сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-269

Р.М.Ямалеев

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗАХ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КУБИЧЕСКОЙ МЕТРИКОЙ

1989

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], существует соответствие между операциями алгебры комплексных чисел и векторным исчислением на двумерной евклидовой плоскости. Удвоение комплексных чисел — кватернионы, с успехом можно применять для описания трехмерных векторов, а алгебру Клиффорда — для описания векторов в М-мерном пространстве. Таким образом, комплексным числам, кватернионам, элементам алгебры Клифффорда можно дать геометрическую интерпретацию. Это полезно и для самой геометрии, поскольку с помощью алгебраических операций можно описать различные движения векторов в заданном пространстве.

Числа Гревса [2] — одно из обобщений комплексных чисел — интересны тем, что модули этих чисел образуют кубическую форму. Соответственно, на функционалы кубической степени могут быть обобщены кватернионы, в этом случае мы получим алгебру Диксона степени 3 [3,4]. В свою очередь, алгебра Диксона заданной степени может быть обобщена на произвольное число измерений, образуя тем самым аналоги алгебры Клиффорда для функционалов степени N [5,6]. Таким образом, вполне естественно задаться вопросом: имеют ли геометрическую трактовку указанные выше алгебры?

В настоящей работе мы ограничимся только геометрической интерпретацией чисел Гревса.

Впервые сам Гревс дал геометрическое истолкование числам, которые он назвал триплетами [2]. При этом Гревс связывал триплеты с определенными проекциями пространственных векторов. Интерпретация, которая будет дана ниже, принципиально отличается от подхода, предложенного Гревсом, ибо она связана с геометрией нового типа. В предлагаемой геометрии расстояние (интервал) определяется кубической формой, причем само понятие расстояния имеет смысл только для трех заданных точек пространства. При этом мы будет иметь дело с геометрическими фигурами, свойства которых будут весьма аналогичны свойствам фигур евклидовой геометрии. Поэтому для них мы сохраним те же названия, добавляя к ним каждый раз приставку "три" или "t". Числа Гревса, краткости ради, будем называть G-числами.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИПРЯМОЙ И ТРИОТРЕЗКА

Пусть дана вещественная положительная числовая ось R. Трипрямой (ТП) будем называть линейное многообразие, точкам которого можно поставить в соответствие элементы R, связанные тройным соотношением:

$$P(a,b,c) := a + b\theta + c\theta^2,$$

$$\theta := \exp(i2\pi/3), \quad a,b,c \in R, \quad a > b, \quad a > c. \tag{1.1}$$

$P(a,b,c)$ будем называть расстоянием между тремя точками на ТП или длиной триотрезка ТО (a,b,c). Как видно, длина ТО есть величина комплексная. Заметим, что при $b=c$ выражение $P(a,b,c)$ редуцируется в обычное понятие разности

$$P(a,b,c \to b) \to P(a,b,) = a - b,$$

соответствующее длине отрезка на прямой, ограниченного точками a и b.

Поскольку длина триотрезка — величина комплексная, то необходимо определить для триотрэков понятия "больше-меньше". Будем считать, что

$$P(a_1,b_1,c_1) > P(a_2,b_2,c_2), \tag{1.2}$$

если $a_1 > a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$.

Рассмотрим операцию деления ТО (a,b,c) на три части. С этой целью прибавим к $P(a,b,c)$ заведомо тривиальные величины: $\ell + \theta\ell + \theta^2\ell$, $r + \theta r + \theta^2 r$. Полученную сумму сгруппируем так, как показано на схеме.

С х е м а

$$P(a,b,c) = a + b\theta + c\theta^2$$

$$+\ell + \ell\theta + \ell\theta^2$$

$$r + r\theta + r\theta^2.$$

Получим

$$P(a,b,c) = P_1(a,\ell,r) + P_2(\ell,r,c) + P_3(r,b,\ell). \tag{1.3}$$

Итак, из (1.3) можно заключить, что ТО (a,b,c) состоит из суммы трех ТО: (a,ℓ,r), ТО (ℓ,r,c) и ТО (r,b,ℓ), причем длина каждой из составляющих меньше, чем длина суммы отрезков. Это следует из определения (1.2).

2. ТРИВЕКТОРЫ НА ТРИПЛОСКОСТИ

Если на плоскости выбрано начало координат О, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие определенное комплексное число /1/. В так называемых диаграммах Аргана-Весселя комплексные числа складываются так же, как соответствующие им векторы, выходящие из начала координат О (которое изображает число нуль). При этом если число $z = x + iy$ умножается на произвольное комплексное число, то получим центрально-подобное вращение вектора.

