сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-375

Н.К.Душутин *, В.М.Мальцев

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ И МОДЕЛИ МНОЖЕСТВЕННОЙ ГЕНЕРАЦИИ АДРОНОВ

* Иркутский государственный университет

1989

Процессы множественного рождения адронов в столкновениях релятивистских ядер и элементарных частиц высокой энергии достаточно успешно описываются с помощью теории ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем [2-17]. Применяемые методы и некоторые полученные результаты могут представлять интерес и для специалистов, работающих в других областях математики и физики. В связи с этим в данном обзоре обсуждаются только теоретико-вероятностные аспекты, т.е. математическая модель множественного рождения, и не затронуты детали конкретного динамического механизма адронных взаимодействий.

Первый раздел работы содержит изложение основ теории ветвящихся процессов и может быть опущен теми, кто знаком с фундаментальной монографией Б.А.Севастьянова [1]. Переходные вероятности ветвящихся процессов определены из некоторой системы дифференциально-разностных уравнений. Вывод этой системы и ее основные свойства обсуждаются во втором разделе. Ветвящиеся процессы, включающие в качестве элементарных только одночастичные процессы, анализируются в третьем разделе. Четвертый раздел посвящен описанию ветвящихся процессов, учитывающих образование в элементарном акте взаимодействия кластеров, т.е. объектов, распадающихся по истечении некоторого времени на несколько вторичных частиц. В заключительном разделе обзора рассмотрены предельные ветвящиеся процессы, допускающие образование кластера из произвольного большого числа частиц.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Ветвящиеся процессы [1] являются классом случайных процессов и используются для описания широкого круга явлений, связанных с размножением и превращением каких-либо объектов.

Основным математическим предположением, выделяющим ветвящиеся процессы в отдельный класс, является предположение независимости превращения частиц от предыстории и друг от друга.

Однородный во времени ветвящийся процесс $\mu(t)$ с однотипными частицами определяется как марковский процесс со счетным числом состояний в фазовом пространстве $N = \{|0\rangle, |1\rangle, \dots |n\rangle \dots\}$, переходные вероятности которого $P_{ij}(t)$ удовлетворяют дополнительному условию ветвления:

$$P_{ij}(t) = \sum P_{ij_1}(t) P_{ij_2}(t) \ldots P_{ij_k}(t)\, \delta(j_1 + j_2 + \ldots + j_k - j)\,. \qquad /1/$$

Состояния в фазовом пространстве $N = \{|0>, |1>, \ldots\}$ в ветвящемся процессе интерпретируются как числа частиц. Вероятность $P_{ij}(t)$ равна вероятности того, что за время t i частиц превращаются в j частиц, т.е. $P\{\mu(t_0 + t) = j | \mu(t_0) = i\}$. Марковость процесса означает также, что переходные вероятности P_{ij} удовлетворяют дополнительному условию вида:

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(u)\, P_{kj}(t-u) \qquad /2/$$

для любых $i, j \in N$ и $0 \le u \le t$;; $u, t \in T$. Это соответствует независимости превращений частиц от предыстории.

Кроме того, переходные вероятности должны быть неотрицательны:

$$P_{ij}(t) \ge 0, \qquad /3/$$

нормированы:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1 \qquad /4/$$

и удовлетворять начальным условиям:

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij}\,. \qquad /5/$$

Под множеством T понимается либо множество целых неотрицательных чисел $\{0,1,2\ldots\}$, либо $[0, \infty)$. В первом случае говорят о ветвящемся процессе с дискретным временем /процессе Гамильтона - Ватсона/, а во втором - о ветвящемся процессе с непрерывным временем. В дальнейшем мы ограничимся обсуждением только ветвящихся процессов с непрерывным временем. Для простоты будем также рассматривать отдельно начальные частицы, являющиеся источником ветвящегося процесса, и вторичные частицы, появляющиеся в его результате. Тогда фазовое пространство N можно поставить в соответствие состояниям с n-вторичными частицами, а переходные вероятности обозначить следующим образом:

$$P\{\mu(t_0 + t) = \text{нач. частицы} + n \text{ вторичных частиц} | \mu(t_0) = \text{нач. частицы}\} = P_n(t)\,. \qquad /6/$$

Полнота набора конечных состояний /фазового пространства/ приводит к условию нормировки переходных вероятностей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1. \qquad /7/$$

Следует особо подчеркнуть, что соотношения /6/ и /7/ отражают только различие в способе учета начальных и вторичных частиц, ни в коей мере не требуя при этом обязательного физического их различия. Более того, развиваемый подход позволяет описывать как процессы с одним типом частиц /начальные и вторичные частицы тождественны/, так и процессы с несколькими типами частиц /начальные и вторичные частицы физически различаются/.

Из соотношения /6/ вытекает также, что в момент начала процесса t_0 /в дальнейшем, для простоты, будем полагать $t_0 = 0$/ вторичные частицы отсутствуют и, следовательно,

$$P_n(0) = \delta_{on}, \qquad /8/$$

распределение вероятностей δ-образное. Различные ветвящиеся процессы соответствуют эквиареальным преобразованиям данного распределения.

Основным аналитическим аппаратом в теории ветвящихся процессов являются производящие функции:

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n . \qquad /9/$$

Производящую функцию можно выразить также через математическое ожидание целочисленной неотрицательной случайной величины ζ /число вторичных частиц в ветвящемся процессе/, закон распределения которой задан вероятностями $P_n(t)$:

$$F_{\zeta}(z, t) = Mz^{\zeta}. \qquad /10/$$

Производящая функция $F(z, t)$ определена для всех z из единичного круга $|z| \leq 1$ комплексной плоскости и аналитична для всех $|z| < 1$.

