сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-313

Э.Э.Энтральго

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТРУКТУРНО-ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ 2-ГО ПОРЯДКА

1989

Введение

В работах[I,2] на основе понятия структурно-точечного объекта в классической нерелятивистской теории была предложена новая классическая модель спина и продемонстрирована принципиальная возможность построения классической теории точечной частицы со спином. Там же дан простейший вариант структурно-точечного объекта, а также его классическое и квантовое описание в приближении I-го порядка (с изложением методики анализа системы скобок Пуассона для установления связей между структурными характеристиками).

В работе[3] была предпринята попытка построить классическую теорию точечной частицы со спином (структурно-точечной частицы) в приближении 2-го порядка. Однако излишнее требование антисимметрии квадрупольных характеристик, выдвинутое в [I,2] как совместимое с требованиями приближения I-го порядка, привело в проведенных в[3] исследованиях к определенному несоответствию с требованиями приближения 2-го порядка, что в свою очередь выразилось в приближенном сохранении энергии и квадрата спина.

В настоящей работе проводится более последовательное построение классической теории структурно-точечной частицы. При этом, в отличие от работы[3], во-первых, не используется упомянутое выше условие антисимметрии, во-вторых, удерживаются все члены 2-го порядка малости, в третьих, более четко используется предположение близости формфакторов массы и заряда исходного структурно-точечного объекта. В результате в устанавливаемом классическом описании точечной частицы со спином законы сохранения энергии и квадрата спина оказываются строго выполненными.

I. Исходное описание структурно-точечной частицы

Под структурно-точечной частицей будем понимать согласно определению[I-3] скопление точечных субчастиц с массами m_i, зарядами e_i, координатами $\vec{q}_i$ и скоростями $\dot{\vec{q}}_i$, которые в присутствии внешних стационарных гравитационного и электромагнитного полей благодаря "специфическому" взаимодействию друг с другом удерживаются на расстояниях, не превышающих размер l_0, который на данном этапе развития физики не допускает непосредственных измерений.

Исходная система уравнений для описания структурно-точечной частицы (см. /1-3/) записывается в виде

$$m_j \ddot{q}_{j\alpha} = m_j G_\alpha(\vec{q}_j) + e_j \mathcal{E}_\alpha(\vec{q}_j) + \varepsilon_{\alpha\beta\sigma} \frac{e_j}{c} \dot{q}_{j\beta} \mathcal{H}_\sigma(\vec{q}_j) - \frac{\partial W}{\partial q_{j\alpha}} . \qquad (1а)$$

Здесь $\alpha \in \overline{1,3}$; $\vec{G}(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ и $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})$ являются соответственно напряженностями гравитационного, электрического и магнитного полей, связанными с их потенциалами $\Phi(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$ и $\vec{A}(\vec{r})$ равенствами

$$G(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}), \quad \vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}), \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \qquad (1б)$$

W есть потенциальная энергия взаимодействия субчастиц, которая зависит от разности координат, т.е.

$$W = W(\ldots, \vec{q}_{jk}, \ldots), \qquad \vec{q}_{jk} = \vec{q}_j - \vec{q}_k . \qquad (1в)$$

Исходное скопление имеет одночастичные физические характеристики,

$$m_j, e_j, \vec{q}_j, \dot{\vec{q}}_j, \vec{p}_j = m_j \dot{\vec{q}}_j, \vec{L}_j = \vec{q}_j \times \vec{p}_j, \ldots, \qquad (2)$$

двухчастичные,..., n -частичные,... и, наконец, интегральные физические величины, характеризующие скопление в целом, среди которых находятся: m – масса, e – заряд, $\vec{q}$ – координата центра масс, $\vec{p}$ – полный кинетический импульс, $\vec{J}$ – полный момент количества движения, H – полная энергия:

$$m = \sum m_j, \quad e = \sum e_j, \quad q_\alpha = \sum \frac{m_j}{m} q_{j\alpha}, \quad p_\alpha = \sum p_{j\alpha}, \quad J_\alpha = \sum L_{j\alpha}, \qquad (3а)$$

$$H = \sum \left(\frac{p_{j\alpha} p_{j\alpha}}{2m_j} + m_j \Phi(\vec{q}_j) + e_j \varphi(\vec{q}_j) \right) + W . \qquad (3б)$$

Для структурно-точечной частицы должно выполняться условие удержания субчастиц:

$$|q_{j\alpha}(t) - q_\alpha(t)| \leq \ell_0 \quad \text{при любых } j, \alpha \text{ и } t, \qquad (4)$$

т.е. каждая субчастица в любой момент времени t должна находиться в потенциальной яме объема порядка ℓ_0^3 в окрестности $\vec{q}(t)$, причем настолько узкой и глубокой, чтобы внешние силы не могли привести к расплыванию скопления. Таким образом, условие (4) накладывает неявные ограничения на структуру потенциала W и на величину напряженностей внешних полей $\vec{G}$, $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$.

Отметим, что описание системой уравнений движения (1а) может быть записано в гамильтоновом формализме в терминах координат $q_{j\alpha}$ и кинетических импульсов $p_{j\alpha} = m_j \dot{q}_{j\alpha}$ в том смысле, что изменение любой величины B со временем определяется как

$$\dot{B} = \{ H(q,p),\, B(q,p) \}, \tag{5а}$$

где $q = (\ldots, \vec{q}_j, \ldots)$, $p = (\ldots, \vec{p}_j, \ldots)$ и $\{\cdot\, , \cdot\}$ есть скобка Пуассона, имеющая вид

$$\{B(q,p)\, , C(q,p)\} = \sum_j \left(\frac{\partial B}{\partial p_{j\alpha}} \frac{\partial C}{\partial q_{j\alpha}} - \frac{\partial B}{\partial q_{j\alpha}} \frac{\partial C}{\partial p_{j\alpha}} - \frac{e_j}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\delta} \mathcal{H}_\alpha(\vec{q}_j) \frac{\partial B}{\partial p_{j\beta}} \frac{\partial C}{\partial p_{j\delta}} \right). \tag{5б}$$

Это позволяет написать для нашей системы следующие, полезные для дальнейших вычислений скобки Пуассона:

$$\{q_{j\alpha}, q_{j'\beta}\} = 0, \quad \{p_{j\alpha}, q_{j'\beta}\} = \delta_j^{j'} \delta_\alpha^\beta, \quad \{p_{j\alpha}, p_{j'\beta}\} = -\frac{e_j}{c} \delta_j^{j'} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_\gamma(\vec{q}_j). \tag{5в}$$

2. <u>Цепочка физических величин и уравнений, описывающих структурно-точечную частицу как целое</u>

Условие (4) означает, что не имеет смысла рассматривать одночастичные физические величины из-за их ненаблюдаемости и следует ограничиться рассмотрением интегральных физических величин (3), описывающих структурно-точечную частицу в целом.

