объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-290

В.К.Мельников

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ВРИСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1989

В недавней работе [1] предложен метод интегрирования уравнения Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником в классе функций, убывающих достаточно быстро при $x \to \pm\infty$. Из результатов упомянутой выше работы следует существование бесконечного числа функционалов J_m, $m = 0,1,2,\ldots$, которые определены на достаточно быстро убывающих решениях этого уравнения и принимают на них постоянные, т.е. не зависящие от времени t, значения. Таким образом, уравнение Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником обладает бесконечным числом первых интегралов. В действительности, как будет показано ниже, уравнение Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником обладает бесконечным числом локальных законов сохранения вида

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \frac{\partial X_m}{\partial x} = 0, \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

При этом оказалось, что локальные законы сохранения (1) имеют место в более общей ситуации, нежели рассмотренная в работе [1]. Это значит, что законы сохранения (1) выполняются на любых достаточно гладких решениях уравнения Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником, а не только на рассмотренных ранее [1] достаточно быстро убывающих при $x \to \pm\infty$ решениях. Кроме того, будет показано, что законы сохранения (1) также выполняются при приведенном ниже обобщении системы уравнений из работы [1].

Итак, речь идет о системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 8\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x}|\phi_n|^2, \\ \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + u\phi_n = \lambda_n \phi_n, \quad n = 1,\ldots,N,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\epsilon_n^2 = 1$, а λ_n - положительные константы, удовлетворяющие условию $\lambda_m \neq \lambda_n$ при $m \neq n$. Пусть $u_0(x)$ - произвольная вещест-

венная функция x, обладающая производными $u_0^{(r)}(x) = \frac{d^r u_0(x)}{dx^r}$ по x сколь угодно высокого порядка, такими, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{|x u_0(x)| + |u_0^{(r)}(x)|\} dx < \infty, \quad r = 0,1,2,\ldots \tag{3}$$

Предположим, далее, что уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + u\phi = \lambda\phi \tag{4}$$

при $u = u_0(x)$ имеет ровно N точек дискретного спектра $\lambda = \lambda_n$, $n = 1,\ldots,N$. Пусть, наконец, $A_n = A_n(t)$ - произвольные непрерывные функции t, $n = 1,\ldots,N$. Согласно результатам[1] система (2) имеет решение $u = u(x,t)$, $\phi_n = \phi_n(x,t)$, $n=1,\ldots,N$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = u_0(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(x,t)|^2 dx = |A_n(t)|^2, \quad n = 1,\ldots,N. \tag{5}$$

С помощью метода обратной задачи рассеяния нетрудно показать, что в этом случае функция $u = u(x,t)$ при $t > 0$ будет обладать производными по x сколь угодно высокого порядка, которые также удовлетворяют неравенству (3). Мы покажем сейчас, что это решение системы (2) удовлетворяет бесконечному числу законов сохранения вида (1). При этом плотности T_m являются полиномами от функции $u = u(x,t)$ и ее производных по x до 2m-го порядка, а величины X_m являются полиномами от функций $u = u(x,t)$, $\Phi_1 = |\phi_1(x,t)|^2, \ldots, \Phi_N = |\phi_N(x,t)|^2$ и их производных по x соответствующего порядка. Отсюда следует, что выражения для плотностей T_m обязаны совпадать с теми, которые существуют в случае уравнения Кортевега - де Вриса без источника, а величины X_m при $\Phi_1 = \ldots = \Phi_N \equiv 0$ обращаются в аналогичные для уравнения Кортевега - де Вриса без источника. Перечисленные выше утверждения доказываются следующим образом.

