89-224

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-224

Н.А.Черников

ТЕНЗОР, ПОТЕРЯННЫЙ В ОТО

1989

В общей теории относительности /ОТО/ потерян важный геометрический объект - хорошо известный геометрам [1] тензор аффинной деформации. Эта оплошность, подорвав среди физиков веру в тензорный анализ, породила псевдотензорную субкультуру, венцом которой явился суррогат тензора энергии - "псевдотензор энергии" гравитационного поля* . Вокруг этого понятия более семидесяти лет ведется неугасающая дискуссия, остановить которую нельзя, если не реабилитировать тензорный анализ. Для этого необходимо ввести в ОТО потерянный тензор.

Главным результатом ОТО, несомненно, явилась ЭТГ - эйнштейновская теория гравитации. Значит, требуется построить теорию гравитации, целиком основанную на тензорном анализе, без каких-либо суррогатов. Автору удалось решить эту задачу. Ниже приводится решение.

На передний план выдвигаются два симметричных тензорных поля g^{ab} и P^{a}_{mn} . Условие симметрии означает

$$g^{ab} = g^{ba}, \quad P^{a}_{mn} = P^{a}_{nm}. \qquad /1/$$

При этом условии остаются в стороне вопросы единой теории поля Эйнштейна.

Считается, что определитель матрицы (g^{ab}) не равен нулю, так что существует тензор g_{ab}, обратный тензору g^{ab} . Следовательно, как и в ЭТГ, мы располагаем римановой геометрией с метрической формой

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b \qquad /2/$$

и с элементом объема

$$dV = \epsilon \prod_a dx^a, \qquad /3/$$

где Π - знак произведения,

$$\epsilon = \sqrt{|g|}, \qquad /4/$$

---

*Здесь термин взят в кавычки не мной, а Эйнштейном [2] .

g – определитель матрицы (g_{ab}). Поэтому, как и в ЭТГ, введем связность Кристоффеля

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{as}(\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}). \qquad /5/$$

Но в отличие от ЭТГ, в развиваемой здесь теории на римановом многообразии с метрической формой /2/ явно задано тензорное поле P^a_{mn}. Это дает нам возможность ввести, что мы и сделаем, еще одну связность – фоновую связность

$$\check{\Gamma}^a_{mn} = \Gamma^a_{mn} + P^a_{mn}, \qquad /6/$$

которая играет роль, похожую на роль системы отсчета[3]. Так как связность Кристоффеля симметрична, то по условию /1/ симметрична и фоновая связность.

Если задана фоновая связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ и задан тензор g_{ab}, то тензор P^a_{mn} равен тензору аффинной деформации

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn}. \qquad /7/$$

Следовательно, задать два тензорных поля /1/ – это все равно, что задать симметричное тензорное поле g_{ab} и фоновую связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ без кручения.

Разумеется, это утверждение верно при условии

$$g \neq 0. \qquad /8/$$

Тензор кручения фоновой связности равен

$$\check{S}^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \check{\Gamma}^a_{nm}, \qquad /9/$$

все написанные здесь формулы верны при условии

$$\check{S}^a_{mn} = 0. \qquad /10/$$

Для выяснения вопроса о необходимости введения в ЭТГ тензорного поля P^a_{mn} нет нужды в конкретных представлениях о строении вещества. Достаточно рассмотреть гравитационное поле в вакууме, что здесь и делается.

Действие гравитационного поля задается в виде

$$\mathcal{E} = \int \mathfrak{L}\, dV, \qquad /11/$$

где $\mathfrak{L}$ – скаляр, равный

$$\mathfrak{L} = g^{mn} P_{mn}. \qquad /12/$$

В свою очередь, P_{mn} – тензор, равный

$$P_{mn} = P^a_{mb} P^b_{an} - P_s P^s_{mn}, \qquad /13/$$

а P_s – ковектор, равный свертке

$$P_s = P^a_{as}. \qquad /14/$$

Уравнения гравитационного поля получаются из условий

$$\delta\mathcal{E} = 0, \quad \delta\check{\Gamma}^a_{mn} = 0. \qquad /15/$$

Второе из этих условий означает, что связность /6/ – фоновая.