Из условия нормировки для переходных вероятностей /7/ следует, что

$$F(z = 1, t) = 1. \qquad /11/$$

Каждому распределению вероятностей $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ соответствует одна и только одна производящая функция $F(z,t)$: каждой функции $F(z,t)$, аналитичной внутри единичного круга $|z| < 1$ и имеющей в разложении в ряд по степеням z неотрицательные коэффициенты, соответствует, с точностью до нормировки, одно, а при наложении на $F(z,t)$ дополнительного условия /11/ и только одно распределение вероятностей $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$. При этом:

$$P_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial z^n}\Big|_{z=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \qquad /12/$$

Производящая функция $F(z)$ и все ее производные $\frac{\partial^k F}{\partial z^k}$ неотрицательны, не убывают и выпуклы в интервале $0 \le z \le 1$, что является следствием неотрицательности всех членов ряда производной:

$$\frac{\partial^k F}{\partial z^k} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) z^{n-k} P_n$$

в интервале $z \in [0,1]$ при любом $k = 0, 1, 2, \dots$

Условие ветвления /1/ эквивалентно соотношению для производящей функции вида:

$$F(t+\tau;\ z) = F(t; F(\tau;\ z)) . \qquad /13/$$

Следующее свойство производящих функций связано с суммированием независимых случайных величин. Если $\zeta_1 \dots \zeta_n$ - независимые случайные величины, то производящая функция их суммы равна произведению производящих функций слагаемых

$$F_{\zeta_1+\dots+\zeta_n}(z) = F_{\zeta_1}(z) \ \dots\ F_{\zeta_n}(z) . \qquad /14/$$

Соответствие множества производящих функций множеству распределений является непрерывным. Так, если имеется последовательность распределений вероятностей $P_k(n)$, $n = 1,2\dots$ /функции $P_k(n)$ неотрицательны и нормированы/ с производящими функциями $F_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(n) z^k$, то для того, чтобы при фиксированном k

$$\lim_{n\to\infty} P_k(n) = P_k \,, \qquad /15/$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом z внутри единичного круга $|z| < 1$ выполнялось

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k \,. \qquad /16/$$

Кроме того, если $F(z)$ и $G(z)$ - производящие функции двух распределений вероятностей $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, то справедливо

$$\sup_{n\to\infty} |p_n - q_n| \le \sup_{|z|\le 1} |F(z) - G(z)| \,. \qquad /17/$$

С производящими функциями связаны также моменты распределения. Моментом порядка r относительно числа x называется математическое ожидание $M(\zeta - x)$.

В частности, начальный момент порядка r относительно $x = 0$ есть:

$$\beta_r = Mn^r = \sum_n n^r P_n(t) \,. \qquad /18/$$

Центральный момент относительно центра распределения $x = Mn = \bar{n}$ представляет собой следующую величину:

$$\mu_r = M(n - \bar{n})^r = \sum_n (n - \bar{n})^r P_n(t) \,. \qquad /19/$$

Наконец, факториальным моментом порядка r относительно $x = 0$ называется:

$$a_r = Mn(n-1)\ldots(n-r+1) = \sum_n n(n-1)\ldots(n-r+1) P_n(t) \,. \qquad /20/$$

Если момент некоторого порядка r отличен от нуля, то не равны нулю и все моменты более низкого порядка $k \le r$. Начальные, центральные и факториальные моменты связаны между собой формулами:

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \beta_{r-k} \beta_1^k \,; \quad \beta_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \mu_{r-k} \beta_1^k \,; \quad a_r = \sum_{k=0}^{r-1} S_k^r \beta_{r-k} \,, \qquad /21/$$

где

$$S_0 = 1 \,; \quad S_k^r = \sum_{i_1 > i_2 > \ldots > i_k = 1}^{r-1} (-1)^k i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_k \,.$$

Факториальные моменты определяются через производящую функцию следующим образом:

$$\alpha_k = \frac{\partial^k F}{\partial z^k}\Big|_{z=1} . \qquad /22/$$

В задачах статистической физики вместо факториальных моментов чаще употребляются корреляционные параметры, проинтегрированные по фазовому пространству n-частичные корреляционные функции /тогда как факториальные моменты представляют собой проинтегрированные по фазовому пространству n-частичные функции распределения/. Корреляционные параметры f_q являются коэффициентами разложения логарифма производящей функции по степеням z:

$$f_k = \frac{\partial^k \ln F}{\partial z^k}\Big|_{z=1} \qquad /23/$$

и связаны с факториальными моментами α_2 следующим образом*:

$$f_q = -q! \sum_{n_k} (\sum_k n_k - 1)! \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\alpha_k}{k!}\right)^{n_k} \frac{\delta(q - \sum_m n_m)}{n_k!} ,$$

$$\alpha_q = q! \sum_{n_k} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k}{k!}\right)^{n_k - n_{k+1}} \frac{\delta(q - \sum_m n_m)}{(n_k - n_{k+1})!} , \qquad /24/$$

$$0 \le \ldots \le n_k \le \ldots \le n_2 \le n_1 < \infty .$$

Таким образом, ветвящийся процесс может быть задан одним из следующих способов:

а/ набором переходных вероятностей $P_n(t)$,

б/ производящей функцией $F(z, t)$,

в/ набором моментов производящей функции /начальных β_r, центральных μ_r, факториальных α_r/ или набором корреляционных параметров.

Любой из этих наборов можно определить из решения некоторой системы дифференциальных уравнений или разностно-дифференциальных уравнений для переходных вероятностей.

---

* Второе из соотношений /24/ впервые получено Мюллером /16/.

2. РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть имеется одна или две начальные частицы, которые за время t могут в результате взаимодействия превратиться в некоторое число вторичных частиц того же или иного типа. Вероятность образования n вторичных частиц к моменту времени t обозначим, как и ранее, через $P_n(t)$.

В течение последующего бесконечно малого промежутка времени Δt начальная частица может испустить $1, 2, \ldots k$ вторичных частиц с вероятностями $\lambda_1 \Delta t$, $\lambda_2 \Delta t \ldots \lambda_k \Delta t$ соответственно. Аналогично, каждая из вторичных частиц с вероятностью $\lambda_p \Delta t$ может превратиться в две вторичные частицы, а с вероятностью $\lambda_n \Delta t$ поглотиться одной из вторичных частиц. В дальнейшем эти процессы будут называться элементарными /в отличие от полного ветвящегося процесса/ процессами генерации, размножения и поглощения.

