объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-228

С.И.Виницкий, В.М.Дубовик, Б.Л.Марковски,
А.А.Сузько*

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

*Институт тепло- и массообмена АН БССР, Минск

1989

I. Введение

В настоящей работе предлагается конструктивное решение прямой и обратной задач рассеяния, анонсированное в [1]. Оно получено за счет введения "глобального" (см.разд.2) адиабатического представления трехчастичной волновой функции Ψ, составленной из суммы фаддеевских компонент $\Psi = \sum_{\alpha} F_{\alpha}(X, \hat{X}_{\alpha})$ в конфигурационном пространстве трех заряженных частиц $\vec{X} = \vec{x}_{\alpha} \oplus \vec{y}_{\alpha} \in \mathcal{M} = X \times S^5_X(\hat{X})$ [2]. В результате использования инвариантной адиабатической переменной X и представления гамильтониана в виде $H \equiv -\Delta_X + H(X, \hat{X})$ конструируется гильбертово расслоенное пространство $\mathcal{H}$ с универсальной базой $B = R^1_+ \ni X$ для всех фаддеевских компонент и типичным слоем $\mathfrak{F}_X = L^2(S^5_X(\hat{X}))$, образованным из элементов базиса. Правильные граничные условия, соответствующие всевозможным процессам рассеяния с перераспределением и развалом следуют из компактных интегральных уравнений при $X \to \infty$. Использование этих граничных условий, гиперсферического адиабатического представления и калибровочного преобразования позволило корректно свести 3-частичные прямую и обратную задачи рассеяния к соответствующим им многоканальным задачам и сформулировать последние, учитывая как процессы с перераспределением частиц, так и с развалом.

2. Прямая задача рассеяния

В конфигурационном пространстве относительного движения трех заряженных частиц $\vec{X} = \vec{x}_{\alpha} \oplus \vec{y}_{\alpha} \in \mathcal{M} \hookrightarrow R^6 \setminus \{0\}$ модифицированные уравнения Фаддеева в дифференциальной формулировке [3] имеют вид

$$\left\{-\Delta_{\vec{X}} + V_\alpha(x_\alpha) + \sum_{\beta\neq\alpha} V_\beta^{(0)}(x_\beta, y_\beta) - E\right\} F_\alpha(\vec{X}, \vec{P}) =$$
$$= -\hat{V}_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \sum_{\beta\neq\alpha} F_\beta(\vec{X}, \vec{P}), \qquad (1)$$

где $\alpha = 1,2,3$ - номер пары частиц, связанных координатой x_α. функции $\hat{V}_\alpha$ и $V_\alpha^{(0)}$ - соответственно короткодействующие и дальнодействующие части парных потенциалов $V_\alpha = \hat{V}_\alpha + V_\alpha^{(0)}$, $E = P^2 = K_\alpha^2 + P_\alpha^2$ - энергия в системе центра инерции; $\vec{K}_\alpha$ и $\vec{P}_\alpha$ - относительные импульсы, отвечающие $\vec{x}_\alpha$ и $\vec{y}_\alpha$, $\vec{P} = \vec{K}_\alpha \oplus \vec{P}_\alpha \in \mathbb{R}^6$.

Решение соответствующей шредингеровской задачи

$$(H - E)\Psi = 0, \qquad H = -\Delta_{\vec{X}} + \sum_\alpha V_\alpha \qquad (2)$$

задается суммой фаддеевских компонент

$$\Psi = \sum_\alpha F_\alpha . \qquad (3)$$

Правильные граничные условия для (1) и (2), учитывающие всевозможные процессы рассеяния в системе 3 частиц с перераспределением и развалом, следуют из компактных интегральных уравнений Фаддеева при $X \to \infty$

$$F_\alpha = -R_\alpha(E + i0) V_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} F_\beta ; \quad R_\alpha = \left[-\Delta_{\vec{X}} + V_\alpha - (E + i0)\right]^{-1}. \qquad (4)$$