Для развития соответствующей теории естественно использовать малые величины

$$\xi_{j\alpha} = q_{j\alpha} - q_\alpha, \qquad \text{так как} \quad |\xi_{j\alpha}(t)| \leq \ell_0 , \tag{6}$$

и перейти от ненаблюдаемых переменных $q_{j\alpha}$ и $p_{j\alpha}$ к наблюдаемой координате центра масс $\vec{q}$, полному импульсу $\vec{p}$ и отклонениям координат и скоростей субчастиц от координаты и скорости центра масс, т.е.

$$q_{j\alpha} = q_\alpha + \xi_{j\alpha}, \quad p_{j\alpha} = m_j \dot{q}_{j\alpha} = \frac{m_j}{m} p_\alpha + m_j \dot{\xi}_{j\alpha} . \tag{7а}$$

Отсюда следует, что

$$\sum m_j \xi_{j\alpha} = 0, \quad \sum m_j \dot{\xi}_{j\alpha} = 0, \quad p_\alpha = m \dot{q}_\alpha , \tag{7б}$$

а для частных производных справедливо

$$\frac{\partial}{\partial q_{j\alpha}} = \frac{m_j}{m} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} + (1 - \delta_j^{j'}) \frac{\partial}{\partial \xi_{j\alpha}} - \frac{m_j}{m} \sum_{j''} (1 - \delta_{j'}^{j''}) \frac{\partial}{\partial \xi_{j''\alpha}} . \tag{7в}$$

С использованием переменных $\xi_{j\alpha}$ и $\dot{\xi}_{j\alpha}$ полный момент структурно-точечной частицы можно записать в виде суммы орбитального $\vec{L}$ и собственного $\vec{S}$ моментов:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \qquad L_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\delta}\, q_\beta p_\delta, \quad S_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\delta} \sum m_j \xi_{j\beta} \dot{\xi}_{j\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\delta} S_{\beta\delta}, \tag{8}$$

а для полной энергии в приближении 2-го порядка по малости переменных $\xi_{j\alpha}$ из (3б) получим

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + m\Phi + e\varphi + d_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{2} d_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} + \frac{1}{2} \overline{d_{\alpha\beta}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} + \tau + W. \tag{9}$$

Здесь и далее поля пишутся как функции от $\vec{q}$.

В выражении (9) появились интегральные физические величины: d_α – электрический дипольный момент, $d_{\alpha\beta}$ и $\overline{d_{\alpha\beta}}$ – квадрупольные моменты, τ – кинетическая энергия внутреннего движения, W – внутренняя потенциальная энергия (с точностью до постоянной составляющей и нулевой постоянной внутренних сил),

$$d_\alpha = \sum e_j \xi_{j\alpha}, \qquad d_{\alpha\beta} = \sum m_j \xi_{j\alpha} \xi_{j\beta}, \quad \overline{d_{\alpha\beta}} = \sum e_j \xi_{j\alpha} \xi_{j\beta}, \tag{10а}$$

$$\tau = \sum \frac{m_j}{2} \dot{\xi}_{j\alpha} \dot{\xi}_{j\alpha}, \qquad W = \frac{1}{2} \sum_{j,j'} W^{j'\beta}_{j\alpha} \xi_{j\alpha} \xi_{j'\beta}. \tag{10б}$$

Теперь рассмотрим изменение интегральных физических величин во времени, начиная с $p_\alpha = m\dot{q}_\alpha$. С этой целью сделаем замену переменных (7) в уравнении (Iа), отбросим кубические по $\xi_{j\alpha}$ члены и, суммируя по j, получим

$$\begin{aligned}\dot{p}_\alpha = {} & m G_\alpha + e E_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\delta} \left(\frac{e p_\beta}{mc}\right) H_\delta + d_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial q_\beta} + \\ & + \frac{1}{2}\left(d_{\beta\delta} \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial q_\beta \partial q_\delta} + \overline{d_{\beta\delta}} \frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial q_\beta \partial q_\delta}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\delta} \Big\{ \frac{p_\beta}{mc} \Big(d_\rho \frac{\partial H_\delta}{\partial q_\rho} + \\ & + \overline{d_{\rho\mu}} \frac{\partial^2 H_\delta}{\partial q_\rho \partial q_\mu}\Big) + \frac{j_\beta H_\delta}{c} + 2\mu_{\rho\beta} \frac{\partial H_\delta}{\partial q_\rho} + \mu_{\rho\mu\beta} \frac{\partial^2 H_\delta}{\partial q_\rho \partial q_\mu} \Big\}.\end{aligned} \tag{11}$$

В уравнении (II) в дополнение к величинам (I0) появились: j_α – дипольная скорость, $\mu_{\alpha\beta}$ – составляющие магнитного момента и $\mu_{\alpha\beta\delta}$ – составляющие тороидного момента,

$$j_\alpha = \sum e_j \dot{\xi}_{j\alpha}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \sum \frac{e_j}{2c} \xi_{j\alpha} \dot{\xi}_{j\beta}, \quad \mu_{\alpha\beta\delta} = \sum \frac{e_j}{2c} \xi_{j\alpha} \xi_{j\beta} \dot{\xi}_{j\delta}. \tag{12}$$

Первые три слагаемых в правой части уравнения (II) определяют действие внешних полей на структурно-точечную частицу как на заряженную материальную точку, остальные отражают силы, возникающие за счет ее структуры.

Непосредственное дифференцирование по времени выражений для квадрупольных моментов (I0а) дает

$$\dot{d}_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} \quad , \qquad \dot{\overline{d}}_{\alpha\beta} = 2c\,(\mathcal{M}_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_{\beta\alpha}) \ , \tag{I3}$$

а для собственного механического момента (8) с помощью обозначений (7) и уравнений (Iа) получим

$$\dot{S}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\delta}\Big\{ d_\beta \mathcal{E}_\delta + d_{\beta\rho}\frac{\partial \mathcal{E}_\delta}{\partial q_\rho} + \overline{d}_{\beta\rho}\frac{\partial \mathcal{E}_\delta}{\partial q_\rho} + \varepsilon_{\delta\rho\mu}\Big[\Big(\frac{p_\rho}{mc}\Big)\Big(d_\beta H_\mu +$$

$$+ \overline{d}_{\beta\nu}\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\nu}\Big) + 2\mathcal{M}_{\beta\rho}H_\mu + 2\mathcal{M}_{\beta\nu\rho}\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\nu}\Big] - \sum_{j,j'} W^{j'\rho}_{j\delta}\, \xi_{j\beta}\,\xi_{j'\rho}\Big\}. \tag{I4}$$

В последнем члене правой части уравнения (I4) появилась новая величина, которая отражает влияние внутренних сил на изменение во времени собственного момента количества движения.