С учетом возможности всех трех типов элементарных процессов для вероятности образования n вторичных частиц к моменту времени $t + \Delta t$ можно записать следующее выражение:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)\,(1 - \sum_{k=1} \lambda_k \Delta t - \lambda_p n \Delta t - \lambda_n n \Delta t) +$$
$$+ P_{n+1}(t)\,\lambda_n (n+1)\Delta t + P_{n-1}(t)\,\lambda_p (n-1)\Delta t + P_{n-1}(t)\,\lambda_1 \Delta t + \qquad /25/$$
$$+ P_{n-2}(t)\,\lambda_2 \Delta t + \ldots + P_{n-k}(t)\,\lambda_k \Delta t\,.$$

В этом соотношении первый член $P_n(t)\,(1 - \sum_{k=1} \lambda_k \Delta t - \lambda_p n \Delta t - \lambda_n n \Delta t)$ соответствует ситуации, когда в течение промежутка времени никакого изменения числа частиц не происходит /вероятность такого "элементарного процесса" $1 - \sum_{k=1} \lambda_k \Delta t - \lambda_p n \Delta t - \lambda_n n \Delta t$ определяется как вероятность противоположного события по отношению ко всем другим элементарным процессам/.

Производя элементарные преобразования в соотношении /25/ и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим из него следующее дифференциально-разностное уравнение для $P_n(t)$:

$$\frac{dP_n}{dt} = -(\lambda_p + \lambda_n)\,n P_n + \lambda_p (n-1) P_{n-1} + \lambda_n (n+1) P_{n+1} - \qquad /26/$$
$$- \sum_{k=1} \lambda_k (P_n - P_{n-k})\,.$$

При выводе уравнения /26/ значение переменной n никоим образом не фиксировано, поэтому данное уравнение справедливо для любых значений $n \in [0, \infty)$, и для полного набора переходных вероятностей $P_n(t)$ имеет место бесконечная система. При переходе к пределу бесконечно малых интервалов времени обычно пренебрегается процессами испускания более чем одной вторичной частицы. Такое предположение вполне оправдано для процессов размножения и поглощения, поэтому мы не учитывали вклад этих процессов уже в соотношении /25/, с тем, чтобы сделать его менее громоздким. Формально это справедливо и для многочастичных процессов генерации, однако в целом ряде реальных задач необходимо учитывать образование кластеров, т.е. объектов, распадающихся по истечении некоторого времени на несколько вторичных частиц. Если только время жизни кластеров не отличается существенным образом от времени взаимодействия, то тогда фактор $\sum\limits_{k=2} \lambda_k (P_n - P_{n-k})$ в системе уравнений /26/ учитывает вклад от образования кластеров, и λ_k $(k \geq 2)$ можно интерпретировать как произведение плотности вероятности образования одного кластера на вероятность его распада на k частиц.

Начальные условия для системы дифференциально-разностных уравнений определены соотношением /8/.

Систему уравнений для переходных вероятностей можно преобразовать в уравнение для производящей функции. Для этого достаточно уравнение для P_n умножить на z^n и просуммировать по всей системе. В результате имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = [\lambda_p \; z(z-1) - \lambda_n (z-1)] \frac{\partial F}{\partial z} + \sum_{k=1} \lambda_k (z^k - 1) F, \qquad /27/$$

начальные условия для данного уравнения определены соотношением /11/. Аналогично, из системы уравнений для переходных вероятностей можно получить систему уравнений для моментов распределения. Например, для начальных моментов β_r подобная система будет иметь вид:

$$\frac{d\beta_r}{dt} = \sum_{\ell=1}^{r} \binom{r}{\ell} (\lambda_p + (-)^{\ell} \lambda_n) \beta_{r-\ell+1} + \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} \binom{r}{\ell} \lambda_k k^{\ell} \beta_{r-\ell} . \qquad /28/$$

Начальные условия для нее можно получить из соотношения /8/ в следующей форме:

$$\beta_r \; (t = 0) = \delta_{r0} . \qquad /29/$$

Все три способа описания ветвящегося процесса эквивалентны, но в конкретных приложениях используют либо систему уравнений для переходных вероятностей /26/ как имеющую простую и наглядную интерпретацию, либо уравнение для производящей функции /27/, как более удобное для решения.

Рассмотрим первоначально наиболее простые частные случаи решения системы дифференциально-разностных уравнений. Наиболее простыми являются решения для одночастичных элементарных процессов /без учета образования кластеров/.

3. ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Решения уравнений для переходных вероятностей в частных случаях отсутствия образования кластеров и поглощения частиц достаточно хорошо известны. Так, для одних только одночастичных процессов генерации $(\lambda_{k>1} = 0,\ \lambda_n = 0$ решением является распределение Пуассона:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} \exp(-\lambda_1 t)\ , \qquad /30/$$

а для одночастичных процессов размножения и генерации $(\lambda_p \neq 0,$ $\lambda_n = 0,\ \lambda_{k>1} = 0)$ система уравнений для переходных вероятностей имеет решением распределение Пойя:

$$P_n(t) = \frac{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_p)\ldots(\lambda_1 + \lambda_p(n-1))}{n!\ \lambda_p^n} \exp(-\lambda_1 t)(1 - \exp(-\lambda_p t))^n . \qquad /31/$$

Среднее число вторичных частиц $\bar{n}$ для распределения Пуассона /30/ есть линейная функция времени

$$\bar{n} = \Sigma\, n P_n = \lambda_1 t\ , \qquad /32/$$

а для распределения Пойя /31/ экспоненциальная:

$$\bar{n} = \frac{\lambda_1}{\lambda_p}[\exp(\lambda_p t) - 1]\ . \qquad /33/$$

Проинтегрированные по фазовому объему q-частичные корреляционные функции /корреляционные параметры/ f_q для распределения Пуассона /30/ равны нулю, кроме первого:

$$f_q = \frac{\partial^q \ln F}{\partial z^q}\Big|_{z=1} = \begin{cases} \lambda_1 t & \text{при } q = 1 \\ 0 & \text{при } q \neq 1, \end{cases} \qquad /34/$$