Тривектор определим как такую геометрическую фигуру, которой можно поставить в соответствие определенное число Гревса. Итак, каждому числу Гревса $A(a,b,c)$ соответствует свой тривектор $\overset{>}{A}$:

$$\overset{>}{A} \to A(a,b,c) = a + b\theta + c\theta^2. \tag{2.1}$$

Геометрический объект, соответствующий трехмерному непрерывному многообразию параметров $a, b, c \in R$, будем называть триплоскостью.

Раз каждому тривектору на триплоскости поставлено в соответствие определенное число Гревса, то эти тривекторы должны исходить из начала координат О (которому соответствует число (0, 0, 0)). При этом нетрудно получить правило сложения двух тривекторов:

$$\overset{>}{C}(c_1,c_2,c_3) = \overset{>}{A}(a_1,a_2,a_3) + \overset{>}{B}(b_1,b_2,b_3),$$

$$c_k = a_k + b_k, \quad k = 1,2,3.$$

Число Гревса $A(a,b,c)$ имеет два сопряжения:

$$A_1(a,b,c) := a + b\theta^2 + c\theta = \bar{A},$$

$$A_2(a,b,c) := a + b + c = \bar{\bar{A}}.$$

Выражение вида

$$|\overset{>}{A}| := (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^{1/3} = (AA_1A_2)^{1/3}$$

будем называть длиной тривектора $\overset{>}{A}$.

Тривектор $\overset{>}{A}_0$ является единичным, если $|\overset{>}{A}_0| = 1$.

Прежде чем перейти к поворотам на триплоскости, рассмотрим экспоненциальное представление чисел Гревса.

Утверждение 1

Пусть $|A_0| = (A_0 \bar{A}_0 \bar{\bar{A}}_0)^{1/3} = 1$.
Тогда имеет место представление

$$A_0 := \mathrm{Exp}(\phi,\psi) = \exp(\theta\phi + \theta^2\psi).$$

Доказательство

Положим $\overset{>}{A}_0 \Rightarrow A_0 := a_0 + b_0\theta + c_0\theta^2$. Из условия $|A_0| = 1$ следует, что

$$a_0^3 + b_0^3 + c_0^3 - 3a_0b_0c_0 = 1. \qquad (2.2)$$

Следовательно, только два из трех параметров a_0, b_0, c_0 независимы. Представим a_0, b_0, c_0 как функции двух независимых параметров (ϕ, ψ):

$$a_0 := a_0(\phi,\psi), \quad b_0 := b_0(\phi,\psi), \quad c_0 := c_0(\phi,\psi). \qquad (2.3)$$

Условие (2.2) является единственным условием, накладываемым на функции (2.3). Рассмотрим два однопараметрических единичных G-числа:

$$\exp(\theta\phi) = g_0(\phi) + g_1(\phi)\theta + g_2(\phi)\theta^2,$$
$$\exp(\theta^2\psi) = g_0(\psi) + g_1(\psi)\theta^2 + g_2(\psi)\theta. \qquad (2.4)$$

Выберем функции a_0, b_0, c_0 в следующем виде:

$$a_0(\phi,\psi) := g_0(\phi)g_0(\psi) + g_1(\phi)g_1(\psi) + g_2(\phi)g_2(\psi),$$
$$b_0(\phi,\psi) := g_0(\phi)g_2(\psi) + g_1(\phi)g_0(\psi) + g_2(\phi)g_1(\psi), \qquad (2.5)$$
$$c_0(\phi,\psi) := g_0(\phi)g_1(\psi) + g_2(\phi)g_0(\psi) + g_1(\phi)g_2(\psi).$$

Выбранные функции удовлетворяют (2.2). Таким образом,

$$A_0 = \exp(\theta\phi)\exp(\theta^2\psi).$$

Рассмотрим еще одну полезную параметризацию a_0, b_0, c_0, а именно, выберем их в следующем виде:

$$\gamma = (1 + \alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta)^{1/3}, \qquad (2.6)$$

$$a_0 = 1/\gamma, \quad b_0 = \alpha/\gamma, \quad c_0 = \beta/\gamma.$$

При умножении единичных G-чисел параметры (α, β) будут "складываться" нелинейным образом:

$$A_0B_0 = A_0(\alpha_1, \beta_1)B_0(\alpha_2, \beta_2) = C_0(\alpha_3, \beta_3),$$