Для энергии $\mathcal{T}$ согласно (I0б) и (Iа) имеем

$$\dot{\mathcal{T}} = \sum \dot{\xi}_{j\alpha}\,\dot{p}_{j\alpha} = S_{\beta\alpha}\frac{\partial G_\alpha}{\partial q_\beta} + S_{\beta\delta\alpha}\frac{\partial G_\alpha}{\partial q_\beta \partial q_\delta} + d_\alpha \mathcal{E}_\alpha + 2c\mathcal{M}_{\beta\alpha}\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta} +$$

$$+ 2c\mathcal{M}_{\beta\delta\alpha}\frac{\partial^2 \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta \partial q_\delta} + \varepsilon_{\alpha\beta\delta}\Big\{\frac{p_\beta}{mc}\Big(f_\alpha H_\delta + 2\mathcal{M}_{\rho\alpha}\frac{\partial H_\delta}{\partial q_\rho} + \mathcal{M}_{\rho\mu\alpha}\frac{\partial^2 H_\delta}{\partial q_\rho \partial q_\mu}\Big) - \dot{W}. \tag{I5}$$

Здесь появились еще две интегральные величины:

$$S_{\alpha\beta\delta} = \sum m_j\, \xi_{j\alpha}\,\xi_{j\beta}\,\dot{\xi}_{j\delta} \ , \qquad \dot{W} = \sum_{j,j'} W^{j'\beta}_{j\alpha}\, \xi_{j'\beta}\,\dot{\xi}_{j\alpha} \ . \tag{I6}$$

Итак, из (II), (I4), (I5) мы видим, что при рассмотрении изменения во времени физических величин $\vec{P}$, $\vec{S}$, $\mathcal{T}$, характеризующих структурно-точечную частицу, появились еще новые величины f_α, $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}$, $S_{\alpha\beta\gamma}$ и т.д. Перейдем теперь к рассмотрению их изменения во времени.

Прежде всего перепишем дипольный момент (I0а) и дипольную скорость (I2) в виде

$$d_\alpha = \sum Z_j m_j \xi_{j\alpha}, \quad f_\alpha = \sum Z_j m_j \dot{\xi}_{j\alpha} \ , \quad Z_j = \frac{e_j}{m_j} - \frac{e}{m} \ . \tag{I7}$$

Величины Z_j, определенные согласно (I7), есть отклонения отношений заряда к массе субчастиц от отношения заряда к массе структурно-точечной частицы. Они оказываются ключевыми для установления связей между возникающими в теории физическими величинами.

Для получения уравнения для f_α с учетом (I7) умножим на Z_j

уравнения (Iа) и, повторяя процедуру, которая привела к уравнению (II), получим

$$\dot f_\alpha = \sum Z_j \dot p_{j\alpha} = \overline{\varkappa^{(1)}}\,\mathcal{E}_\alpha + d_\beta \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta} + \overline{d^{(1)}_\beta}\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{1}{2}\left(d^{(1)}_{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta \partial q_\gamma} + \overline{J^{(1)}_{\beta\gamma}}\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta \partial q_\gamma}\right) +$$

$$+ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left\{\frac{p_\beta}{mc}\left(\overline{\varkappa^{(1)}} H_\gamma + \overline{d^{(1)}_\rho}\frac{\partial H_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{1}{2}\overline{J^{(1)}_{\rho\mu}}\frac{\partial^2 H_\gamma}{\partial q_\rho \partial q_\mu}\right) + \frac{\overline{f^{(1)}_\beta}}{c} H_\gamma + 2\overline{\mathcal{M}^{(1)}_{\rho\beta}}\frac{\partial H_\gamma}{\partial q_\rho} +\right.$$

$$\left. + \overline{\mathcal{M}^{(1)}_{\rho\mu\beta}}\frac{\partial^2 H_\gamma}{\partial q_\rho \partial q_\mu}\right\} - \sum_{j,j'} W^{j'\beta}_{j\alpha} Z_j \xi_{j'\beta}. \tag{I8}$$

В уравнении (I8) введены обозначения:

$$\overline{\varkappa^{(1)}} = \sum Z_j e_j, \quad \overline{d^{(1)}_\alpha} = \sum Z_j e_j \xi_{j\alpha}, \quad \overline{f^{(1)}_\alpha} = \sum Z_j e_j \dot\xi_{j\alpha}, \tag{I9а}$$

$$J^{(1)}_{\alpha\beta} = \sum Z_j m_j \xi_{j\alpha}\xi_{j\beta}, \quad \overline{d^{(1)}_{\alpha\beta}} = \sum Z_j e_j \xi_{j\alpha}\xi_{j\beta}, \tag{I9б}$$

$$\overline{\mathcal{M}^{(1)}_{\alpha\beta}} = \sum Z_j \frac{e_j}{2c}\xi_{j\alpha}\dot\xi_{j\beta}, \quad \overline{\mathcal{M}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}} = \sum Z_j \frac{e_j}{2c}\xi_{j\alpha}\xi_{j\beta}\dot\xi_{j\gamma}. \tag{I9в}$$

Легко видеть, что вся совокупность интегральных величин (8), (I0а), (I2), (I9) относится к трем цепочкам "моментов":

$$\chi^{(N)}_{\dots} = \sum Z_j^N m_j \dots, \quad \overline{\chi}^{(N)}_{\dots} = \sum Z_j^N e_j \dots, \quad \mathcal{M}^{(N)}_{\dots} = \sum\left(\frac{e_j}{2m_j c}\right)^N m_j \dots . \tag{20а}$$

При этом в силу определения (I7) чисел Z_j между величинами всех цепочек существуют взаимосвязи, например,

$$\overline{\chi}^{(N)}_{\dots} = \chi^{(N+1)}_{\dots} + \frac{e}{m}\chi^{(N)}_{\dots}, \tag{20б}$$

т.е. достаточно рассматривать лишь интегральные величины **одной** из цепочек (20а).

Дифференцируя величины $\chi^{(N)}_{\dots}$ по времени, можно получить систему уравнений $\dot\chi^{(N)}_{\dots}$. (первые из этих уравнений уже даны соотношениями (I4) и (I8)). При этом в правой части уравнений возникают "моменты" $\chi^{(N')}_{\dots}$ с более высокими номерами $N' > N$.

Таким образом, структурно-точечная частица описывается бесконечной цепочкой уравнений движения для бесконечной цепочки интегральных физических величин, т.е. обладает бесконечным числом степеней свободы.

Поэтому, чтобы описать структурно-точечную частицу конечным числом степеней свободы, необходим обоснованный и согласованный метод обрыва этой цепочки.