что соответствует отсутствию корреляций в испускании вторичных частиц. Напротив, для распределения Пойя корреляционные параметры в любом порядке отличны от нуля:

$$f_1 = \bar{n}; \quad f_{q>1} = \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right)^{q-1} (q-1)\,\bar{n}^{\,q}. \qquad /35/$$

Таким образом, процессы размножения отвечают не только наиболее быстрому /экспоненциальному/ росту числа вторичных частиц, но и полностью коррелированному их образованию: любая пара вторичных частиц с равной вероятностью может быть образована в одном элементарном процессе. Процессы поглощения без кластеризации / $\lambda_{k>1} = 0$/ приводят к уравнению для производящей функции следующего вида:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (\lambda_p z(z-1) - \lambda_n (z-1))\frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_1 (z-1) F, \qquad /36/$$

для неравных друг другу вероятностей процессов размножения и поглощения $\lambda_p \neq \lambda_n$ и $\lambda_p > \lambda_n$ получаем решение в форме:

$$F = \left[1 - \frac{z-1}{\lambda_p - \lambda_n}(\exp(\lambda_p t - \lambda_n t) - 1)\right]^{-\lambda_1/\lambda_p}, \qquad /37/$$

что соответствует распределению переходных вероятностей:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_p}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_p}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_p} + n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_p}\right)} \frac{(\exp(\lambda_p t - \lambda_n t) - 1)^n}{\left[\exp(\lambda_p t - \lambda_n t) - \frac{\lambda_n}{\lambda_p}\right]^{n + \lambda_1/\lambda_p}}. \qquad /38/$$

Данное распределение вероятностей также является распределением Пойя, однако с несколько измененными параметрами по сравнению с соотношением /31/. В частности, изменяются нормирующая функция и параметр разложения:

$$\exp(-\lambda_1 t) \Rightarrow \frac{1 - \dfrac{\lambda_{\text{п}}}{\lambda_p}}{\exp(\lambda_p t - \lambda_{\text{п}} t) - \dfrac{\lambda_{\text{п}}}{\lambda_p}}; \quad 1 - \exp(-\lambda_p t) \Rightarrow \frac{\exp(\lambda_p r - \lambda_{\text{п}} t) - 1}{\exp(\lambda_p t - \lambda_{\text{п}} t) - \dfrac{\lambda_{\text{п}}}{\lambda_p}}. \qquad /39/$$

Смысл этих изменений достаточно нагляден.

Среднее число вторичных частиц $\bar{n}$ можно получить как из соотношения /37/, так и решая уравнение /28/ для $\beta_1 = \bar{n}$. В результате имеем:

$$\bar{n} = \frac{\lambda_1}{\lambda_p - \lambda_{\text{п}}}(\exp(\lambda_p t - \lambda_{\text{п}} t) - 1). \qquad /40/$$

Решая аналогичное уравнение при $\lambda_p < \lambda_{\text{п}}$, получим:

$$\bar{n} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{п}} - \lambda_p}(1 - \exp(\lambda_p t - \lambda_{\text{п}} t)) . \qquad /41/$$

Наконец, при $\lambda_{\text{п}} = \lambda_p$ получаем

$$\bar{n} = \frac{\lambda_p t}{1 + \lambda_p t}. \qquad /42/$$

Таким образом, для преобладающих процессов размножения $(\lambda_p > \lambda_{\text{п}})$ среднее число вторичных частиц $\bar{n}$ при $t \to \infty$ экспоненциально возрастает; для преобладающих процессов поглощения $(\lambda_p < \lambda_{\text{п}})$ среднее число вторичных частиц $\bar{n}$ при $t \to \infty$ стремится к постоянной величине, равной $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{\text{п}} - \lambda_p}$, наконец, для равновероятных процессов размножения и поглощения $(\lambda_p = \lambda_{\text{п}})$ среднее число вторичных частиц $\bar{n}$ в пределе стремится к единице.

Процессы поглощения меняют характер поведения среднего числа вторичных частиц как функции времени, не меняя общей структуры распределения переходных вероятностей. Используя в качестве основного параметра среднее число вторичных частиц $\bar{n}$, это распределение переходных вероятностей можно записать в виде:

$$P_n = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_p} + n\right)}{n!\,\Gamma\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_p}\right)} \cdot \frac{\bar{n}^{\,n}}{\left(\bar{n} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_p}\right)^{n + \lambda_1/\lambda_p}} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_p}\right)^{\lambda_1/\lambda_p}. \qquad /43/$$

Данная форма при подстановке в нее соответствующего выражения для $\bar{n}$ вида /33/, /40/, /41/, /42/ описывает как одночастичные процессы размножения и генерации, так и процессы поглощения при различных соотношениях между вероятностями размножения и поглощения.

Такой результат проистекает из того, что процессы размножения и поглощения подобным образом входят в уравнение для производящей функции /27/, определяя лишь конкретную форму коэффициентной функции от z при производной $\frac{\partial F}{\partial z}$ в правой части.

Рассмотрим теперь влияние кластеризации ($\lambda_{k \geq 2} \neq 0$) или многочастичных элементарных процессов на форму распределения переходных вероятностей.

4. МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Структура распределения переходных вероятностей существенным образом зависит от того, вносят или не вносят вклад процессы размножения или поглощения.