В данной работе, следуя [2], мы выбираем некоторую гиперсферическую параметризацию пространства $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}_6$: $\vec{X} = \{X, \hat{X}\} \in \mathbb{R}_+^1 \times S_X^5(\hat{X})$, в котором $X \in B = \mathbb{R}_+^1$ - радиус "гиперсферы" $\hat{X} \in S_X^5(\hat{X})$, заданный следом тензора инерции $X^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2$. Использование инвариантной адиабатической переменной X позволяет рассматривать гильбертово

пространство как расслоенное пространство с универсальной базой $B \ni X$ для всех компонент $F_\alpha(\vec{X})$ и слоем $\mathcal{F}_X = L^2(S_X^5(\hat{X}))$ и ввести адиабатическое представление для трехчастичной волновой функции Ψ (3). Тем самым, естественно, решается вопрос о компактификации локальных баз $B_\alpha = \mathbb{R}^3_{\vec{y}_\alpha}$ или $B_\alpha = \mathbb{R}^3_{\vec{x}_\alpha}$, возникший в работе [4].

Для F_α вводим локальные адиабатические разложения

$$F_\alpha(\vec{X}) = X^{-1} \sum_j F_{\alpha j}(X, \hat{X}_\alpha) \chi_j(X), \qquad (5)$$

базисные компоненты которых $F_{\alpha j}$ определены как решения спектральной задачи (1) на "сфере" $S_X^5(\hat{X}_\alpha)$ при каждом фиксированном значении $X \in B$, одном и том же для различных фаддеевских компонент в отличие от [4]

$$\left\{-X^2 \Delta_{\hat{X}_\alpha} + V_\alpha + \sum_{\beta\neq\alpha} V_\beta^{(0)} - \mathcal{E}_j(X)\right\} F_{\alpha j}(X, \hat{X}_\alpha) =$$
$$= \hat{V}_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} F_{\beta j}(X, \hat{X}_\beta). \qquad (6)$$

Здесь $\Delta_{\hat{X}_\alpha}$ - угловая часть оператора Лапласа в $\mathbb{R}^6$, $\mathcal{E}_j(X)$ - спектральный параметр (терм), j - набор квантовых чисел, нумерующих спектр $\sigma(H(X, \hat{X}))$ трехчастичного гамильтониана $H(X, \hat{X})$:

$$H(X, \hat{X}) = -X^{-2} \Delta_{\hat{X}_\alpha} + \sum_\alpha V_\alpha(X, \hat{X}_\alpha), \qquad (7)$$

параметрически зависящего от $X \in B$. Компоненты $F_{\alpha j}$ составляют адиабатический базис $\{\Phi_j\}$ подобно (3)

$$\Phi_j(X, \hat{X}) = \sum_\alpha^3 F_{\alpha j}(X, \hat{X}), \qquad (8)$$

который с точностью до нормирующего фактора удовлетворяет обобщенной задаче на собственные значения для уравнения (4) на сфере $S_X^5(\hat{X})$

$$\{H(x,\hat{x}) - \mathcal{E}_j(x)\}\,\Phi_j(x,\hat{x}) = 0. \tag{9}$$

При каждом фиксированном $x \in B$ определим скалярное произведение с $O(5)$ инвариантной мерой $d\Omega^{\gamma} = x^{2\gamma} d\Omega_{S^5}(\hat{x})$ (причем $\gamma = 3/2$). Тогда справедливы соотношения ортогональности и полноты

$$\langle i|j\rangle = \int d\Omega^{\gamma}\,\Phi_i^*(x,\hat{x})\,\Phi_j(x,\hat{x}) = \delta_{ij}, \tag{10}$$

$$x^{2\gamma}\sum_i \Phi_i(x,\hat{x})\,\Phi_i^*(x,\hat{x}') = \delta(\hat{x}-\hat{x}').$$

С помощью этих определений конструируется гильбертово расслоенное пространство $\mathcal{H}$ с базой $B = R^1_+ \ni x$ и слоем $\mathfrak{F}_x = L^2(S^5_x(\hat{x}))$, состоящим из собственных функций $\{\Phi_j(x,\hat{x})\}$ оператора $H(x,\hat{x})$ (7). Получено адиабатическое представление трехчастичной волновой функции Ψ (3) для уравнения Шредингера (2) в виде разложения по "глобальному" базису $\{\Phi_j\}$,

$$\Psi(\vec{X}) = x^{-1}\sum_j \Phi_j(x,\hat{x})\,\chi_j(x) \equiv x^{-1}\sum_j |\Phi_j\rangle\langle\Phi_j|\Psi\rangle, \tag{11}$$

названному нами так, поскольку в силу (8),(5) он объединяет три типа базисных компонент, отвечающих различным фрагментам.