$$\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1\beta_2)/\xi, \quad \beta_3 = (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1\alpha_2)/\xi,$$

$$\xi = 1 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2.$$

Утверждение 2

Любое заданное G-число $A(a,b,c)$ $(a \neq 0,\ b \neq a \neq c)$ может быть представлено в виде

$$A(a,b,c) = |A|\exp(\phi,\psi). \qquad (2.7)$$

Доказательство

Из условия $(a \neq 0,\ b \neq a \neq c)$ следует, что $|A| \neq 0$. Разделим и умножим $A(a,b,c)$ на $|A| = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^{1/3}$. Обозначим

$$r_0 = a/|A|, \quad r_1 = b/|A|, \quad r_2 = c/|A|.$$

Тогда

$$A(a,b,c) = |A|\,R(r_0, r_1, r_2).$$

Как видно, G-число $R(r_0, r_1, r_2)$ — единичное, поэтому, согласно утверждению 1, оно представимо в виде

$$R(r_0, r_1, r_2) = \mathrm{Exp}(\phi,\psi).$$

Следовательно,

$$A = |A|\,R(r_0, r_1, r_2) = |A|\,\mathrm{Exp}(\phi,\psi).$$

Естественно предполагать, что каждый тривектор $\overset{>}{A}$, исходящий из начала координат O, задает определенное направление на триплоскости.

Вращением тривектора будем называть такое преобразование, которое переводит данный тривектор в другой, не меняя длины.

Утверждение 3

Два G-числа одинаковой длины можно приравнять путем умножения одного из них на единичное G-число.

Доказательство

Пусть даны два G-числа $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$, причем $|B| = |A|$. Согласно утверждению 2, A и B можно представить в виде:

$$A = |A| \exp(\theta\phi_1 + \theta^2\psi_1),$$

$$B = |B| \exp(\theta\phi_2 + \theta^2\psi_2).$$

Выберем единичное G-число:

$$R := \exp(\theta(\phi_1 - \phi_2) + \theta^2(\psi_1 - \psi_2)).$$

Тогда

$$A = |A| \exp(\theta\phi_2 + \theta^2\psi_2) R = BR.$$

Таким образом, если даны два тривектора $\overset{>}{A}$ и $\overset{>}{B}$ одинаковой длины, то совмещению их путем вращения на триплоскости соответствует умножение G-числа одного из них на единичное G-число. При этом величину

$$\Phi := (\phi_1 - \phi_2) + \theta(\psi_1 - \psi_2)$$

можно интерпретировать как t-угол, на который необходимо повернуть тривектор $\overset{>}{B}$, чтобы совместить с $\overset{>}{A}$.

3. АНАЛОГИ СКАЛЯРНОГО (S) И ВЕКТОРНОГО (V) ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЛЯ ДВУХ И ТРЕХ ТРИВЕКТОРОВ

Понятиям "S- и V-произведения" мы будем придавать тот же смысл, который они имеют в обычном векторном исчислении. Основное свойство S- и V-произведений заключается в том, что они не меняются при преобразованиях, сохраняющих угол и длину. В качестве примера рассмотрим способ получения S- и V-произведений для обычных векторов на евклидовой плоскости. Пусть векторам $\vec{A}$ и $\vec{B}$ поставлены в соответствие комплексные числа:

$$\vec{A} \to A(a_1, a_2) = a_1 + a_2 i, \quad \vec{B} \to B(b_1, b_2) = b_1 + b_2 i.$$

Ясно, что билинейные комбинации $A\bar{B}$ и $\bar{A}B$ инвариантны относительно преобразований

$$A' = AR, \qquad B' = BR, \quad R := \cos\phi + i\sin\phi. \tag{3.1}$$

Поэтому выражения

$$S(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{1}{2}(A\bar{B} + \bar{A}B), \qquad V(\vec{A}, \vec{B}) := \frac{i}{2}(A\bar{B} - \bar{A}B), \tag{3.2}$$

представляющие собой скалярное и векторное произведения двух векторов, также инвариантны относительно преобразования (3.1). Подставляя выражения

$$A = |A| \exp(i\phi_1), \quad B = |B| \exp(i\phi_2)$$

в (3.2), получим

$$S(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{|AB|}{2}(\exp(i\phi_{12}) + \exp(-i\phi_{12})) = |A||B| \cos(\phi_{12}), \quad \phi_{12} = (\phi_1 - \phi_2), \tag{3.3}$$

$$V(\vec{A}, \vec{B}) = |A||B| \sin(-\phi_{12}).$$

Если тривектору $\overset{>}{A}(a_0, a_1, a_2)$ поставлено в соответствие G-число: $A(a_0, a_1, a_2)$, то аналогом преобразования поворота (3.1) является:

$$A'(a'_0, a'_1, a'_2) = (g_0(\phi) + g_1(\phi)\theta + g_2(\phi)\theta^2) \times (a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2). \tag{3.4}$$