Рассмотрим первоначально наиболее простой случай многочастичных элементарных процессов, когда имеют место только одночастичные и двухчастичные процессы генерации $\lambda_p = 0$, $\lambda_n = 0$, $\lambda_{k \geq 3} = 0$. Тогда уравнение для производящей функции принимает вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda_1 (z-1) F + \lambda_2 (z^2 - 1) F \ . \qquad /44/$$

Решение данного уравнения достаточно элементарно:

$$F = \exp[\lambda_1 (z-1) t + \lambda_2 (z^2 - 1) t]. \qquad /45/$$

Соответствующее распределение переходных вероятностей выражается через полиномы Эрмита:

$$P_n(t) = \frac{(-\lambda_2 t)^{n/2}}{n!} H_n\left(-\frac{i\lambda_1 t}{2\sqrt{\lambda_2 t}}\right) \exp(-\lambda_1 t - \lambda_2 t), \qquad /46/$$

где $H_n(x)$ - полиномы Эрмита n-ного порядка.

Среднее число вторичных частиц:

$$\bar{n} = \lambda_1 t + 2\lambda_2 t \qquad /47/$$

представляет собой сумму среднего числа частиц, генерируемых "поодиночке" - $\lambda_1 t$, и кластерами из двух частиц $2\lambda_2 t$.

Корреляционные параметры f_q отличны от нуля только до второго порядка включительно:

$$f_1 = \lambda_1 t + 2\lambda_2 t = \phi_1 t; \quad f_2 = 2\lambda_2 t = \phi_2 t; \quad f_{q\geq 3} = 0, \qquad /48/$$

что отражает тот факт, что совместно /в одном кластере/ может образоваться не более двух вторичных частиц.

Таким образом, представляется более естественным выбрать в качестве параметров распределение $\phi_\ell = (-)^{\ell+1} \sum\limits_{m=0}^{k-\ell} \lambda_{\ell+m} \frac{(\ell+m)!}{m!}$ вероятности совместного рождения ℓ-частиц, вместо λ_k. Это позволяет также записать распределение вероятностей и производящую функцию в более рациональном виде:

$$P_n = \frac{i^n}{n!}\left(\frac{f_2}{2}\right)^{n/2} H_n\left(i\frac{f_2 - f_1}{\sqrt{2f_2}}\right)\exp\left(-f_1 t - \frac{1}{2}f_2 t\right). \qquad /49/$$

Для процессов генерации произвольного порядка уравнение для производящей функции:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left[\phi_1 (z-1) - \frac{1}{2!}\phi_2 (z-1)^2 + \ldots + \frac{(-)^k}{k!}\phi_k (z-1)^k\right] F \qquad /50/$$

также имеет достаточно простое решение:

$$F = \exp\left(\sum_{\ell=1}^{k} (z-1)^\ell \frac{f_\ell}{\ell!}\right), \quad f_\ell = (-)^{\ell+1} \phi_\ell t, \qquad /51/$$

что отвечает распределению переходных вероятностей типа свертки пуассоновых распределений по кластерам из различного числа частиц:

$$P_n = \exp\left(-\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell t\right) \sum \frac{\lambda_1^{m_1}}{m_1!} \frac{\lambda_2^{m_2}}{m_2!} \ldots \frac{\lambda_k^{m_k}}{m_k!} n! t^n \delta\left(n - \sum_{\ell=1}^{k} \ell m_\ell\right). \qquad /52/$$

Из вышеприведенного вытекает, что важное значение при анализе многочастичных процессов имеет рациональный выбор параметров или, что то же самое, коэффициентных функций в правой части уравнения /27/ для производящей функции. В общем случае процессов размножения, поглощения и генерации многочастичных кластеров эти коэффициентные функции представляют собой полиномы от z не выше второго порядка при производной $\frac{\partial F}{\partial z}$ и не выше k-того порядка /максимальной размерности кластера/ при производящей функции F. Обозначая эти полиномы через $A_2(z)$ и $B_k(z)$, можно переписать уравнение /27/ в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = A_2(z)\frac{\partial F}{\partial z} + B_k(z)\,F\,, \qquad /53/$$

где $A_2 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$; $B_k = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_k z^k$.

Меняя значения a_i коэффициентов полинома $A_2(z)$, можно изменить зависимость среднего числа вторичных частиц и других параметров распределения от времени, но для любых значений $a_i \neq 0$ форма распределения остается неизменной. Выбрав этот полином в виде $A_2 = (z-1)^2$, можно перейти в уравнении /53/ к "естественному" времени $t \Rightarrow \tau = \lambda_p t$. При этом все параметры распределения становятся линейными функциями τ. Переход от данного случая равновероятных процессов размножения и поглощения к другим частным случаям $\lambda_п = 0$, $\lambda_p > \lambda_п$, $\lambda_p < \lambda_п$ осуществляется заменой в распределениях среднего числа вторичных частиц по формулам /33, 40, 41, 42/, или, что то же самое, заменой:

$$\lambda_p t \underset{\lambda_п = 0}{\Rightarrow} \exp(\lambda_p t) - 1; \quad \lambda_p t \underset{\lambda_p > \lambda_п}{\Rightarrow} \exp(\lambda_p t - \lambda_п t) - 1; \qquad /54/$$

$$\lambda_p t \underset{\lambda_p < \lambda_п}{\Rightarrow} 1 - \exp(\lambda_p t - \lambda_п t)\,.$$

Производящая функция F, являющаяся решением уравнения /53/ с коэффициентной функцией $A_2(z) = (z-1)^2$, может быть представлена в виде произведения производящих функций F_m:

$$F = \prod_{m=1}^{k} F_m\,, \qquad /55/$$

каждая из которых удовлетворяет уравнению вида:

$$\frac{\partial F_m}{\partial t} = \lambda_p (z-1)^2 \frac{\partial F_m}{\partial z} + (-)^{m+1} \phi_m (z-1)^m F_m . \qquad /56/$$

Таким образом, F_m описывает ветвящийся процесс с генерацией только m-частичных кластеров и равновероятными процессами размножения и поглощения.

Факторизация производящей функции полного распределения по производящим функциям процессов с определенным типом кластеров является своеобразным аналогом теоремы о свертке из теории интегральных преобразований. Поскольку распределение переходных вероятностей представляет собой дискретную свертку распределений для процессов с определенным типом кластеров, то производящая функция данного распределения /его образ Меллина / соответствует произведению производящих функций.