Положим в уравнении (4) $\lambda = -\xi^2$, где $\xi \in (-\infty,\infty)$, и рассмотрим фундаментальную систему решений $\phi_- = \phi_-(x,\xi)$ и $\phi_+ = \phi_+(x,\xi)$ этого уравнения, удовлетворяющую требованиям

$$\phi_- \sim \exp(-i\xi x), \quad \phi_+ \sim \exp(i\xi x), \quad x \to -\infty. \tag{6}$$

Пусть

$$R = \frac{\phi_-\phi_+}{\xi}. \tag{7}$$

В силу (4) величина R удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + 4(u + \xi^2)\frac{\partial R}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial x} R = 0. \tag{8}$$

Здесь необходимо отметить, что важная роль уравнения (8) в теории уравнения Кортевега - де Вриса без источника была обнаружена впервые в работах[2-5]. При этом в[5] впервые было отмечено, что величина R является диагональю ядра резольвенты оператора Шредингера. Это замечание позже было широко использовано для нахождения законов сохранения ряда других нелинейных эволюционных уравнений, обладающих операторным представлением Лакса. Тот факт, что уравнение (8) играет основополагающую роль и при построении законов сохранения для уравнения Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником, является красноречивым проявлением важной роли диагонали ядра резольвенты соответствующего линейного оператора L при изучении законов сохранения произвольных уравнений Лакса с самосогласованным источником в том виде, как они определены в работе[6].

Как известно, определенная посредством (6) и (7) величина R обладает асимптотическим при $\xi \to \pm\infty$ разложением вида

$$R \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{R_m}{\xi^{2m+1}}, \tag{9}$$

где $R_0 = 1$, а коэффициенты R_m при $m > 0$ определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$\frac{\partial^3 R_m}{\partial x^3} + 4u\frac{\partial R_m}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial x} R_m = 4\frac{\partial R_{m+1}}{\partial x}. \tag{10}$$

Из этого соотношения следует равенство

$$\sum_{m=o}^{n}\Big(\frac{\partial^2 R_m}{\partial x^2}R_{n-m}-\frac{\partial R_m}{\partial x}\frac{\partial R_{n-m}}{\partial x}+R_m\frac{\partial^2 R_{n-m}}{\partial x^2}+$$

$$+4uR_mR_{n-m}\Big)-4\sum_{m=1}^{n}R_mR_{n-m+1}=8R_oR_{n+1},$$

показывающее, что величины R_m при $m>0$ являются полиномами от функции u и ее производных по x до $2(m-1)$-го порядка. Справедливы равенства

$$R_1=\frac{1}{2}u,\quad R_2=\frac{3}{8}u^2+\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$R_3=\frac{5}{16}u^3+\frac{5}{16}u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{5}{32}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\frac{1}{32}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \tag{11}$$

Кроме того, согласно (10) имеем

$$\sum_{k=o}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 R_{m-k-1}}{\partial x^2}R_{n+k}-\frac{\partial R_{m-k-1}}{\partial x}\frac{\partial R_{n+k}}{\partial x}+$$

$$+R_{m-k-1}\frac{\partial^2 R_{n+k}}{\partial x^2}+4uR_{m-k-1}R_{n+k}-$$

$$-4R_{m-k}R_{n+k}\Big)=4R_o\frac{\partial R_{m+n}}{\partial x}-4R_m\frac{\partial R_n}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что при любых $m\geq 0$ и $n\geq 0$ существует полином $P_{m,n}$ от функции u и ее производных по x до $2(m+n-1)$-го порядка, такой, что выполняется равенство

$$R_m\frac{\partial R_n}{\partial x}=\frac{\partial P_{m,n}}{\partial x},\quad m\geq 0,\ n\geq 0. \tag{12}$$

Далее, на основании (2) величины $\Phi_n=|\phi_n(x,t)|^2$ при $n=1,\dots,N$ удовлетворяют аналогичному (8) уравнению

$$\frac{\partial^3\Phi_n}{\partial x^3}+4(u-\lambda_n)\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial x}\Phi_n=0,\quad n=1,\dots,N.$$

С учетом (10) отсюда следует равенство

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial^2 R_{m-k}}{\partial x^2}\Phi_n-\frac{\partial R_{m-k}}{\partial x}\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}+R_{m-k}\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2}+$$

$$+4(u-\lambda_n)R_{m-k}\Phi_n\Big]\lambda_n^{k-1}=4\frac{\partial R_m}{\partial x}\Phi_n,$$