Такое представление по названию базиса также назовем "глобальным", хотя в смысле пространственных переменных оно, как и (5), локально. Представление (II) обобщает адиабатическое гиперсферическое разложение [5,6,7] благодаря учету асимптотических граничных условий, следующих из компактных интегральных уравнений (4). Оно дает также обобщение формулы адиабатического разложения

$$\Psi = \sum_{\alpha}^{3}\Big(\sum_j F_{\alpha j}(\vec{x}_\alpha,\vec{y}_\alpha)\,\chi_j(\vec{y}_\alpha)\Big),$$

предложенного в [4].

Подстановка разложения (II) в (2) и проектирование на Φ_i приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $\chi_j = \{\chi_{ji}(x,p)\}$.

$$\sum_j\left[-D^2_{ij}(x) + V_{ij}(x)\right]\chi_j + \left[\gamma(\gamma+1)x^{-2} - p_i^2\right]\chi_i = 0 \tag{12}$$

Здесь $V_{ij}(x) = (\mathcal{E}_i(x) - \mathcal{E}_i(\infty))\delta_{ij}$, $p_i^2 = E - \mathcal{E}_i(\infty)$, $\gamma(\gamma+1)x^{-2}$ - неисчезающий центробежный потенциал ($\gamma = 3/2$), D - ковариантная производная: $D_{ij} = \delta_{ij}\frac{d}{dx} + A_{ij}$, A_{ij} - компоненты оператора A, имеющего смысл формы связности в гильбертовом расслоении $\mathcal{H}$

$$A_{ij} = \langle\Phi_i|\frac{d}{dx}|\Phi_j\rangle + \gamma x^{-1}\delta_{ij}. \tag{13}$$

Наличие $A\,d/dx$ в (I2) свидетельствует о возникновении в адиабатическом подходе эффективных потенциалов, зависящих от скорости.

Связность A генерирует унитарный (билокальный) оператор $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(x,\mathring{x})$ [8]

$$\mathcal{U}(x,\mathring{x}) = T\exp\int_{x_0}^{x} A(x')\,dx', \tag{14}$$

действующий из слоя $\mathfrak{F}_{\mathring{x}}$ в $\mathfrak{F}_x$ и осуществляющий параллельный перенос движущегося репера $\Phi(x,\hat{x})$ из некоторой фиксированной точки $\mathring{x} \in B$ в любую другую точку $x \in B$

$$|\Phi(x,\hat{x})\rangle = x^{-\gamma}\mathring{x}^{-\gamma}\,|e(\hat{x})\rangle\,\mathcal{U}(x,\mathring{x}), \tag{15}$$

где $|e(\hat{x})\rangle \equiv |\Phi(\mathring{x},\hat{x})\rangle$,

$$\mathcal{U}(x,\mathring{x}) = \langle e(\hat{x})|\Phi(x,\hat{x})\rangle = \int x^{\gamma}\mathring{x}^{\gamma}\,d\hat{x}\,e^+(\hat{x})\,\Phi(x,\hat{x}).$$

Более того, благодаря (3) и (II), форма связности A обеспечивает условия согласования [2] между физическими асимптотическими решениями системы (I2)

$$\chi \xrightarrow[xp\to\infty]{} (2i)^{-1}\left\{e^{-i(xp-\frac{\pi}{2}\gamma)}\otimes\mathbb{1} - e^{i(xp-\frac{\pi}{2}\gamma)}\,p^{-1/2}\hat{S}(p)\,p^{1/2}\right\}. \tag{16}$$