В частном случае существования только процессов генерации, соответствующих свертке пуассоновых распределений для отдельных кластеров, справедливость этого легко проверяется с помощью соотношений /50/, /51/, /52/.

Уравнение /56/ для производящих функций F_m в частном случае $m = 1$ имеет в качестве решения производящую функцию распределения Пойя:

$$F_1 = (1-(z-1)\lambda_p t)^{-\phi_1/\lambda_p}, \qquad /57/$$

в частном случае $m = 2$ решение имеет вид:

$$F_2 = \exp\left[-\frac{\phi_2 t (z-1)^2}{1-(z-1)\lambda_p t}\right], \qquad /58/$$

при произвольном $m \neq 1$ решением уравнения /56/ является:

$$F_m = \exp\left[(-)^{m+1} \frac{\phi_m}{\lambda_p} \frac{(z-1)^{m-1}}{m-1}\left((1-(z-1)\lambda_p t)^{1-m} - 1\right)\right]. \qquad /59/$$

Соответственно производящая функция для ветвящегося процесса генерации одно- и двухчастичных кластеров при равновероятных процессах размножения и поглощения имеет вид:

$$F = (1-(z-1)\lambda_p t)^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_p} - 2\frac{\lambda_2}{\lambda_p}} \exp\left[-\frac{2\lambda_2 t (z-1)^2}{1-(z-1)\lambda_p t}\right]. \qquad /60/$$

Для ветвящихся процессов генерации кластеров произвольного типа производящая функция равна:

$$F = (1-(z-1)\lambda_p t)^{-\Sigma \ell \lambda_\ell / \lambda_p} \times$$

$$\times \exp\left[-\sum_{m=2}^{k} \sum_{\ell=m}^{k} \frac{\ell!}{(\ell-m)!\,m!} \frac{\lambda_\ell}{\lambda_p} \frac{(1-z)^{m-1}}{m-1} ((1-(z-1)\lambda_p t)^{1-m} - 1)\right]. \qquad /61/$$

Переход к неравновероятным процессам размножения и поглощения осуществляется заменой параметра времени $\lambda_p t$ с помощью соотношений /54/.

Таким образом с помощью соотношений /61/ и /54/ описывается ветвящийся процесс достаточно общего типа.

Определение переходных вероятностей по производящей функции является чисто технической задачей. Выражения для переходных вероятностей, соответствующих производящим функциям вида /60/ и /61/, являются достаточно громоздкими, и мы не будем их здесь приводить, тем более что они могут быть достаточно быстро получены с помощью аналитических вычислений на ЭВМ в системе REDUCE.

Аналогично могут быть вычислены моменты и корреляционные параметры соответствующих распределений.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ С ОБРАЗОВАНИЕМ КЛАСТЕРОВ

В данном разделе мы рассмотрим предельные ветвящиеся процессы с образованием кластеров, включающих произвольно большое часло частиц. В этом случае полином по степеням z в показателе экспоненты производящей функции $F(z,t)$ превращается в бесконечный ряд и может быть аппроксимирован некоторой функцией, конкретная форма которой зависит от соотношения между вероятностями λ_p, λ_n, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$

В отсутствие процессов размножения и поглощения производящая функция $F(z,t)$ определяется соотношением /51/. Используя вместо корреляционных параметров f_k вероятности образования кластеров λ_k, эту функцию можно также преобразовать к виду:

$$F(z,t) = \exp\left[\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell (z^\ell - 1)\, t\right]. \qquad /62/$$

В пределе $k \to \infty$ получаем:

$$F(z,t) = \exp[N(g(z) - 1)], \qquad /63/$$

где

$$N = \lambda_1 t, \quad g(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\lambda_\ell}{\lambda_1} z^\ell . \qquad /64/$$

Факторам N и $g(z)$ можно придать достаточно простую интерпретацию. Величина N представляет собой число образующихся кластеров, а $g(z)$ - производящую функцию распада "среднего" кластера.

Таким образом, предельный ветвящийся процесс можно представить как процесс образования "средних" кластеров, допускающих различные "моды" распада с разным числом вторичных частиц.

Функция $g(z)$ удовлетворяет условию нормировки

$$g(1) = 1, \qquad /65/$$

и производная от нее в точке $z = 1$ представляет собой среднее число частиц /среднюю множественность/ от распада одного кластера N_c

$$N_c = \frac{dg}{dz}\Big|_{z=1} . \qquad /66/$$

Представление $g(z)$ в виде ряда /64/ дает возможность указать два крайних случая.

Во-первых, можно предположить, что все кластеры распадаются неупорядоченно на тождественные частицы, а вероятность распада кластера пропорциональна вероятности его образования. Это означает, что

$$\frac{\lambda_\ell}{\lambda_1} = D \frac{q^\ell}{\ell!}, \qquad /67/$$

где D и q - некоторые параметры.

Параметр D определяется из условия нормировки /65/ для функции $g(z)$. Подставляя соотношение /67/ в /64/, находим для производящих функций $g(z)$ и $F(z,t)$ следующие выражения:

$$g(z) = D[\exp(qz) - 1], \quad F(z,t) = \exp[N(\frac{\exp(qz) - 1}{\exp(q) - 1} - 1)]. \qquad /68/$$

Вытекающее отсюда распределение вероятностей часто встречается в литературе под названием усеченного пуассонова распределения.

Другой крайний случай следует из предположения об упорядоченном распаде всех кластеров на нетождественные частицы, с учетом пропорциональности друг другу вероятностей образования и распада кластера. Тогда в соотношении /67/ в знаменателе $\ell!$ нужно заменить на ℓ, т.е.

$$\frac{\lambda_\ell}{\lambda_1} = D\,\frac{q^\ell}{\ell}, \qquad /69/$$

и производящие функции приобретают вид:

$$g(z) = D\ln(1 - qz), \quad F(z,t) = \exp[N(\frac{\ln(1-qz)}{\ln(1-q)} - 1)]. \qquad /70/$$

Вытекающее отсюда распределение является частным случаем распределения Пойя и более известно в литературе под названием отрицательно биномиального распределения.