3. Обрыв цепочки физических величин, характеризующих структурно-точечную частицу

Чтобы оборвать цепочку уравнений, учитывая взаимосвязь (20а,б), существующую между физическими величинами, будем считать, что мы можем ограничиться множеством a, состоящим из 15 независимых переменных:

$$a = \{a_i,\ i \in \overline{1,15}\} = (\vec{q}, \vec{p}, \vec{d}, \vec{f}, \vec{S}) . \tag{21}$$

При этом следует считать (см. /1-3/), что

$$W^{/\beta}_{/\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} e_{\cdot} e_{\cdot} \frac{\omega^2}{æ^{(2)}} , \qquad \tilde{W} = \frac{\omega^2}{2æ^{(2)}} d_\alpha d_\alpha , \tag{22a}$$

где ω – некоторая постоянная размерности частоты. Таким образом, при предположении (21) внутренняя энергия взаимодействия выражается через дипольный момент, соответствующий $\tilde{W}$ член в уравнении (14) исчезает, а члены в уравнениях (15) и (18) примут следующий вид:

$$\dot{W} = \frac{\omega^2}{æ^{(2)}} d_\alpha f_\alpha , \qquad \sum_{\cdot,j,\cdot} W^{/\beta}_{/\alpha} z_j \xi_{j/\beta} = \omega^2 d_\alpha . \tag{22б}$$

Кроме того, будем считать, что кроме ℓ_0 имеем еще малый параметр $z = Max\,\{|z_j|\}$, где величины z_j определены согласно (17).

Поскольку всегда справедливы оценки

$$æ^{(N)} \le z^N m, \quad |d_\alpha^{(N)}| \le z^N m\, \ell_0, \quad |d_{\alpha\beta}^{(N)}| \le z^N m\, \ell_0^2, \tag{23a}$$

$$|f_\alpha^{(N)}| \le \sum z_j^N m_j\, \xi_{j\alpha} \le z^N m\, v, \quad v = \max_j\{|\xi_{j\alpha}|\}, \tag{23б}$$

то будем пренебрегать следующими величинами: $æ^{(N)}$ при $N > 2$, $d_\alpha^{(N)}$ и, соответственно, $f_\alpha^{(N)}$ при $N > 1$, $d_{\alpha\beta}^{(N)}$ при $N > 0$ и всеми величинами порядка $z^N \ell_0^M$ при $N + M > 2$.

Для согласования с данным приближением уравнения $\dot{f}_\alpha^{(2)} = 0$ требуется, чтобы выполнялись соотношения

$$0 = \overline{\mathcal{M}^{(2)}_{\alpha\beta}} - \frac{æ^{(2)}}{m} \mathcal{M}_{\alpha\beta} = (2c)^2 \left(\mathcal{M}^{(3)}_{\alpha\beta} - \frac{e}{mc} \mathcal{M}^{(2)}_{\alpha\beta} + \left(\left(\frac{e}{2mc}\right)^2 - \frac{æ^{(2)}}{2^2 c^2 m} \right) \mathcal{M}_{\alpha\beta} \right), \tag{24a}$$

$$0 = \overline{\mathcal{M}^{(2)}_{\alpha\beta\delta}} - \frac{æ^{(2)}}{m} \mathcal{M}_{\alpha\beta\delta} = (2c)^2 \left(\mathcal{M}^{(3)}_{\alpha\beta\delta} - \frac{e}{mc} \mathcal{M}^{(2)}_{\alpha\beta\delta} + \left(\left(\frac{e}{2mc}\right)^2 - \frac{æ^{(2)}}{2^2 c^2 m} \right) \mathcal{M}_{\alpha\beta\delta} \right). \tag{24б}$$

Кроме того, в данном приближении имеем еще

$$\overline{\mathscr{X}^{(1)}} = \mathscr{X}^{(2)} \equiv \mathscr{X}, \quad \overline{d_\alpha^{(1)}} = \frac{e}{m} d_\alpha, \quad \overline{f_\alpha^{(1)}} = \frac{e}{m} f_\alpha, \quad \overline{d_{\alpha\beta}^{(0)}} = \frac{e}{m} d_{\alpha\beta}. \qquad (25)$$

Для того чтобы установить связь между независимыми переменными (2I) и оставшимися физическими величинами в выражении для гамильтониана (9) и в уравнениях (II), (I4) и (I8), т.е. $d_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta\gamma}$ и τ, будем изучать их скобки Пуассона.

С помощью формул (5б) и (5в), записав предварительно независимые переменные $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\vec{f}$ и $\vec{S}$ в переменных $q_{j\alpha}$ и $p_{j\alpha}$, можно получить следующие выражения для их скобок Пуассона в рассматриваемом приближении:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \{d_\alpha, d_\beta\} = \{q_\alpha, d_\beta\} = \{p_\alpha, d_\beta\} = \{f_\alpha, q_\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_\alpha^\beta, \qquad (26а)$$

$$\{f_\alpha, d_\beta\} = \mathscr{X} \delta_\alpha^\beta, \quad \{p_\alpha, p_\beta\} = -\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{c}\left(eH_\gamma + d_\rho \frac{\partial H_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{e\, d_{\rho\mu}}{2m} \frac{\partial^2 H_\gamma}{\partial q_\rho \partial q_\mu}\right), \qquad (26б)$$

$$\{p_\alpha, f_\beta\} = -\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{c}\left(\mathscr{X} H_\gamma + \frac{e}{m} d_\rho \frac{\partial H_\gamma}{\partial q_\rho}\right), \quad \{f_\alpha, f_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{e}{m} \mathscr{X} H_\gamma, \qquad (26в)$$

$$\{S_\alpha, p_\beta\} = \frac{1}{c}\left(d_\beta H_\alpha - \delta_\alpha^\beta d_\gamma H_\gamma\right) + \frac{e}{mc\mathscr{X}}\left(d_{\beta\rho} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\rho} - \delta_\alpha^\beta d_{\gamma\rho} \frac{\partial H_\gamma}{\partial q_\rho}\right), \qquad (26г)$$

$$\{S_\alpha, q_\beta\} = 0, \qquad \{S_\alpha, f_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_\gamma + \frac{e}{mc}\left(d_\beta H_\alpha - \delta_\alpha^\beta d_\gamma H_\gamma\right), \qquad (26д)$$

$$\{S_\alpha, d_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\gamma, \qquad \{S_\alpha, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{e}{mc} d_{\gamma\rho} H_\rho. \qquad (26е)$$

Теперь если иметь в виду, что физические величины

$$d_{\alpha\beta} = \sum m_j \xi_{j\alpha} \xi_{j\beta} \qquad \text{и} \qquad \tilde{d}_{\alpha\beta} = \frac{d_\alpha d_\beta}{\mathscr{X}} \qquad (27а)$$

имеют одну и ту же размерность и одинаковые степени малости по ℓ_0 и Z и, кроме того, их скобки Пуассона с независимыми (2I) одинаковы, т.е.