Имеем

$$\delta\mathcal{E} = \int [(P_{mn} - \frac{1}{2}\mathfrak{L} g_{mn})\, \delta g^{mn} + \Theta^{mn}_a \delta P^a_{mn}]\, dV, \qquad /16/$$

где

$$\Theta^{mn}_a = \Phi^{mn}_a - \frac{1}{2}(\delta^m_a \Phi^n + \delta^n_a \Phi^m). \qquad /17/$$

В свою очередь, δ^m_a – единичный тензор – аффинор, Φ^{mn}_a – тензор, равный

$$\Phi^{mn}_a = g^{ms} P^n_{as} + g^{ns} P^m_{as} - g^{mn} P_a, \qquad /18/$$

а Φ^m – вектор, равный свертке

$$\Phi^m = \Phi^{ms}_s = g^{ab} P^m_{ab}. \qquad /19/$$

Согласно /7/ в формулу /16/ мы должны подставить

$$\delta P^a_{mn} = \delta\check{\Gamma}^a_{mn} - \delta\Gamma^a_{mn}. \qquad /20/$$

Как известно /см., например,[4] /,

$$\delta\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{as}(\nabla_m \delta g_{sn} + \nabla_n \delta g_{sm} - \nabla_s \delta g_{mn}), \qquad /21/$$

где ∇_s – ковариантная производная со связностью /5/. Учитывая второе из условий /15/, получаем второе слагаемое в квадратных скобках в формуле /16/ в виде

$$\Theta^{mn}_a \delta P^a_{mn} = -\frac{1}{2}(\Theta^{snm} + \Theta^{smn} - \Theta^{mns})\nabla_s \delta g_{mn}, \qquad /22/$$

где

$$\Theta^{mns} = \Theta_a^{mn} g^{as}. \qquad /23/$$

Принимая в расчет /17-19/, находим

$$\frac{1}{2}(\Theta^{snm} + \Theta^{smn} - \Theta^{mns}) = g^{mk} g^{n\ell} (\Omega^s_{k\ell} - \frac{1}{2}\Omega^s g_{k\ell}), \qquad /24/$$

где $\Omega^s_{k\ell}$ - тензор, равный

$$\Omega^s_{k\ell} = P^s_{k\ell} - \frac{1}{2}(P_k \delta^s_\ell + P_\ell \delta^s_k), \qquad /25/$$

а Ω^s - вектор, равный

$$\Omega^s = g^{k\ell}\Omega^s_{k\ell} = \Phi^s - g^{sa}P_a. \qquad /26/$$

Далее, имеем

$$\delta g_{mn} = -g_{mk}g_{n\ell}\,\delta g^{k\ell}. \qquad /27/$$

Так как

$$\nabla_s g_{mk} = 0, \qquad /28/$$

то из /27/ получается равенство

$$\nabla_s \delta g_{mn} = -g_{mk}g_{n\ell}\nabla_s \delta g^{k\ell}. \qquad /29/$$

Следовательно, выражение /22/ приводится к следующему виду

$$\Theta_a^{mn}\delta P^a_{mn} = (\Omega^s_{mn} - \frac{1}{2}\Omega^s g_{mn})\nabla_s \delta g^{mn}. \qquad /30/$$

Итак, если вариация аффинной связности /6/ равна нулю, то вариация интеграла /11/ равна

$$\delta\mathcal{E} = \int[(P_{mn} - \frac{1}{2}\mathfrak{L} g_{mn})\,\delta g^{mn} + (\Omega^s_{mn} - \frac{1}{2}\Omega^s g_{mn})\nabla_s \delta g^{mn}]dV. \qquad /31/$$

Теперь применим теорему Гаусса, согласно которой для любого векторного поля F^s объемный интеграл

$$\int \nabla_s F^s dV \qquad /32/$$

равен поверхностному [5]. Полагая

$$F^s = (\Omega^s_{mn} - \frac{1}{2}\Omega^s g_{mn})g^{mn} = (1 - N/2)\Omega^s, \qquad /33/$$