Рассмотрим трилинейное произведение тривекторов $\overset{>}{A}$, $\overset{>}{B}$, $\overset{>}{C}$, которым соответствуют G-числа $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ в следующей комбинации:

$$I_1 = A\bar{B}\bar{\bar{C}}.$$

Поскольку $|R(g_0, g_1, g_2)|^2 = R\bar{R}\bar{\bar{R}} = 1$, то I_1 инвариантен относительно преобразования

$$A' = AR, \quad \bar{B}' = \bar{B}\bar{R}, \quad \bar{\bar{C}}' = \bar{\bar{C}}\bar{\bar{R}}. \tag{3.5}$$

По отношению к этим преобразованиям неизменны также трилинейные формы

$$I_2 = \bar{A}\bar{\bar{B}}C, \quad I_3 = \bar{\bar{A}}B\bar{C},$$

$$J_1 = A\bar{\bar{B}}\bar{C}, \quad J_2 = \bar{\bar{A}}\bar{B}C, \quad J_3 = \bar{A}B\bar{\bar{C}}.$$

Из форм I_K, J_K $(K = 1, 2, 3)$ можно образовывать различные линейные комбинации, которые, очевидно, также будут инвариантами относительно (3.5). Рассмотрим три из них:

$$S(A,B,C) = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3),$$

$$V_1(A,B,C) = \frac{1}{3}(I_1 + I_2\theta + I_3\theta^2), \qquad (3.6)$$

$$V_2(A,B,C) = \frac{1}{3}(J_1 + J_2\theta^2 + J_3\theta).$$

Далее представим G-числа A, B, C в экспоненциальной форме:

$$A = |A|\,\mathrm{Exp}(\Phi_1), \quad B = |B|\,\mathrm{Exp}(\Phi_2), \quad C = |C|\,\mathrm{Exp}(\Phi_3). \qquad (3.7)$$

Подстановка (3.7) в (3.6), дает

$$S(A,B,C) = |ABC|\,\mathcal{G}_0(\Phi),$$

$$V_1(A,B,C) = |ABC|\,\mathcal{G}_2(\Phi), \qquad (3.8)$$

$$V_2(A,B,C) = |ABC|\,\mathcal{G}_2(\bar{\Phi}), \qquad \Phi = \Phi_1 + \theta\Phi_2 + \theta^2\Phi_3.$$

Здесь функции $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ являются компонентами единичного тривектора. Поэтому

$$\mathrm{Exp}(\theta\Phi) = \mathcal{G}_0(\Phi) + \theta\mathcal{G}_1(\Phi) + \theta^2\mathcal{G}_2(\Phi),$$

или

$$\mathcal{G}_0(\Phi) = \frac{1}{3}(\mathrm{Exp}(\Phi) + \mathrm{Exp}(\theta\Phi) + \mathrm{Exp}(\theta^2\Phi)),$$

$$\mathcal{G}_1(\Phi) = \frac{1}{3}(\mathrm{Exp}(\Phi) + \theta^2\,\mathrm{Exp}(\theta\Phi) + \theta\,\mathrm{Exp}(\theta^2\Phi)),$$

$$\mathcal{G}_2(\Phi) = \frac{1}{3}(\mathrm{Exp}(\Phi) + \theta\,\mathrm{Exp}(\theta\Phi) + \theta^2\,\mathrm{Exp}(\theta^2\Phi)),$$

что и использовано при получении (3.8). Нетрудно увидеть аналогию между (3.3) и (3.8), а также между функциями $\mathcal{G}_0$ и $\cos\phi$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ и $\sin\phi$.