$$\{d_{\alpha\beta}, q_\gamma\} = \{d_{\alpha\beta}, p_\gamma\} = \{d_{\alpha\beta}, d_\gamma\} = \{\tilde{d}_{\alpha\beta}, q_\gamma\} = \{\tilde{d}_{\alpha\beta}, p_\gamma\} = \{\tilde{d}_{\alpha\beta}, d_\gamma\} = 0, \qquad (27б)$$

$$\{d_{\alpha\beta}, f_\gamma\} = -\delta_\beta^\gamma d_\alpha - \delta_\alpha^\gamma d_\beta = \{\tilde{d}_{\alpha\beta}, f_\gamma\} = 0, \quad \{d_{\alpha\beta}, \tilde{d}_{\alpha\beta}\} = 0, \qquad (27в)$$

$$\{d_{\alpha\beta}, S_\gamma\} = \varepsilon_{\gamma\beta\rho} d_{\alpha\rho} + \varepsilon_{\gamma\alpha\rho} d_{\beta\rho}, \quad \{\tilde{d}_{\alpha\beta}, S_\gamma\} = \varepsilon_{\gamma\beta\rho} \tilde{d}_{\alpha\rho} + \varepsilon_{\gamma\alpha\rho} \tilde{d}_{\beta\rho}, \qquad (27г)$$

то все это означает, что в данном приближении можно считать

$$d_{\alpha\beta} = \frac{d_\alpha d_\beta}{\mathscr{X}}. \qquad (28)$$

Введем теперь величины размерности механического момента:

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{d_\alpha f_\beta}{\varkappa}, \quad \mathcal{L}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{L}_{\beta\gamma}, \quad S_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} - \mathcal{L}_{\alpha\beta}, \quad S_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\beta\gamma}. \tag{29а}$$

Тогда, дифференцируя по времени (27а) и (28), получим

$$s_{\alpha\beta} + s_{\beta\alpha} = \mathcal{L}_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_{\beta\alpha}, \qquad S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}, \qquad S_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{S_\gamma}{2}. \tag{29б}$$

Изменение во времени величины $\vec{\mathcal{L}}$ согласно уравнению (I8) в данном приближении имеет вид

$$\dot{\mathcal{L}}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big\{ d_\beta \mathcal{E}_\gamma + \frac{d_\beta d_\rho}{\varkappa}\Big(\frac{\partial \mathcal{G}_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{e}{m}\frac{\partial \mathcal{E}_\gamma}{\partial q_\rho}\Big) + \varepsilon_{\gamma\rho\mu}\Big(\frac{p_\rho}{mc}\Big(d_\beta \mathcal{H}_\mu + \frac{e}{m\varkappa} d_\beta d_\nu \frac{\partial \mathcal{H}_\mu}{\partial q_\nu}\Big) +$$

$$+ \frac{e}{mc} d_\beta f_\rho \mathcal{H}_\mu + \frac{2 d_\beta}{\varkappa}\overline{\mathcal{M}^{(1)}_{\nu\rho}}\frac{\partial \mathcal{H}_\mu}{\partial q_\nu}\Big)\Big\}, \tag{30}$$

а ее скобки Пуассона с величинами $a_i \in a$ можно вычислить уже с помощью системы скобок (26):

$$\{\mathcal{L}_\alpha, q_\beta\} = \{S_\alpha, q_\beta\}, \qquad \{\mathcal{L}_\alpha, d_\beta\} = \{S_\alpha, d_\beta\}, \tag{3Iа}$$

$$\{\mathcal{L}_\alpha, p_\beta\} = \{S_\alpha, p_\beta\}, \qquad \{\mathcal{L}_\alpha, f_\beta\} = \{S_\alpha, f_\beta\}, \tag{3Iб}$$

$$\{\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{L}_\gamma - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{e}{mc\varkappa} d_\gamma d_\rho \mathcal{H}_\rho, \tag{3Iв}$$

$$\{\mathcal{L}_\alpha, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{L}_\gamma - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{e}{mc\varkappa} d_\gamma d_\rho \mathcal{H}_\rho. \tag{3Iг}$$

Для скобок Пуассона величин S_α с независимыми переменными $a_i \in Q$ при этом получаем

$$\{S_\alpha, q_\beta\} = \{S, p_\beta\} = \{S_\alpha, d_\beta\} = \{S_\alpha, f_\beta\} = 0, \tag{32а}$$

$$\{S_\alpha, s_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma, \tag{32б}$$

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma, \tag{32в}$$

а из (I4) и (30) можно получить их изменение во времени:

$$\dot{S}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\rho\mu}\Big(2\Big(\mathcal{M}_{\beta\rho} - \frac{e\,\mathcal{L}_{\beta\rho}}{2mc}\Big)\mathcal{H}_\mu + 2\Big(\mathcal{M}_{\beta\nu\rho} - d_\beta\overline{\mathcal{M}^{(1)}_{\nu\rho}}\Big)\frac{\partial \mathcal{H}_\mu}{\partial q_\nu}\Big). \tag{33}$$

Отсюда видно, что на эту физическую величину не влияют стационарные внешние электрические и гравитационные поля, а влияют только внешние магнитные поля. Если еще иметь в виду (32а) и (32в), то видно, что она подчиняется соотношениям, которым удовлетворяют в квантовой теории операторы спина. Таким образом, классическая величина $\vec{S}$ имеет свойства, соответствующие квантовому спину. В дальнейшем станет ясно, что определенная согласно (29) величина $\vec{S}$ на самом деле есть классический спин.

Теперь рассмотрим скобки Пуассона, которым удовлетворяет магнитный момент $\mathcal{M}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{M}_{\beta\gamma}$:

$$\{\mathcal{M}_\alpha, q_\beta\} = 0, \qquad \{\mathcal{M}_\alpha, d_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{e}{2mc}d_\gamma, \tag{34а}$$

$$\{\mathcal{M}_\alpha, p_\beta\} = \frac{e}{2mc}\left[\frac{d_\beta\mathcal{H}_\alpha - \delta_\alpha^\beta d_\gamma\mathcal{H}_\gamma}{c} + \frac{e}{mc\varkappa}\left(d_\beta d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\alpha}{\partial q_\rho} - \delta_\alpha^\beta d_\gamma d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\right)\right], \tag{34б}$$

$$\{\mathcal{M}_\alpha, f_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{e}{mc}f_\gamma + \left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\frac{e}{mc}\right)\left(d_\beta\mathcal{H}_\alpha - \delta_\alpha^\beta d_\gamma\mathcal{H}_\gamma\right), \tag{34в}$$

$$\{\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{L}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\mathcal{L}_\gamma + \frac{e}{mc\varkappa}d_\gamma d_\rho\mathcal{H}_\rho\right), \tag{34г}$$

$$\{\mathcal{M}_\alpha, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\mathcal{M}_\gamma + \left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\frac{e}{mc}\frac{d_\gamma d_\rho}{\varkappa}\mathcal{H}_\rho\right)\right), \tag{34д}$$

$$\{\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\mathcal{M}_\gamma^{(2)} + \left(\frac{e}{2mc}\right)^2\frac{e}{mc}\frac{d_\gamma d_\rho}{\varkappa}\mathcal{H}_\rho\right), \quad \mathcal{M}_\alpha^{(2)} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum\left(\frac{e_l}{2m_l c}\right)^2 m_l\xi_{l\beta}\dot{\xi}_{l\gamma}. \tag{34е}$$