и известными асимптотическими граничными условиями для фаддеевских компонент, следующими из уравнений (4). Тогда, с учетом (3) и (II), физическая асимптотика волновой функции Ψ уравнения Шредингера(2) записывается через полную амплитуду $f(\hat{X},\hat{P},P)$, представляемую в виде

$$f(\hat{X},\hat{P},P)=\frac{4\pi}{2i}\sum_{j}\sum_{i}\Phi_{j}(\infty,\hat{X})\Phi_{i}^{*}(\infty,-\hat{P})\left(\hat{S}(P)-\hat{I}\right)_{ji}P_{i}^{-1-\sigma}. \qquad (I7)$$

Здесь $\hat{I}$ - оператор полной инверсии в $\mathcal{M}=\mathbb{R}^{1}_{+}\times S^{5}(\hat{X})[2]$, $\sigma=3/2$ для процессов рассеяния 3 $\to$ 3 и 3 $\to$ 2 и $\sigma=0$ для процессов 2 $\to$ 2 и 2 $\to$ 3, $\hat{S}(P)=\hat{I}S$, где S - обычная матрица рассеяния. Матрица $\hat{S}(P)$ - унитарна на открытых каналах и по определению равна

$$\hat{S}(P)=P^{-1/2}\mathcal{F}_{-}(P)\mathcal{F}_{+}^{-1}(P)P^{1/2}. \qquad (I8)$$

Матричные функции Йоста $\mathcal{F}_{\pm}$ определяются матричными решениями Йоста $F_{\pm}(X,P)$ и регулярными решениями $\chi^{reg}(X,P)$ системы радиальных уравнений (I2) следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\pm}(P)=W_{D}\{F_{\pm},\chi^{reg}\}=\tilde{F}_{\pm}D\chi^{reg}-\left(\widetilde{DF_{\pm}(X,P)}\right)\chi^{reg}(X,P)= \qquad (I9)$$

$$=W\{F_{\pm}\chi^{reg}\}+2\tilde{F}_{\pm}A\chi^{reg}.$$

3. Обратная задача рассеяния

В соответствии с общим определением, трехчастичная обратная задача рассеяния заключается в восстановлении потенциала взаимодействия по известной амплитуде рассеяния. В нашем случае она сводится к определению многоканальной $\hat{S}$ -матрицы и нахождению после этого эффективного потенциала $\mathcal{V}(X)$, связности $A(X)$ и матричных решений $\chi(X,P)$ системы (I2), напоминающей уравнения калибровочных теорий [9].

При унитарном преобразовании* $\mathcal{U}$ система (I2) приводится к системе связанных уравнений

$$\left\{\frac{d^{2}}{dX^{2}}+\mathcal{U}\mathcal{V}(X)\mathcal{U}^{-1}+\gamma(\gamma+1)X^{-2}-P^{2}\right\}\chi'=0 \qquad (20)$$

для коэффициентов

$$\chi'(X,P)=\mathcal{U}(X)\chi(X,P). \qquad (2I)$$

Здесь $\mathcal{V}'(X)=\mathcal{U}\left(\mathcal{E}(X)-\mathcal{E}(\infty)\right)\mathcal{U}^{-1}=\langle e|H(X,\hat{X})-\mathcal{E}(\infty)|e\rangle$ - потенциальная матрица в представлении фиксированного базиса $|e\rangle$, который удобно выбрать при $\mathring{X}\to\infty$.