Приведем конкретные выражения для S–V произведений для двух тривекторов. S — произведение для двух тривекторов $X(x,y,z)$ и $A(a,b,c)$:

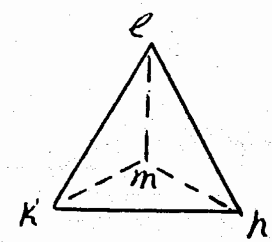
$$S(X,A,A) = xa^2 + yb^2 + zc^2 - xbc - yac - zab = |X||A|^2\,\mathcal{G}_0(\Phi),$$

V — произведение:

$$V_1(X,A,A) = a^2z + b^2x + c^2y - aby - bcz - cax = |X||A|^2\,\mathcal{G}_2(\Phi).$$

4. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ t-ТЕТРАЭДР

На триплоскости рассмотрим фигуру, которая является прямым аналогом прямоугольного треугольника в евклидовой геометрии. По сочетанию своих элементов эта фигура подобна тетраэдру, поэтому мы ее будет называть t-тетраэдром, обладающим четырьмя углами и четырьмя сторонами. Именно таким набором элементов обладает тетраэдр, поэтому мы будем пользоваться обозначениями, относящимися к прямоугольному тетраэдру (см.рисунок).



Предположим, что тетраэдр $k\ell mn$ соответствует t-тетраэдру, причем каждой стороне последнего поставим в соответствие один из боковых треугольников тетраэдра. Тогда стороны A,B,D будем называть катетами, C — гипотенузой. При этом $\Delta\ell km \to A$, $\Delta kmn \to D$, $\Delta\ell mn \to B$, $\Delta\ell kn \to C$. Далее введем t-углы $\phi = \angle ACD$, $\psi = \angle ABC$, $\Phi = \angle BDC$, $\chi = \angle ABD$.

Мы здесь рассматриваем прямоугольный t-тетраэдр, и предположим, что прямым является t-угол χ. В обычной планиметрии, если угол ϕ между векторами прямой, то скалярное произведение равно нулю и $\cos\phi = 0$. Несмотря на аналогию между функциями $\cos\phi$ и $\mathcal{G}_0(\chi)$, для дальнейших построений логичнее определять прямой t-угол χ как такую величину, при которой

$$\mathcal{G}_0(\chi) = 1. \tag{4.1}$$

Согласно § 2, тривектору $\vec{A}(a_0, a_1, a_2)$ соответствует G-число $A(a_0, a_1, a_2)$. Таким образом, a_0, a_1, a_2 являются координатами тривектора на взаимно-ортогональные направления, характеризуемые тривекторами

$$E_1(a_0, 0, 0), \; E_2(0, a_1, 0), \; E_3(0, 0, a_2).$$

Вычислим $S(E_1, E_2, E_3)$ и $V(E_1, E_2, E_3)$.

$$S(E_1, E_2, E_2) = 0, \quad V(E_1, E_2, E_2) = a_0 a_1^2.$$

Следовательно, $\mathcal{G}_0(\Phi) = 0$, $\mathcal{G}_2(\Phi) = 1$, где Φ — t-угол между E_1 и E_2. Теперь вычислим S- и V-произведения между тремя тривекторами E_1, E_2, E_3. Из формулы (3.6) получим:

$$S_1(E_1, E_2, E_3) = a_0 a_1 a_2 \, \mathcal{G}_0(\Phi) = a_0 a_1 a_2,$$

где ϕ есть t-угол между $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$. Чтобы получить перед последним выражением единицу, нам пришлось повернуть $\vec{E}_1$ на угол $i2\pi/3$, так что

$$V_1(E_1, E_2, E_3) = 0, \quad V_2(E_1, E_2, E_3) = 0.$$

Далее легко убедиться в том, что

$$V_1(E_1, E_2, E_3) = 0, \quad V_2(E_1, E_2, E_3) = 0.$$

Итак, условие ортогональности трех тривекторов выражается равенством (4.1). Этому условию удовлетворяют следующие значения ϕ:

$$\phi = i2\pi n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Вернемся к определению прямоугольного t-тетраэдра. Согласно приведенным выше доводам, t-угол χ при этом равен $\chi = i2\pi$. Введем следующие функции t углов ϕ, ψ, Φ:

$$\mathcal{G}_0(\phi) = \frac{B}{C}, \quad \mathcal{G}_1(\phi) = A/C, \quad \mathcal{G}_2(\phi) = D/C,$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_0(\psi) = D/C, \quad \mathcal{G}_1(\psi) = B/C, \quad \mathcal{G}_2(\psi) = A/C, \\ &\mathcal{G}_0(\Phi) = A/C, \quad \mathcal{G}_1(\Phi) = D/C, \quad \mathcal{G}_2(\Phi) = B/C. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В данном случае A, B, D являются длинами тривекторов, расположенных по t-ортам:

$$\vec{A} \Rightarrow (A, 0, 0), \quad \vec{B} \Rightarrow (0, B, 0), \quad \vec{D} \Rightarrow (0, 0, D),$$

C — длина тривектора

$$\vec{C} \Rightarrow C(A, B, D).$$

Поэтому $C^3 = A^3 + B^3 + D^3 - 3ABD$ есть точный аналог известной теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника.