Вместо параметров q и N в усеченном пуассоновом и отрицательно биномиальном распределениях можно использовать среднее число вторичных частиц $\bar{n} = f_1 = \frac{\partial \ln F(z)}{\partial z}\Big|_{z=1}$ и приведенный коррелятор

$$\mu = \frac{\bar{n}^2}{f_2} = (\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{z=1})^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\Big|_{z=1} - (\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{z=1})^2\right]^{-1}.$$

В этих параметрах производящая функция отрицательно биномиального распределения принимает обычный вид распределения Пойя:

$$F(z) = [1 - (z-1)\frac{\bar{n}}{\mu}]^{-\mu}. \qquad /71/$$

А производящая функция усеченного пуассонова распределения приобретает форму:

$$F(z) = \exp\{-\mu[1-\exp((z-1)\frac{\bar{n}}{\mu})]\}. \qquad /72/$$

Следует отметить, что корреляционные параметры f_k для этих распределений различаются лишь на постоянный множитель $(k-1)!$, а именно:

$$f_k = \mu\left(\frac{\bar{n}}{\mu}\right)^k \qquad /73/$$

для отрицательно биномиального распределения, и

$$f_k = \mu\left(\frac{\bar{n}}{\mu}\right)^k (k-1)! \qquad /74/$$

для усеченного пуассонова распределения.

Для полноты картины приведем для этих распределений выражения для среднего числа образующихся кластеров N и среднего числа частиц, образующихся при распаде кластера N_c. Для отрицательного биномиального распределения эти величины имеют вид соответственно:

$$N = \mu\ln\left(1+\frac{\bar{n}}{\mu}\right); \quad N_c = \frac{\bar{n}}{\mu}\,\frac{1}{\ln(1+\bar{n}/\mu)}. \qquad /75/$$

Аналогично, для усеченного пуассонова распределения:

$$N = \mu\left[1-\exp\left(-\frac{\bar{n}}{\mu}\right)\right]; \quad N_c = \frac{\bar{n}}{\mu}\left[1-\exp\left(-\frac{\bar{n}}{\mu}\right)\right]^{-1}. \qquad /76/$$

Рассмотрим теперь ветвящийся случайный процесс, включающий размножение и поглощение. Производящая функция для этого процесса определяется соотношением /61/. В случае образования кластеров произвольно большого числа частиц можно положить в данном соотношении предел суммирования бесконечным и, как следствие, получить:

$$F(z,t) = [1-(z-1)\lambda_p t]^{-\nu}\exp[G(z,t)-1], \qquad /77/$$

где

$$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\lambda_k}{\lambda_p}, \quad G(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\,{}_2F_1\left(-k,1;2;\frac{z-1}{1-(z-1)\lambda_p t}\right), \qquad /78/$$

${}_2F_1(a,b;c,x)$ - гипергеометрическая функция. Используя для вероятностей λ_k, λ_p связь вида /69/, вновь приходим к производящей функции распределения Пойя с параметром $\mu + \nu$, а в предположении о неупорядоченном распаде кластеров на тождественные частицы /соотношение /67// приходим к производящей функции вида:

$$F(z, t) = [1 - (z - 1)\lambda_p t]^{-\nu} \exp\{-N \exp(z - 1)[\exp(\frac{(z - 1)^2 \lambda_p t}{1 - (z - 1)\lambda_p t}) - 1]\}. \quad /79/$$

Распределение вероятностей, вытекающее из данной производящей функции, равно как распределение, вытекающее из функции вида /60/, тесно связаны с так называемыми лазерными распределениями, т.е. с распределениями фотонов, образованными наложением когерентных неравновесных состояний /сигнал/ на равновесные некогерентные состояния /шум/.

В заключение раздела обсудим кратко масштабно-инвариантное поведение распределений вероятностей. В теоретическом анализе процессов множественного рождения адронов подобное поведение носит название КНО-скейлинга /масштабной инвариантности Кобы - Нильсена - Олесена/ и заключается в том, что в области достаточно высоких энергий величина $\bar{n}P_n$ должна быть непрерывной функцией только одной переменной $x = \frac{n}{\bar{n}}$.

Однако анализ этого свойства затруднен тем, что переменная n в распределении вероятностей ветвящегося процесса является дискретной, и необходим достаточно корректный способ перехода от дискретных n к непрерывным. Такой переход может быть реализован с помощью преобразования производящей функции дискретного распределения $F(z, t)$ в характеристическую функцию соответствующего непрерывного распределения χ_q. Связь между производящей функцией дискретного распределения $F(z, t)$ и распределением вероятностей P_n задается известными соотношениями. Для непрерывных распределений $P(n)$ обычно употребляют характеристическую функцию χ_q /фурье-образ распределения/

$$\chi_q = \int_{-\infty}^{\infty} P(n) \exp(iqn)\, dn; \quad P(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_q \exp(-iqn)\, dq. \quad /80/$$

Исследование дискретных и непрерывных распределений можно объединить, поскольку как производящая функция $F(z,t)$, так и характеристическая функция χ_q могут быть представлены в виде интеграла Лебега - Стилтьеса. Для непрерывных распределений такой интеграл сводится к интегралу Римана, а для дискретных распределений мера Лебега - Стилтьеса выражается через сумму θ -функций.

Характеристическая функция непрерывного распределения χ_q получается из производящей функции соответствующего дискретного распределения $F(z,t)$ заменой $z = \exp(iq)$ на первые члены тейлоровского разложения по q:

$$\chi_q = F(z,t) \big|_{z = 1 + iq} \quad . \qquad /81/$$

С точки зрения статистической физики данный переход соответствует разложению в большой статистической сумме активности по степеням химического потенциала вблизи критической точки.