показывающее, что при любых $m\geq 0$ и $n=1,\dots,N$ существует полином $Q_{m,n}$ от функций u, Φ_n, $\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2}$ и производных от функции u по x до $2(m-1)$-го порядка, такой, что справедливо равенство

$$R_m\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}=\frac{\partial Q_{m,n}}{\partial x},\quad m\geq 0,\ n=1,\dots,N. \tag{13}$$

Положим теперь

$$J_m=\int_{-\infty}^{\infty}R_{m+1}\,dx,\ m\geq 0. \tag{14}$$

Как известно, имеет место равенство

$$\frac{\delta J_m}{\delta u}=\Big(m+\frac{1}{2}\Big)R_m,\quad m\geq 0. \tag{15}$$

При этом в соответствии с (14) находим, что

$$\frac{\delta J_m}{\delta u}=\sum_{r=o}^{2m}(-1)^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}\Big(\frac{\partial R_{m+1}}{\partial u^{(r)}}\Big),\quad u^{(r)}=\frac{\partial^r u}{\partial x^r}. \tag{16}$$

Справедливость равенства (15) никак не связана с уравнением Кортевега - де Вриса, а является одним из фундаментальных свойств диагонали ядра резольвенты оператора Шредингера. Простое доказательство этого факта может быть получено следующим образом. Возьмем произвольную бесконечно дифференцируемую

по x функцию $\theta = \theta(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\theta^{(r)}(x)|\,dx < \infty, \quad r = 0,1,2,\dots,$$

и рассмотрим величину

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) R(x,\xi)\,dx. \tag{17}$$

С помощью (4), (6) и (7) легко находим, что при любом $x \in (-\infty,\infty)$ выполняется равенство

$$\frac{\delta J}{\delta u(x)} = \frac{i}{2\xi^2}\{\phi_-^2(x,\xi)\int_x^{\infty}\theta(z)\phi_+^2(z,\xi)\,dz -$$

$$-\phi_+^2(x,\xi)\int_x^{\infty}\theta(z)\phi_-^2(z,\xi)\,dz\}.$$

Предположим теперь, что на оси x имеется точка x_1, такая, что $u(x) \equiv 0$ при $x \le x_1$. Возьмем произвольную точку x_0 так, что $x_0 < x_1$. Нетрудно убедиться, что при любом $x \ge x_0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = \frac{-i}{\xi}\{\phi_-^2(x,\xi)\int_{x_0}^{x}\phi_+^2(z,\xi)\,dz - \phi_+^2(x,\xi)\int_{x_0}^{x}\phi_-^2(z,\xi)\,dz\} -$$

$$-\frac{1}{2\xi^2}[\phi_-^2(x,\xi)\exp(2i\xi x_0) + \phi_+^2(x,\xi)\exp(-2i\xi x_0)].$$

Пусть, далее, существует точка $x_2 > x_1$, такая, что в итервале $x \in (x_0,x_2)$ функция $\theta(x)$ равна тождественно единице. Тогда при любом $x \in (x_0,x_2)$ имеет место равенство

$$\frac{\delta J}{\delta u(x)} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial R(x,\xi)}{\partial \xi} = I_-\phi_-^2(x,\xi) + I_+\phi_+^2(x,\xi), \tag{18}$$

где

$$I_- = \frac{i}{2\xi^2}[\int_{x_0}^{\infty}\theta(z)\phi_+^2(z,\xi)\,dz - \frac{i}{2\xi}\exp(2i\xi x_0)],$$

$$I_+ = \frac{-i}{2\xi^2}[\int_{x_0}^{\infty}\theta(z)\phi_-^2(z,\xi)\,dz + \frac{i}{2\xi}\exp(-2i\xi x_0)]. \tag{19}$$

В силу (9) определенная посредством (17) величина J обладает асимптотическим при $\xi \to \pm\infty$ разложением вида

$$J \sim \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\xi^{2m+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)R_m(x)\,dx.$$