Вследствие унитарного произвола в калибровке радиальных функций (21) $\hat{S}'$ -матрица, отвечающая системе (20)

$$\hat{S}'(P)=P^{-1/2}\mathcal{F}_{-}'(P)\left(\mathcal{F}_{+}'(P)\right)^{-1}P^{-1/2}, \qquad (I8')$$

совпадает с $\hat{S}$ -матрицей (I8) для системы (I2) (см. [x])

$$\hat{S}'(P)=\hat{S}(P). \qquad (22)$$

Действительно, используя соотношение связи (2I) в стандартном определении матричных функций Йоста $\mathcal{F}_{\pm}'$ мы получаем

$$\mathcal{F}_{\pm}'(P)=W\{F_{\pm}',\chi'\}=W\{F_{\pm},\chi^{reg}\}+ \qquad (23)$$

$$+2\tilde{F}_{\pm}A\chi^{reg}=W_{D}\{F_{\pm},\chi^{reg}\}=\mathcal{F}_{\pm}(P).$$

---

* Здесь мы игнорируем случаи с квазипересечениями термов, которые ответственны за нарушение унитарности $\mathcal{U}$, возникновение сингулярных членов в уравнениях (I2), (20) и геометрических фаз типа фазы Берри [I0] в данных рассеяния. Рассмотрению этих вопросов будет посвящена отдельная работа.

Отсюда с учетом определений (I8) и (I8′) с очевидностью следует (22). Теперь, после установления всех соотношений связи между уравнениями, потенциальными матрицами, матрицами рассеяния и решений мы можем применить стандартные методы прямой и обратной задач теории рассеяния для системы связанных уравнений (20) [II-I3].

Продемонстрируем применение конкретных методов обратной задачи.

I) Добавим в фаддеевские уравнения (I) и соответственно в уравнение Шредингера (2) некоторые регулярные заранее неизвестные трехчастичные потенциалы V_{123} :

$$\int_0^\infty X\,|V_{123}(X)|\,dX<\infty; \quad \int_b^\infty |V_{123}(X)|\,dX<\infty.$$

Будем считать, что парные потенциалы $V_\alpha(x_\alpha)$ известны и удовлетворяют тем же условиям. Полагаем также, что соответствующие амплитуды $f_{123}(\hat{x},\vec{P})$ и $f(\hat{x},\vec{P})$ также известны. Решим вначале прямую задачу на собственные значения. Найдем функции гиперсферического адиабатического базиса $\{\Phi_j(X,\hat{x})\}$ как собственные функции уравнения (9) на сфере $S^5_X(\hat{x})$ с гамильтонианом $H(X,\hat{x})$ (7), заданным без потенциала $V_{123}(X,\hat{X})$. Одновременно определяем и собственные значения $\mathcal{E}_j(X)$, параметрически зависящие от X, которые дают эффективный потенциал $\mathcal{V}_j(X)$. По известным $\{\Phi_j(X,\hat{x})\}$ можем найти матричные элементы оператора связности $A(X)$ (13) и по формулам (I4) или (I5) - билокальный транспортный оператор $\mathcal{U}(X)\equiv\mathcal{U}(X,\overset{c}{X})$, действующий как эволюционный оператор. Унитарный оператор $\mathcal{U}(X)$ позволяет перейти от системы (I2) с потенциальной матрицей

$$\mathcal{V}_{123}=\mathcal{V}(X)+\langle\Phi(X,\hat{x})|\,V_{123}(X,\hat{x})\,|\Phi(X,\hat{x})\rangle \qquad (24)$$

к системе (20) с потенциалом V_{123} в обкладках фиксированного репера $|e\rangle$

$$\mathcal{V}'_{123}(X)=\mathcal{U}\,\mathcal{V}_{123}\,\mathcal{U}^{-1}=\langle e|H(X,\hat{x})-\mathcal{E}(\infty)|e\rangle+\langle e|V_{123}(X,\hat{x})|e\rangle. \qquad (25)$$

Соответствующие матрицы $\hat{S}_{123}$ и $\hat{S}'_{123}$ определяются по амплитуде $f(\hat{x},\vec{P})$ с использованием соотношений (I7) и (22).