Легко показать, что при подобном переходе факториальные моменты α_m дискретного распределения P_n преобразуются в начальные моменты β_m непрерывного распределения $P(n)$:

$$\alpha_m = \sum_n n(n-1)\dots(n-m+1)P_n \iff \beta_m = \int n^m P(n)\,dn \,. \qquad /82/$$

В частности, переход, определенный соотношением /81/, сохраняет нормировку и среднюю множественность распределений.

Аналогично, корреляционные параметры дискретного распределения переходят в семиинварианты соответствующего непрерывного распределения:

$$f_k = \frac{\partial^k \ln F(z,t)}{\partial z^k}\bigg|_{z=1} \iff \kappa_k = \frac{k!}{2\pi i^{k+1}} \oint \chi_q \frac{dq}{q^{k+1}} \,. \qquad /83/$$

Например, второй корреляционный параметр f_2 дискретного распределения совпадает с дисперсией D^2 соответствующего непрерывного распределения

$$f_2 = \sum_n n(n-1)P_n - \Big(\sum_n nP_n\Big)^2 = D^2 = \int n^2 P(n)\,dn - \Big(\int nP(n)\,dn\Big)^2 \,. \qquad /84/$$

Основными распределениями вероятностей для одночастичных элементарных процессов являются распределения Пуассона /30/ и Пойя /31/. Осуществляя в производящих функциях для этих распределений переход /81/, получаем характеристические функции вида:

$$\chi_q = \exp(-i\bar{n}q)\,; \qquad \chi_q = \Big(1 - iq\frac{\bar{n}}{\mu}\Big)^{-\mu} \qquad /85/$$

/для распределений Пуассона и Пойя, соответственно/. Вытекающие их этих характеристических функций распределения вероятностей имеют следующую форму:

$$\bar{n}P(n) = \delta\left(\frac{n}{\bar{n}} - 1\right); \quad \bar{n}P(n) = \frac{\mu^{\mu}}{\Gamma(\mu)}\left(\frac{n}{\bar{n}}\right)^{\mu-1} \exp\left(-\mu\frac{n}{\bar{n}}\right), \qquad /86/$$

т.е. обладают масштабно-инвариантным поведением /КНО-скейлингом/.

Следует, однако, отметить, что для распределения Пойя данное утверждение справедливо, строго говоря, только при постоянном параметре μ. Изменение μ в адронных соударениях с ростом энергии обычно интерпретируется как нарушение КНО-скейлинга.

Для ветвящихся процессов с образованием кластеров распределения вероятностей в общем случае масштабно-инвариантным поведением не обладают. Так, например, распределение для ветвящегося процесса с образованием двухчастичных кластеров /49/ при переходе к непрерывным n преобразуется в гауссово распределение вида:

$$\bar{n}P(n) = \frac{\bar{n}}{\sqrt{2\pi f_2}} \exp\left(-\frac{\bar{n}^2}{2f_2}\left(1-\frac{n}{\bar{n}}\right)^2\right). \qquad /87/$$

Масштабно-инвариантное поведение здесь будет иметь место, если положить $f_2 = \bar{n}^2 \cdot \mathrm{const}$.

Можно показать, что масштабно-инвариантное поведение появляется только у тех непрерывных распределений, для которых производящие функции соответствующих дискретных распределений зависят только от степеней одной переменной $\zeta = z\bar{n}$ или, что то же самое, для которых соотношения /9/, /12/ допускают масштабное мультипликативное преобразование вида:

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z,t)}{z^{n+1}}\,dz \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(\zeta,t)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \,\Big|_{\zeta = z\bar{n}} . \qquad /88/$$

В частности, данное свойство имеет место для усеченного пуассонова распределения /72/, которое обладает масштабно-инвариантным поведением, но, как и распределение Пойя, - при условии постоянных значений параметра μ.

Масштабно-мультипликативное преобразование производящих функций вида /88/ приводит к возникновению определенных связей между параметрами распределений, однако мы не будем эти связи здесь обсуждать, поскольку их допустимость и физический смысл существенно зависят от конкретного динамического механизма множественного рождения адронов.

Авторы благодарят сотрудников Лаборатории теоретической физики ОИЯИ за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Севастьянов Б.А. - Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
2. Душутин Н.К. - ЯФ, 1978, т.28, вып.6/12/, с.1594.
3. Душутин Н.К., Мальцев В.М., Синеговский С.И. - ТМФ, 1975, т.24, вып.1, с.71.
4. Душутин Н.К., Мальцев В.М. - Сообщение ОИЯИ Р2-5829, Дубна, 1971.
5. Душутин Н.К., Мальцев В.М. - Препринт ОИЯИ Р2-6500, Дубна, 1972.
6. Душутин Н.К., Мальцев В.М., Шептий В.И. - Препринт ОИЯИ Р2-6501, Дубна, 1972.
7. Душутин Н.К., Мальцев В.М. - Сообщение ОИЯИ Р2-6502,Дубна, 1972.
8. Душутин Н.К., Мальцев В.М. - Препринт ОИЯИ Р2-6932, Дубна, 1973.
9. Душутин Н.К., Мальцев В.М. - Сообщение ОИЯИ Р2-7090,Дубна, 1973.
10. Dushutin N.K., Maltsev V.M. - Comm. JINR E2-7122, Dubna, 1973.
11. Dushutin N.K., Maltsev V.M. - Comm. JINR E2-7276, Dubna, 1973.
12. Душутин Н.К., Мальцев В.М. - ЯФ, 1974, т.21, вып.6,с.1294.
13. Душутин Н.К. - Препринт ОИЯИ, Р2-7950, Дубна, 1974.
14. Вольф Ю., Душутин Н.К., Мальцев В.М. - Препринт ОИЯИ, Р2-8983, Дубна, 1975.
15. Душутин Н.К., Мальцев В.М., Синеговский С.И. - ЯФ, 1975, т.22, вып. 5, с.1105.
16. Mueller A.N. - Phys. Rev., 1972, v.D6, p.164; 1971, v.D4, p.150.
17. Govorkov A.B. - Comm. JINR E2-7916, Dubna, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 мая 1989 года.