Если теперь ввести в рассмотрение величину

$$M_\alpha = \mathcal{M}_\alpha - \frac{e}{2mc}\mathcal{L}_\alpha, \tag{35}$$

то для нее имеют место скобки Пуассона:

$$\{M_\alpha, q_\beta\} = \{M_\alpha, p_\beta\} = \{M_\alpha, d_\beta\} = \{M_\alpha, f_\beta\} = 0, \tag{36а}$$

$$\{M_\alpha, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma, \qquad \{M_\alpha, M_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma^{(2)}, \tag{36б}$$

где введено еще одно полезное обозначение:

$$M_\alpha^{(2)} = \mathcal{M}_\alpha^{(2)} - \left(\frac{e}{2mc}\right)^2\mathcal{L}_\alpha. \tag{37}$$

В свою очередь для величины (37) имеем

$$\{M_\alpha^{(2)}, q_\beta\} = \{M_\alpha^{(2)}, p_\beta\} = \{M_\alpha^{(2)}, d_\beta\} = \{M_\alpha^{(2)}, f_\beta\} = 0, \tag{38а}$$

$$\{M_\alpha^{(2)}, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma^{(2)}, \quad \{M_\alpha^{(2)}, M_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma^{(3)}, \quad \{M_\alpha^{(2)}, M_\beta^{(2)}\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma^{(4)}. \tag{38б}$$

Продолжение процесса вычисления скобок Пуассона для $M_\alpha^{(3)}$, $M_\alpha^{(4)}$, ..., приводит к возникновению цепочки

$$M_\alpha^{(N)} = \mathcal{M}_\alpha^{(N)} - \mathcal{L}_\alpha^{(N)}, \quad \mathcal{L}_\alpha^{(N)} = \left(\frac{e}{2mc}\right)^N \mathcal{L}_\alpha, \quad \mathcal{M}_\alpha^{(N)} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum \left(\frac{e_l}{2m_l c}\right)^N m_l \xi_{l\beta} \dot{\xi}_{l\gamma}, \tag{39}$$

для которой в общем случае справедливо

$$\{M_\alpha^{(N)}, q_\beta\} = \{M_\alpha^{(N)}, p_\beta\} = \{M_\alpha^{(N)}, d_\beta\} = \{M_\alpha^{(N)}, f_\beta\} = 0, \tag{40а}$$

$$\{M_\alpha^{(N)}, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma^{(N)}, \quad \{M_\alpha^{(N)}, M_\beta^{(M)}\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma^{(N+M)}. \tag{40б}$$

Сравнивая соотношения (32) и (40), можно заключить, что $M_\alpha^{(N)}$ и S_α пропорциональны, причем

$$M_\alpha^{(N)} = g^{(N)} S_\alpha, \quad \mathcal{M}_{\alpha\beta}^{(N)} = g^{(N)} S_{\alpha\beta} + \left(\frac{e}{2mc}\right)^N \mathcal{L}_{\alpha\beta}, \quad g^{(N)} = g^N, \quad g^{(1)} = g, \tag{4I}$$

где g есть новая структурная константа, имеющая размерность гиромагнитного отношения. Естественно, что величину $\vec{M}$, определенную соотношением (35) и равную $g\vec{S}$ согласно (4I), следует назвать магнитным моментом спина.

Подстановка $\mathcal{M}_\alpha^{(N)}$ с учетом (39) и (4I) в соотношение (24а) приводит к равенствам

$$g^2 - \frac{e}{mc} g + \frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{m^2c^2} - \frac{\varkappa}{mc^2}\right) = 0, \quad \varkappa = 4mc^2\left(g - \frac{e}{2mc}\right)^2, \tag{42}$$

т.е. устанавливает связь между структурными константами $\varkappa$ и g.

Теперь перейдем к рассмотрению "моментов"

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}^{(N)} = \mathcal{M}_{\beta\alpha\gamma}^{(N)} = \sum \left(\frac{e_l}{2m_l c}\right)^N m_l \xi_{l\alpha} \xi_{l\beta} \dot{\xi}_{l\gamma}, \tag{43}$$

удовлетворяющих системе скобок Пуассона:

$$\{\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}^{(N)}, q_\rho\} = \{\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}^{(N)}, p_\rho\} = \{\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}^{(N)}, d_\rho\} = 0, \tag{44а}$$

$$\{\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}^{(N)}, f_\rho\} = -2c\left(\delta_\alpha^\rho\left(\mathcal{M}_{\beta\gamma}^{(N+1)} - \frac{e}{2mc}\mathcal{M}_{\beta\gamma}^{(N)}\right) + \delta_\beta^\rho\left(\mathcal{M}_{\alpha\gamma}^{(N+1)} - \frac{e}{2mc}\mathcal{M}_{\alpha\gamma}^{(N)}\right)\right). \tag{44б}$$

Можно проверить, что величина

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta\gamma}^{(N)} = \frac{2c}{\varkappa}\left\{d_\alpha\left(\mathcal{M}_{\beta\gamma}^{(N+1)} - \frac{e}{2mc}\mathcal{M}_{\beta\gamma}^{(N)}\right) + d_\beta\left(\mathcal{M}_{\alpha\gamma}^{(N+1)} - \frac{e}{mc}\mathcal{M}_{\beta\gamma}^{(N)}\right)\right\} \tag{45}$$

также удовлетворяет соотношениям (44а,б). Это означает, что в данном приближении $\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}^{(N)} = \tilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta\gamma}^{(N)}$ и с учетом (29б), (39) и (4I) можем написать

$$\mathcal{M}^{(N)}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{c}{\varkappa} g^N \left(g - \frac{e}{2mc}\right)\left(d_\alpha \varepsilon_{\beta\gamma\lambda} + d_\beta \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\right) \tilde{S}_\lambda . \qquad (46)$$

Кроме того, можно проверить непосредственной подстановкой (46) (с учетом (39)), что условие (24б) выполняется. Величина $\mathcal{M}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}$ (19в), входящая в уравнение (18) для f_α, согласно (46) имеет порядок $Z^2 \ell_0$, т.е. в рассматриваемом приближении обращается в нуль. Поэтому окончательно имеем

$$S_{\alpha\beta\sigma} = \mathcal{M}^{(0)}_{\alpha\beta\sigma} = \frac{2c}{\varkappa}\left(g - \frac{e}{2mc}\right)\left(d_\alpha \tilde{S}_{\beta\gamma} + d_\beta \tilde{S}_{\alpha\gamma}\right), \qquad (47)$$

$$M_{\alpha\beta\sigma} = \overline{\mathcal{M}^{(0)}_{\alpha\beta\sigma}} = \mathcal{M}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{2c}{\varkappa} g \left(g - \frac{e}{2mc}\right)\left(d_\alpha \tilde{S}_{\beta\gamma} + d_\beta \tilde{S}_{\alpha\gamma}\right), \quad \overline{\mathcal{M}^{(1)}_{\alpha\beta\sigma}} = 0 . \qquad (48)$$

Здесь следует отметить, что существующее однозначное соответствие между величинами S_α и $\tilde{S}_\alpha$ согласно определению $\tilde{S}_\alpha = S_\alpha - \mathcal{L}_\alpha$ позволяет любую из них взять в качестве независимой переменной. Если учесть, что скобки Пуассона для величины $\tilde{S}_\alpha$ более простые, то целесообразно в дальнейшем взять $\tilde{S}_\alpha$ в качестве независимого переменного.

