

На основании /10/ и /58/ справедливо равенство

$$h(\zeta) + h(-\zeta) - \overline{h(\zeta)} - \overline{h(-\zeta)} = 0 .$$

Следовательно, при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ имеем равенство $K(-\eta) = K(\eta)$. Таким образом, в соответствии с уравнением /55/ получаем, что равенство $R(-\eta) = \overline{R(\eta)}$, $\eta \in (-\infty, \infty)$, справедливо при любом $t > 0$, если оно справедливо при $t = 0$. Далее, с учетом /56/, /57/, /60/ и /69/ убеждаемся в справедливости равенства

$$K_n = i \int_{-\infty}^{\infty} [H(\zeta) + h(\zeta)] \left(\frac{1}{\zeta - \eta_n} - \frac{1}{\zeta + \eta_n} \right) d\zeta, \quad n = 1, \dots, N .$$

Это равенство может быть записано также в следующем виде:

$$K_n = i \int_{-\infty}^{\infty} [H(-\zeta) + h(-\zeta)] \left(\frac{1}{\zeta - \eta_n} - \frac{1}{\zeta + \eta_n} \right) d\zeta, \quad n = 1, \dots, N .$$

Таким образом, при $n = 1, \dots, N$ имеем равенство

$$K_n = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [H(\zeta) + H(-\zeta) + h(\zeta) + h(-\zeta)] \left(\frac{1}{\zeta - \eta_n} - \frac{1}{\zeta + \eta_n} \right) d\zeta . \qquad /71/$$

Как мы уже убедились ранее, величина $h(\zeta) + h(-\zeta)$ при $\zeta \in (-\infty, \infty)$ принимает только вещественные значения. Далее, согласно /9/ и /64/ при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ справедливо равенство

$$H(\zeta) + H(-\zeta) = [1 - R(\zeta) R(-\zeta)]^{-1} \{ [h(\zeta) + h(-\zeta)] R(\zeta) R(-\zeta) - P(\zeta) R(\zeta) - P(-\zeta) R(-\zeta) \}, \qquad /72/$$

из которого следует, что величина $H(\zeta) + H(-\zeta)$ также принимает только вещественные значения при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$. Поскольку нули $\eta = \eta_n$ функции $a(\eta)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \eta > 0$ не зависят от t, а при $t = 0$ они являются чисто мнимыми, то вещественность величин K_n непосредственно вытекает из равенства /71/. С учетом этого факта вещественность величин B_n при $t > 0$ согласно уравнению /68/ следует из вещественности этих величин при $t = 0$. Таким образом, справедливость соотношений /70/ доказана.

Из уравнения /68/ следует, что на эволюцию величин B_n влияют обе части источника. Действительно, величина A_n относится к той части источника, которая порождается собственными функциями, соответствующими дискретному спектру оператора Шредингера. Наоборот, величина K_n связана с той частью источника, которая образована собственными функциями, относящимися к непрерывному спектру оператора Шредингера. Важно отметить, что на эволюцию величины B_n влияет величина A_n только с тем же самым номером n и никак не влияют величины A_m с номером $m \neq n$. Далее, в силу /9/, /58/ и /72/ справедливо равенство

$$H(\zeta) + H(-\zeta) + h(\zeta) + h(-\zeta) = [1 - R(\zeta) R(-\zeta)]^{-1} [Q(\zeta) + Q(-\zeta) - P(\zeta) R(\zeta) - P(-\zeta) R(-\zeta)] .$$

Таким образом, согласно /71/ величины K_n зависят и от величины $P(\zeta)$, и от величины $Q(\zeta)$. В случае безотражательного потенциала имеем

$$K_n = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [Q(\zeta) + Q(-\zeta)] \left(\frac{1}{\zeta - \eta_n} - \frac{1}{\zeta + \eta_n} \right) d\zeta, \quad n = 1, \dots, N.$$

Уравнения /55/ и /68/ определяют эволюцию во времени всех данных рассеяния оператора Шредингера, необходимых для применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования системы /1/-/3/. В частности, они позволяют получить ядро интегрального уравнения Гельфанда - Левитана [5] при всех $t \geq 0$. Таким образом, задача нахождения решения системы /1/-/3/ сведена к задаче нахождения решения линейного интегрального уравнения. Решение этого уравнения в данном случае принципиально ничем не отличается от случая уравнения Кортевега - де Вриса без источника [6, 7]. Однако в силу того, что уравнения /55/ и /68/ существенно отличаются от соответствующих уравнений в случае уравнения Кортевега - де Вриса без источника, динамика решений системы /1/-/3/ оказывается существенно богаче динамики решений уравнения Кортевега - де Вриса без источника. Поскольку фазовая скорость n-го солитона пропорциональна величине $\tau_n = 8i\eta_n^3 - A_n(t) - K_n(t)$, то его динамика существенно зависит от знака величины τ_n. В частности, при перемене знака величины τ_n направление движения n-го солитона меняется на обратное. Полному описанию динамики решений системы /1/-/3/ будет посвящена отдельная работа.

В заключение необходимо подчеркнуть, что предложенный здесь метод интегрирования системы /1/-/3/ применим только в случае, когда величины λ_n не зависят от времени t, $n = 1, \dots, N$. До сих пор остается неясным, можно ли с помощью метода обратной задачи рассеяния проинтегрировать систему /1/-/3/ в случае, когда величины λ_n являются произвольными функциями времени t, принимающими только положительные значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mel'nikov V.K. - Phys. Lett., 1988, v.A133, No.9, p.493.
2. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-88-668, Дубна, 1988.
3. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-290, Дубна, 1989.
4. Lax P.D. - Comm. Pure Appl. Math. 1968, v.21, No.5, p.467.
5. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. - Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, т.15, №4, с.309.
6. Gardner C.S. et al. - Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, No.19, p.1095.
7. Gardner C.S. et al. - Comm. Pure Appl. Math., 1974, v.27, No.1, p.97.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июня 1989 года.