Теперь можем сформулировать обратную задачу по восстановлению трехчастичного потенциала V_{123} и соответствующих решений по данным рассеяния, используя результаты работ [I3-I5]. Основные обобщенные уравнения многоканальной обратной задачи рассеяния Гельфанда - Левитана - Марченко следующие:

$$K(X,X')+Q(X,X')+\int_{X(0)}^{\infty(X)}K(X,t)\,Q(t,X')\,dt=0, \qquad (26)$$

$$\mathcal{V}'_{123}(X)=\mathcal{V}'(X)\mp 2\frac{d}{dX}K(X,X'), \qquad (27)$$

$$\chi'_{123}(X,P)=\chi'(X,P)+\int_{X(0)}^{\infty(X)}K(X,X')\,\chi'(X',P)\,dX'. \qquad (28)$$

Пределы интегрирования в (26), (28) и знаки в (27) зависят от конкретной формулировки обратной задачи. В частности, пределы от X до ∞ в (26) и знак " − " в (27) отвечают подходу Марченко, пределы $[0,X]$ в (26) и знак "+" в (27) - подходу Гельфанда - Левитана. Многоканальная система уравнений (26) решается относительно матрицы $K(X,X')$ при известной $Q(X,X')$, определяемой данными рассеяния или спектральными данными. Ядро оператора обобщенного сдвига $K(X,X')$ определяет трехчастичную потенциальную матрицу $\mathcal{V}'_{123}(X)$ (27) и соответствующие волновые функции $\chi'_{123}(X,P)$ (28) системы (20) с потенциалом (25).

В обобщенном подходе Марченко [I4,I5] интегральное ядро $Q(X,X')$ задается соотношением

$$Q(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,F'(x,p)\left(\hat{S}'(p)-\hat{S}'_{123}(p)\right)\tilde{F}'(x',p)+$$
$$+\sum_{n}^{N_{123}}F'(x,i\varkappa^{(n)}_{123})M^{(n)}_{123}\tilde{F}'(x',i\varkappa^{(n)}_{123})-\tag{29}$$
$$-\sum_{n}^{N}F'(x,i\varkappa^{(n)})M^{(n)}\tilde{F}'(x,i\varkappa^{(n)}).$$

Здесь решения Иоста $F'_\pm(X,P)$ системы уравнений (20) связаны с решениями Иоста $F_\pm(X,P)$ системы (I2) в соответствии с соотношением (2I) следующим образом:

$$F'_\pm(X,P)=\mathcal{U}(X,\infty)\,F_\pm(X,P)\,,\tag{21'}$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$\lim_{X\to\infty}F'_\pm(X,P)=\lim_{X\to\infty}F_\pm(X,P)=\exp\pm i\left(XP-\frac{\pi}{2}\gamma\right)\otimes\mathbb{1}.\tag{30}$$

Унитарные на открытых каналах матрицы рассеяния $\hat{S}_{123}$ и $\hat{S}'_{123}$ определяются по известным амплитудам $f_{123}(\hat{x},\vec{P})$ и $f(\hat{x},\vec{P})$ (I7), с учетом (22), и отвечают системе (20) с трехчастичным потенциалом V_{123} и без него соответственно, $M^{(n)}_{123}$ и $M^{(n)}$ – действительные положительно определенные нормировочные матрицы дискретных состояний $E^{(n)}_{123}=-(\varkappa^{(n)}_{123})^2$, $E^{(n)}=-(\varkappa^{(n)})^2$.

Определяя V'_{123} и F'_{123} по формулам (26)-(28) в представлении фиксированного базиса $|e\rangle$ и возвращаясь к представлению в базисе $|\Phi\rangle$, получаем соотношения для матриц трехчастичного потенциала $\mathcal{V}_{123}$ системы (I2) и соответствующих решений Иоста

$$\mathcal{V}_{123}=\mathcal{V}(X)-2\,\mathcal{U}^{-1}(x,\infty)\left(\frac{d}{dx}K(x,x)\right)\mathcal{U}(x,\infty)\,,\tag{31}$$

$$F_{\pm123}(X,P)=\mathcal{U}^{-1}(X,\infty)\,F'_{\pm123}(X,P)\,.\tag{32}$$

Следовало бы отметить, что транспортные матрицы $\mathcal{U}$ в (2I') и (32) одни и те же, поскольку заданы на одних и тех же базисных функциях $\{\varphi_j\}$.