На основе (6), (7) и (11) отсюда следует, что при любом $x \in (x_0,x_1)$ асимптотическое при $\xi \to \pm\infty$ разложение величины $\frac{\delta J}{\delta u(x)}$ содержит единственный ненулевой член, а именно член $-\frac{1}{2\xi^3}$, соответствующий $m = 1$. Это значит, что при любом $x \in (x_0,x_1)$ и $\xi \to \pm\infty$ величина $\Delta = \frac{\delta J}{\delta u(x)} + \frac{1}{2\xi^3}$ стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени ξ. С другой стороны, согласно (6) и (7) при любом $x \in (x_0,x_1)$ выполняется равенство $\frac{\partial R}{\partial \xi} = -\frac{1}{\xi^2}$. Таким образом, при любом $x \in (x_0,x_1)$ и $\xi \to \pm\infty$ левая часть равенства (18) стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени ξ, т.е. при любом $x \in (x_0,x_1)$ и любом $n > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}[(\frac{\delta J}{\delta u(x)} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial R(x,\xi)}{\partial \xi})\xi^n] = 0, \quad n > 0. \tag{20}$$

В соответствии с равенством (18) соотношение (20) означает, что определенные посредством (19) величины I_- и I_+ при $\xi \to \pm\infty$ стремятся к нулю быстрее любой отрицательной степени ξ. Отсюда в силу (18) вытекает, что соотношение (20) выполняется и при любом $x \in (x_1,x_2)$. Таким образом, с помощью (9), (14) и (17) получаем, что соотношение (15) выполняется при любом $x \in (x_1,x_2)$, если $u(x) \equiv 0$ при $x \le x_1$. С учетом того, что при подходящем выборе функции $\theta = \theta(x)$ точка $x_2 > x_1$ может быть взята сколь угодно далеко от точки x_1, мы убеждаемся в справедливости соотношения (15) при любом $x > x_1$, если $u(x) \equiv 0$ при

$x \le x_1$. Поскольку соотношение (15) локальное, то из сказанного выше следует его справедливость для любой бесконечно дифференцируемой функции $u = u(x)$. При этом, конечно, нужно для определения величины $\frac{\delta J_m}{\delta u}$ использовать равенство (16), а не равенство (14). Действительно, пусть бесконечно дифференцируемая функция $u = u(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x'$, скажем, в интервале $\Delta_2 = (x' - 2\delta, x' + 2\delta)$, $\delta > 0$. Возьмем бесконечно дифференцируемую функцию $\sigma = \sigma(x)$, равную нулю вне интервала Δ_2 и равную единице в любой точке $x \in \Delta_1 = (x' - \delta, x' + \delta)$. Тогда справедливость соотношения (15) для функции $u = u(x)$ в интервале Δ_1 следует из справедливости этого соотношения для функции $\hat{u} = \sigma(x)u(x)$ в интервале Δ_2.

Теперь мы в состоянии получить законы сохранения (1). С этой целью положим

$$T_m = \frac{2}{2m+1} R_{m+1}, \quad m \ge 0. \tag{21}$$

На любом решении системы (2) выполняется равенство

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \sum_{r=0}^{2m} \frac{\partial T_m}{\partial u^{(r)}} \frac{\partial^r f}{\partial x^r}, \tag{22}$$

где согласно (2) и (11) имеем

$$f = 8 \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x} |\phi_n|^2 - 8 \frac{\partial R_2}{\partial x}. \tag{23}$$

Перепишем теперь равенство (22) в следующем виде:

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial Y_m}{\partial x} + f \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left(\frac{\partial T_m}{\partial u^{(r)}}\right),$$

где

$$Y_m = \sum_{r=1}^{2m} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\partial T_m}{\partial u^{(r)}}\right)\right] \frac{\partial^{r-k-1} f}{\partial x^{r-k-1}}.$$

На основании (15), (16) и (22) справедливо равенство

$$\sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(\frac{\partial T_m}{\partial u^{(r)}}\right) = R_m, \quad m \ge 0.$$

Таким образом, с учетом (12), (13) и (23) получаем равенство

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial Y_m}{\partial x} - \frac{\partial Z_m}{\partial x},$$

где

$$Z_m = 8 P_{m,2} - 8 \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n Q_{m,n}.$$