Осталось установить связь между внутренней кинетической энергией (10б) и независимыми переменными (21). С этой целью вычислим их скобки Пуассона в данном приближении:

$$\{\tau, q_\alpha\} = 0, \qquad \{\tau, d_\alpha\} = \dot{f}_\alpha , \qquad (49а)$$

$$\{\tau, P_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\left\{ f_\beta H_\sigma + 2\left(g S_{\rho\beta} + \frac{e}{2mc}\mathcal{L}_{\rho\beta}\right)\frac{\partial H_\sigma}{\partial q_\rho} + \frac{2c}{\varkappa} g \left(g - \frac{e}{2mc}\right)\left(d_\rho S_{\mu\beta} + d_\mu S_{\rho\beta}\right)\frac{\partial^2 H_\sigma}{\partial q_\rho \partial q_\mu}\right\}, \qquad (49б)$$

$$\{\tau, f_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\left\{ \frac{e}{mc} f_\beta H_\sigma + 2^2 c g \left(g - \frac{e}{2mc}\right) S_{\rho\beta}\frac{\partial H_\sigma}{\partial q_\rho}\right\}, \qquad (49в)$$

$$\{\tau, S_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\varepsilon_{\sigma\rho\mu}\left\{2g\left(S_{\beta\rho} + \frac{e}{2mc}\mathcal{L}_{\beta\rho}\right)H_\mu + \frac{2g}{\varkappa}\left(g - \frac{e}{2mc}\right)\left(d_\beta S_{\gamma\rho} + d_\gamma S_{\beta\rho}\right)\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\gamma}\right\}, \qquad (49г)$$

$$\{\tau, \tilde{S}_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\varepsilon_{\sigma\rho\mu}\left\{2g S_{\beta\rho} H_\mu + \frac{2^2 g}{\varkappa}\left(g - \frac{e}{2mc}\right) d_\gamma S_{\beta\rho}\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\gamma}\right\}. \qquad (49д)$$

Задача о поиске функции τ независимых переменных (21), удовлетворяющей соотношениям (49) в силу системы скобок Пуассона (26), приводит к результату (с точностью до постоянной составляющей):

$$\tau = \frac{f_\alpha f_\alpha}{2\varkappa} - g \tilde{S}_\alpha H_\alpha - 2c g \left(g - \frac{e}{2mc}\right)\frac{d_\beta \tilde{S}_\alpha}{\varkappa}\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} . \qquad (50)$$

4. Физические величины и уравнения движения структурно-точечной частицы в ньютоновском формализме

Итак, окончательно мы можем утверждать, что при классическом описании структурно-точечная частица (с.т.ч.) в приближении 2-го порядка характеризуется следующими физическими величинами:

а) Фундаментальная постоянная c – скорость света.

б) Структурные постоянные:

m – масса с.т.ч., (5Iа)

e – заряд с.т.ч., (5Iб)

ω – характеристическая частота с.т.ч., (5Iв)

g – гиромагнитный фактор с.т.ч. (5Iг)

Указанные постоянные определяют еще две часто встречающиеся в теории постоянные:

$$g_0 = \frac{e}{2mc}, \qquad \varkappa = 4mc^2(g-g_0)^2 . \tag{52}$$

в) Независимые переменные:

$\vec{q}$ – координата с.т.ч., (53а)

$\vec{p}$ – кинетический импульс с.т.ч., (53б)

$\vec{d}$ – дипольный момент с.т.ч., (53в)

$\vec{f}$ – дипольная скорость с.т.ч., (53г)

$\vec{S}$ – спин с.т.ч. (53д)

г) Зависимые переменные:

$\vec{L} = \vec{q}\times\vec{p}$ – орбитальный момент количества движения, (54а)

$\vec{\ell} = \dfrac{\vec{d}\times\vec{f}}{\varkappa}$ – момент количества движения дипольных моментов, (54б)

$\vec{s} = \vec{S} + \vec{\ell}$ – собственный механический момент количества движения, (54в)

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$ – полный момент количества движения, (54г)

$\vec{M} = g\vec{S}$ – магнитный момент спина, (54д)

$\vec{\mathcal{M}} = g\vec{S} + g_0\vec{\ell}$ – собственный магнитный момент, (54е)

$$H = \frac{p_\alpha p_\alpha}{2m} + m\Phi + e\varphi + d_\alpha \frac{d\varphi}{dq_\alpha} + \frac{d_\alpha d_\beta}{2\varkappa}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} + \frac{e}{m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right) + \frac{f_\alpha f_\alpha}{2\varkappa} -$$

$$- g S_\alpha H_\alpha - \frac{2c}{\varkappa}(g-g_0) S_\alpha d_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{\omega^2}{2\varkappa} d_\alpha d_\alpha \quad \text{– энергия,} \tag{54ж}$$

а также $\mathcal{T}$ (50) – внутренняя кинетическая энергия, $\mathcal{W}$ (22а) – внутренняя потенциальная энергия, величины типа $d_{\alpha\beta}$ (28) и $\mu_{\alpha\beta\gamma}^{(N)}$ (46), связанные с квадрупольными и тороидными моментами.

Изменение во времени всех указанных выше характеристик определяется следующей системой уравнений движения для независимых переменных (53):

$$P_\alpha = m\dot q_\alpha\,, \tag{55а}$$

$$\begin{aligned}\dot p_\alpha &= mG_\alpha + c\mathcal{E}_\alpha + d_\beta\frac{\partial\mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{d_\beta d_\gamma}{2\varkappa}\left(\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial q_\beta\partial q_\gamma} + \frac{e}{m}\,\frac{\partial\mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta\partial q_\gamma}\right) + \\ &+ \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma}\Big[\frac{p_\beta}{mc}\left(e\mathcal{H}_\gamma + d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{e d_\rho d_\mu}{2m\varkappa}\,\frac{\partial^2\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho\partial q_\mu}\right) + \frac{f_\beta\mathcal{H}_\gamma}{c} + \left(g\varepsilon_{\rho\beta\lambda}S_\lambda + 2g_0\frac{d_\rho f_\beta}{\varkappa}\right)\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} + \\ &+ \frac{cg}{\varkappa}(g-g_0)\left(d_\rho\varepsilon_{\mu\beta\lambda} + d_\mu\varepsilon_{\rho\beta\lambda}\right)S_\lambda\frac{\partial^2\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho\partial q_\mu}\Big]\,,\end{aligned} \tag{55б}$$

$$f_\alpha = \dot d_\alpha\,, \tag{55в}$$

$$\begin{aligned}\dot f_\alpha &= \varkappa\mathcal{E}_\alpha + d_\beta\left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{e}{m}\,\frac{\partial\mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta}\right) + \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma}\Big[\frac{p_\beta}{mc}\left(\varkappa\mathcal{H}_\gamma + \frac{e}{m}d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\right) + \\ &+ \frac{e f_\beta}{mc}\mathcal{H}_\gamma + 2cg(g-g_0)\varepsilon_{\rho\beta\lambda}S_\lambda\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\Big] - \omega^2 d_\alpha\,,\end{aligned} \tag{55г}$$

$$\dot S_\alpha = \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma}S_\beta\left(g\mathcal{H}_\gamma + \frac{2c}{\varkappa}g(g-g_0)\,d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\right). \tag{55д}$$

Отметим теперь три основных следствия классического описания с.т.ч. (5I) – (55).