Наконец, физические решения (I2) с V_{123} получаются как линейная комбинация решений Иоста $F_{\pm123}(X,P)$

$$\chi^{ph}(X,P)=(-2i)^{-1}\left\{F_{-123}(X,P)-F_{+123}(X,P)\,P^{-1/2}\hat{S}_{123}(P)\,P^{1/2}\right\}.\tag{33}$$

В обобщенном подходе Гельфанда – Левитана интегральное ядро $Q^{\Gamma\text{-}\Lambda}(X,X')$ определяется по спектральным матрицам $\rho'_{123}(P)$ и $\rho'(P)$ для системы (20) с потенциалом V_{123} и без него, соответственно

$$Q^{\Gamma\text{-}\Lambda}(X,X')=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi'^{reg}(X,P)\,d(\rho'_{123}-\rho)\,\tilde{\chi}'^{reg}(X',P),\tag{34}$$

$$\frac{d\rho'}{dE}=\begin{cases}\frac{P}{\pi}\left|\mathcal{F}'(P)\right|^{-2}, & E>0,\\ \sum_n\delta(E-E^{(n)})(N^{(n)})^{-1} & E<0;\end{cases}$$

$N^{(n)}$ – нормировочные матрицы, определяемые соотношением

$$(N^{(n)})^{-1}=\int_0^\infty\left|\chi'^{reg}(X,P)\right|^2dX\,.$$

Матрица регулярных решений выделяется граничными условиями

$$\lim_{X\to0}\chi'^{reg}(X,P)\,X^{-(K+\gamma+1)}=1\,.$$

После нахождения ядра $K^{\Gamma\text{-}\Lambda}$ по $Q^{\Gamma\text{-}\Lambda}$ (34) при решении основной системы (26) получаем по многоканальным формулам обратной задачи (27), (28) матрицы потенциалов $\mathcal{V}'_{123}$ и регулярных решений χ'^{reg}_{123} системы (20). Осуществляя обратное унитарное преобразование, находим $\mathcal{V}_{123}$ и χ для системы (I2).

Итак, адиабатическое представление для трехчастичной волновой функции и калибровочное преобразование позволили корректно свести трехчастичные прямую и обратную задачи рассеяния к соответствующим многоканальным задачам и сформулировать их, учитывая как процессы с перераспределением частиц, так и с развалом.

2. Рассмотрим теперь следующее обобщение обратной задачи рассеяния, когда не известны не только трехчастичные, но и парные потенциалы V_α ($\alpha = 1,2,3$). При этом по-прежнему считаем известными два набора данных рассеяния $(\hat{S}_{123}(P), \{\mathcal{H}^{(n)}_{123}, M^{(n)}_{123}\})$ и $(\hat{S}(P), \{\mathcal{H}^{(n)}, M^{(n)}\})$ системы трех частиц с потенциалом V_{123} и без него. Тогда по второму набору данных рассеяния восстанавливается потенциальная матрица $\mathcal{V}' = \mathcal{U}\mathcal{E}(X)\mathcal{U}^{-1}$ и находятся решения системы (20) по обобщенным типа (26)-(28) или обычным многоканальным формулам теории Гельфанда - Левитана - Марченко. В первом случае, когда опорный потенциал $\mathcal{V}'(X)$ отличен от нуля, основные соотношения (26)-(28) останутся теми же, если $\mathcal{V}'_{123}$ заменить на реконструируемый потенциал $\mathcal{V}'_1$ без трехчастичного V_{123}, $\hat{S}'_{123}$ на $\hat{S}'_1$, ρ'_{123} на ρ'_1, χ'_{123} на χ'. Отметим, что в случае, когда опорный потенциал $V'(X) = 0$, матрица $S' = 1$, решения становятся решениями для свободных уравнений (например, решения Йоста запишутся в виде $F'_\pm(X,P) = \exp \pm i(XP - \frac{\pi}{2}\gamma)$ и формулы (26)-(28) переходят в обычные многоканальные формулы Гельфанда - Левитана - Марченко [12,13].