Введем понятие площади для прямоугольного t-тетраэдра ABCD. Естественно определять площадь как функцию сторон t-тетраэдра, которая была бы инвариантна относительно преобразований вида (3.5). В качестве такой функции выступают S- или V-произведения трех смежных сторон t-тетраэдра. При этом мы должны получать один и тот же результат независимо от того, какой набор смежных сторон будет входить в данное выражение. Из (4.2) следует, что этому требованию удовлетворяет S-произведение трех смежных сторон t-тетраэдра. Имеем:

$$S(A, D, C) = ADC \, \mathcal{G}_0(\phi) = S(A, B, C) = ABC \, \mathcal{G}_0(\psi) =$$

$$= S(B, D, C) = BDC \, \mathcal{G}_0(\Phi) = ABD.$$

Последнее из равенств вполне согласуется с определением (4.1).

Площадь прямоугольного t-тетраэдра мы определим следующим образом:

$$W(ABDC) = \frac{1}{3} ABD.$$

У т в е р ж д е н и е 4

Сумма t-углов прямоугольного t-тетраэдра равна

$$\phi + \theta\psi + \theta^2 \Phi + \chi = 10\pi i/3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть ϕ, ψ, Φ — t-углы прямоугольного t-тетраэдра.

Рассмотрим функцию

$$\mathrm{Exp}\,(\phi + \theta\psi + \theta^2\Phi) =$$

$$= (\mathcal{G}_0(\phi) + \mathcal{G}_1(\phi) + \mathcal{G}_2(\phi))(\mathcal{G}_0(\psi) + \theta\mathcal{G}_1(\psi) + \theta^2\mathcal{G}_2(\psi)) \times$$

$$\times (\mathcal{G}_0(\Phi) + \theta^2\mathcal{G}_1(\Phi) + \theta\mathcal{G}_2(\Phi)) .$$

Подставляя сюда значения $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, выраженные через A, B, C, D из (4.2), получим

$$\mathrm{Exp}\,(\phi + \theta\psi + \theta^2\Phi) = \frac{1}{C^3}(A + B + D)(D + \theta B + \theta^2 A) \times$$

$$\times (A + \theta B + \theta^2 D) = \theta^2 = \exp(4\pi i/3) .$$

Следовательно, $\phi + \theta\psi + \theta^2\Phi = 4\pi i/3$. Прямой угол $\chi = 2\pi i$. Поэтому

$$\phi + \theta\psi + \theta^2\Phi + \chi = 10\pi i/3 .$$

В заключение отметим, что обобщение кубической формы

$$I(3) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

на число измерений, большее, чем три, можно осуществить, используя базис алгебры Диксона /10/. Проблема построения аналога Риманова пространства с метрическим тензором третьего ранга обсуждается в /7–9/.

Автор благодарит профессора Н.А.Черникова и А.Б.Пестова за конструктивную дискуссию по вопросам, затронутым в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кокстер Г.С.М. – Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.*
2. *Greaves Ch. – On algebraicol triplets. Proc. Irish. Acad., 1847, t. 3, p.51.*
3. *Dicson L.E. – Algebren und ihre Zahlensysteme. Zurish, 1927.*
4. *Семерджиев Х.И., Ямалеев Р.М. – Сообщение ОИЯИ Р5-88-834, Дубна, 1988.*
5. *Ямалеев Р.М. – Сообщение ОИЯИ Р5-87-766, Дубна, 1987.*
6. *Fleury N., Rausch de Traubenberg M. – "Beyond Spinors", World Scientific Special Vol. for the 70-th Birthday of J.Leite Lopes, 1989, CRN/HE 88-04.*
7. *Finkelstein D. – Physical Review Letters, 1986, 56, 15, p. 1532.*
8. *Holm C. – International Journal of Theoretical Physics, 1986, 25, 11, p. 1209.*
9. *Andrzej Borowiec – Institute of Theoretical Physics, 1988, ITP UWr, 88/70.*
10. *Ямалеев Р.М. – Краткие сообщения ОИЯИ, № 1 (34), Дубна, 1989, с.42.*

Рукопись поступила в издательский отдел
19 апреля 1989 года.