I. Дифференцирование по времени выражения (54ж) для энергии с учетом системы уравнений (55) дает

$$\dot H = 0\,, \qquad H = const.\,, \tag{56}$$

т.е. энергия является интегралом движения в любых внешних стационарных гравитационных и электромагнитных полях, что свидетельствует о замкнутости системы уравнений (55) и совместности ее с выражением для энергии (54ж).

2. Из уравнения (55д) следует

$$(S_\alpha S_\alpha)^{\displaystyle\cdot} = 2S_\alpha\dot S_\alpha = 0\,, \qquad S_\alpha S_\alpha = const.\,, \tag{57}$$

т.е. квадрат спина является интегралом движения при любых стационарных внешних гравитационных и электромагнитных полях.

Последнее утверждение вместе с тем, что $gS_\alpha\mathcal{H}_\alpha$ есть вклад в энергию в однородном магнитном поле, что имеют место скобки Пуассона (32а), (32в) и что на изменение S_α влияет только магнитное поле, позволяет утверждать окончательно, что S_α есть классический спин.

Из (54в) и (54е) видно, что

$$\vec S = \vec s - \vec{\mathcal{L}}\,, \qquad g\vec S = \vec\mu - g_0\vec{\mathcal{L}}\,, \tag{58}$$

т.е. спин не совпадает с собственным механическим моментом и в общем случае они не параллельны. Кроме того, $\vec{S}$ и $\vec{\mathcal{M}}$ не пропорциональны (не параллельны) в общем случае, а только в частном случае, когда $e = 0$.

3. При $\vec{d} = \vec{f} = \vec{S} = 0$ система уравнений (55) переходит в уравнение Ньютона для точечной частицы.

5. Уравнения движения структурно-точечной частицы в гамильтоновом формализме

Теперь рассмотрим систему скобок Пуассона для независимых физических величин (53) (для этого достаточно объединить соотношения величин (26а,б,в), (32а) и (32в)):

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \{q_\alpha, d_\beta\} = \{d_\alpha, d_\beta\} = \{p_\alpha, d_\beta\} = \{f_\alpha, d_\beta\} = 0,$$

$$\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_\alpha^\beta, \qquad \{f_\alpha, d_\beta\} = \varkappa\, \delta_\alpha^\beta, \tag{59а}$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = -\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{c}\left(e\mathcal{H}_\gamma + d_\rho \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{e\, d_\rho d_\mu}{2m\varkappa} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho \partial q_\mu}\right), \tag{59б}$$

$$\{p_\alpha, f_\beta\} = -\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{c}\left(\varkappa\mathcal{H}_\gamma + \frac{e}{m} d_\rho \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\right), \qquad \{f_\alpha, f_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{e\varkappa}{mc}\mathcal{H}_\gamma, \tag{59в}$$

$$\{S_\alpha, q_\beta\} = \{S_\alpha, d_\beta\} = \{S_\alpha, p_\beta\} = \{S_\alpha, f_\beta\} = 0, \quad \{S_\alpha, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma. \tag{59г}$$

Скобки Пуассона (59) позволяют переписать уравнения движения (55) и одновременно записать производную по времени от любой физической величины в стандартном для гамильтоновой формулировки виде:

$$\dot{A}(a) = \{H(a), A(a)\}, \qquad a = (\vec{q}, \vec{p}, \vec{d}, \vec{f}, \vec{S}), \tag{60а}$$

где гамильтониан $H(a)$ в терминах независимых переменных a определен выражением (54ж).

При вычислениях производных (60а) достаточно использовать систему (59) и стандартные алгебраические свойства скобок Пуассона:

$$\{A(a), B(a)\} = \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial a_i} \frac{\partial B}{\partial a_j} \{a_i, a_j\}. \tag{60б}$$

Эквивалентность ньютоновского формализма (50)-(55) и гамильтонова формализма (50)-(54), (59)-(60) доказывается непосредственным вычислением производных $\dot{a}_i$ независимых величин.

Возможность применения гамильтонова формализма свидетельствует о замкнутости предложенной теории структурно-точечной частицы.

Заключение

Подводя итог вышеизложенному, необходимо, по-видимому, отметить следующие четыре обстоятельства.

В приближении 2-го порядка для описания траекторного движения структурно-точечной частицы достаточно использовать четыре постоянных (масса m , заряд e , гиромагнитный фактор g, характерная частота ω) и пятнадцать переменных (координата $\vec{q}$, кинетический импульс $\vec{p}$, электрический дипольный момент $\vec{d}$, скорость его изменения $\vec{f}$, спин $\vec{S}$) независимых физических величин.

Спин $\vec{S}$, собственный механический момент $\vec{s}$ и собственный магнитный момент $\vec{\mu}$ структурно-точечной частицы являются, в общем случае, различными физическими характеристиками. При этом соотношения (54б,в,е) могут рассматриваться как своеобразная классическая модель спина, существенно отличающаяся от предлагавшихся ранее.

Система уравнений (55), описывающая движение структурно-точечной частицы во внешних стационарных полях, содержит только наблюдаемые (экспериментально измеряемые) физические характеристики. Поэтому справедливость предложенной выше теории может быть в конечном итоге проверена экспериментально.

Классическое описание структурно-точечного объекта может быть проквантовано. Соответствующая квантовая теория может быть построена, например, методом оператора вероятности, изложенным в работе /4/. В приближении I-го порядка такое квантование уже фактически проведено в работах /I/ и /2/.

Литература

I. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. В сб.: Гравитация и гипотетические взаимодействия. М.: УДН, I988, с. 56–65.
2. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. Сообщение ОИЯИ Р2-88-878, Дубна, I988.
3. Энтральго Э.Э. Сообщение ОИЯИ Р2-88-879, Дубна, I988.
4. Entralgo E.E., Kuryshkin V.V., Zaparovanny Yu.I. In the "Microphysical Reality and Quantum Formalism". Kluwer Acad. Publ., 1988, p. 115-143.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая I989 года.