Полагая $X_m = Z_m - Y_m$, мы получаем локальные законы сохранения вида (1), которые выполняются для любых достаточно гладких по x решений системы (2), а не только для решений, удовлетворяющих условиям (5). Более того, необходимо отметить, что при получении законов сохранения (1) существенно используется независимость величин λ_n от координаты x, $n = 1, \ldots, N$. Однако нами никак не использовалось сделанное ранее предположение, что величины λ_n не зависят от времени t. Таким образом, законы сохранения (1) выполняются для любого решения системы (2) и в том случае, когда величины λ_n являются произвольными вещественными функциями t. Более того, если величины λ_n являются положительными функциями t, то естественно поставить вопрос о существовании решения системы (2), удовлетворяющего условиям (5). Очевидно, что если такое решение существует, то величины

$J_m = \int_{-\infty}^{\infty} T_m dx$, $m \ge 0$, принимают на этом решении постоянные значения. Однако существование таких решений и возможность их нахождения с помощью метода обратной задачи рассеяния являются в настоящее время нерешенными проблемами, решение которых представляется нам очень важным по ряду причин.

В заключение необходимо отметить следующее. В силу (4) величина

$$\Phi = c_{11}(\xi)\phi_-^2(x,\xi) + 2c_{12}(\xi)\phi_-(x,\xi)\phi_+(x,\xi) + c_{22}(\xi)\phi_+^2(x,\xi)$$

при любом $\xi \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет уравнению (8). Согласно (6) величины

$$\Psi_n = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2n} \Phi(x,\xi) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

будут вещественными, если коэффициенты c_{11}, c_{12}, c_{22} удовлетворяют условиям

$$c_{11}(-\xi) = \overline{c_{11}(\xi)}, \quad c_{12}(-\xi) = \overline{c_{12}(\xi)}, \quad c_{22}(-\xi) = \overline{c_{22}(\xi)}.$$

В соответствии с (8), (10) и (24) получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial^2 R_{m-k}}{\partial x^2}\Psi_{k-1} - \frac{\partial R_{m-k}}{\partial x}\frac{\partial \Psi_{k-1}}{\partial x} + R_{m-k}\frac{\partial^2 \Psi_{k-1}}{\partial x^2} +$$

$$+ 4R_{m-k}(u\Psi_{k-1} + \Psi_k)\Big] = 4\frac{\partial R_m}{\partial x}\Psi_o .$$

Из этого равенства вытекает, что при любом $m \geq 0$ существует полином G_m от функции u, величин Ψ_o, $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ и их производных по x соответствующего порядка, такой, что справедливо равенство

$$R_m \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} = \frac{\partial G_m}{\partial x}, \quad m \geq 0. \tag{25}$$

Заменим теперь в первом уравнении системы (2) источник, т.е. рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 8\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x}|\phi_n|^2 + \frac{\partial \Psi_o}{\partial x}. \tag{26}$$

На основе (25) и при таком выборе источника уравнение Кортевега - де Вриса имеет бесконечное число локальных законов сохранения вида (1). При этом величины T_m остаются прежними. Однако величины X_m в этом случае получают дополнительные слагаемые, которые также зависят от величин Ψ_o, Ψ_1, ..., Ψ_m и их производных по x соответствующего порядка.

Здесь нелишне отметить, что определенные посредством (24) величины Ψ_n имеют, вообще говоря, разные пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$. Отсюда следует, что входящие в равенство (25) полиномы G_m также могут иметь разные пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$. Это значит, что величины $J_m = \int_{-\infty}^{\infty} T_m dx$, $m \geq 0$, будут, вообще говоря, зависеть от времени t, если содержащаяся в уравнении (26) величина Ψ_o не равна тождественно нулю. Таким образом, в этом случае наша система имеет бесконечное число локальных законов сохранения вида (1), с помощью которых невозможно получить первые интегралы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mel´nikov V.K. - Phys.Lett., 1988, v.A133, No.9, p.493.
2. Gardner C.S. et al. - Commun. Pure Appl. Math., 1974, v.XXYII, No.1, p.97.
3. Lax P.D. - Commun. Pure Appl. Math., 1975, v.XXYIII, No.1, p.141.
4. Марченко В.А. - Матем. сб., 1974, т.95(137), №3(11), с.331.
5. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. - УМН, 1975, т.XXX, вып.5(185), с.67.
6. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-89-122, Дубна, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 апреля 1989 года.