Теперь найдем билокальный оператор переноса $\mathcal{U}(X,\infty)$ и термы $\{\mathcal{E}_j(X)\}$ в результате решения алгебраической задачи на собственные значения

$$\mathcal{V}'(X)\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}(X)\left(\mathcal{E}_j(X) + \gamma(\gamma+1)X^{-2} - \mathcal{E}_j(\infty)\right), \tag{35}$$

где $\mathcal{V}'(X)$ определено из формул обратной задачи для системы (20), в то время как в предыдущем примере по известным V_α решалась прямая задача на собственные значения для реперного уравнения (9). Знание $\mathcal{U}(X)$ позволяет восстановить и матрицу эффективного вектор-потенциала

$$A(X) = \mathcal{U}(X)\frac{d}{dX}\mathcal{U}^{-1}(X),$$

ответственного за потенциал, зависящий от скорости $A(X)\frac{d}{dX}$ в (12).

На втором этапе, используя вышеописанную схему (26)-(33), мы восстанавливаем трехчастичную потенциальную матрицу и соответствующие решения по двум наборам данных рассеяния.

Существование "глобального" адиабатического базиса $\{\Phi_j\}$, а также возможность определения эффективных скалярных $\mathcal{E}_j(X)$, $\mathcal{V}_{123}(X)$ и векторных $A(X)$ потенциалов по данным трехчастичной задачи рассеяния обусловлены тем фактом, что в нашем подходе информация о взаимодействии фрагментов содержится не только в радиальных решениях χ, но и в базисных "квазиугловых" функциях $\{\Phi_j\}$ в отличие от традиционных подходов разложения по К-гармоникам или кластерным функциям. Более того, появляется возможность использования многоканальной техники баргмановских потенциалов для аналитического моделирования эффективных взаимодействий трех частиц и нахождения соответствующих точных решений.

Литература

I. С.И.Виницкий, В.М.Дубовик, М.В.Кадомцев, Б.Л.Марковски, А.А.Сузько.В сб.: Аннотации Межд. конф. по теории систем нескольких частиц и кварк-адронным системам. ОИЯИ, Д4-87-237, Дубна, с.19.
1987. Материалы Межд. семинара "Микроскопические методы в теории систем нескольких частиц". Калинин, Изд-во Калининского университета, 1988, т.I, с.4-10. -10.

2. С.И.Виницкий, В.М.Дубовик, М.В.Кадомцев, Б.Л.Марковски, А.А.Сузько. Препринт ОИЯИ Р4-88-532, Дубна, 1988.

3. С.П.Меркурьев, Л.Д.Фаддеев. Теория рассеяния для системы нескольких частиц. М., 1985.

4. K.A.Makarov, Yu.A.Kuperin, B.S.Pavlov, V.M.Dubovik, B.L.Markovski and S.I.Vinitsky, Preprint FUB-HEP/87-11, Berlin (West), 1987, 21 p.

5. U.Fano, Phys.Rev. A24 (1981) 2402; ibid. A25 (1982) 1208.

6. M.B.Kadomtsev, S.I.Vinitsky, J.Phys. B20 (1987)

7. G.C.Schatz, A.Kupperman, J.Chem.Phys. 65 (1976) 4668

8. B.Kostant, Lectures Notes in Mathematics, Ed. T.Taam, 170 (1970) p.87.

9. B.Zygelman, Phys.Lett. A125 (1987) 476.

10. M.B.Berry, Proc. R.Soc. A292 (1984) 45.

11. Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. Мир, М., 1969, 2-е изд.
(New York: Springer-Verlag), 1982.

12. К.Шадан, П.Сабатье. Обратная задача в квантовой теории рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1980, 408 с.

13. Б.Н.Захарьев, А.А.Сузько. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. Энергоатомиздат, М., 1985. 2-е изд. (New York: Springer-Verlag) 1989.

14. H.E.Moses, J.Math. Phys. 20 (1979) 2047.

15. В.Н.Пивоварчик, А.А.Сузько. В Сб. трудов "Эволюционные методы в неоднородных средах". Минск, Изд. ИТМО АН БССР, С.168-177, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 апреля 1989 года.