где N - размерность многообразия, и отбрасывая поверхностный интеграл, заменяем вариацию /31/ на

$$\delta\mathcal{E} = \int(S_{mn} - \frac{1}{2}S g_{mn})\,\delta g^{mn}dV, \qquad /34/$$

где S_{mn} - тензор, равный

$$S_{mn} = P_{mn} - \nabla_s\Omega^s_{mn} = P_{mn} + \frac{1}{2}(\nabla_m P_n + \nabla_n P_m) - \nabla_s P^s_{mn}, \qquad /35/$$

а S - скаляр, равный

$$S = \mathfrak{L} - \nabla_s\Omega^s = \mathfrak{L} + \nabla_s g^{sa}P_a - \nabla_s\Phi^s. \qquad /36/$$

Следовательно, уравнения гравитационного поля в вакууме имеют вид

$$S_{mn} - \frac{1}{2}S g_{mn} = 0. \qquad /37/$$

Умножая /37/ на S^{mn}, находим $S = 0$. Значит, из /37/ следует, что в вакууме

$$S_{mn} = 0, \qquad /38/$$

то есть согласно /35/

$$\nabla_s P^s_{mn} = P_{mn} + \frac{1}{2}(\nabla_m P_n + \nabla_n P_m). \qquad /39/$$

Тензор энергии гравитационного поля равен

$$\mathcal{E}^a_b = \Omega^a_{mn}\Phi^{mn}_b - \mathfrak{L}\delta^a_b. \qquad /40/$$

Так же, как и лагранжиан $\mathfrak{L}$, он линейно зависит от тензора g^{ab} и квадратично - от тензора P^a_{mn}.

Располагая двумя связностями /5/ и /6/, для каждого тензорного поля T можно составить ковариантные производные ∇T и $\check{\nabla} T$. Ввиду того, что обе эти связности симметричны, закон изменения тензора кривизны при переходе от одной связности к другой [1] можно записать в следующих двух вариантах:

$$R^a_{mnb} - \check{R}^a_{mnb} = \nabla_n P^a_{mb} - \nabla_m P^a_{nb} + P^a_{mnb}, \qquad /41/$$

$$R^a_{mnb} - \check{R}^a_{mnb} = \check{\nabla}_n P^a_{mb} - \check{\nabla}_m P^a_{nb} - P^a_{mnb}, \qquad /42/$$

где

$$P^a_{mnb} = P^s_{mb}P^a_{sn} - P^s_{nb}P^a_{sm}. \qquad /43/$$

Здесь, по определению,

$$R^{a}_{mnb}=\partial_m\Gamma^a_{nb}-\partial_n\Gamma^a_{mb}+\Gamma^a_{ms}\Gamma^s_{nb}-\Gamma^a_{ns}\Gamma^s_{mb}, \qquad /44/$$

$$\check{R}^{a}_{mnb}=\partial_m\check{\Gamma}^a_{nb}-\partial_n\check{\Gamma}^a_{mb}+\check{\Gamma}^a_{ms}\check{\Gamma}^s_{nb}-\check{\Gamma}^a_{ns}\check{\Gamma}^s_{mb} \ . \qquad /45/$$

Это определение в скрытой форме содержится в сформулированном выше законе.

Согласно /35/ и /41/ имеем

$$S_{mn}=R_{mn}-\frac{1}{2}(\check{R}_{mn}+\check{R}_{nm}) \ , \qquad /46/$$

где

$$R_{mn}=R^{s}_{smn}, \quad \check{R}_{mn}=\check{R}^{s}_{smn}, \qquad /47/$$

так как

$$P_{mn}=P^{s}_{smn}. \qquad /48/$$

Поэтому уравнения гравитационного поля /39/ можно записать в виде

$$R_{mn}=\frac{1}{2}(\check{R}_{mn}+\check{R}_{nm}). \qquad /49/$$

Но согласно /46/ и /42/

$$S_{mn}=\frac{1}{2}(\check{\nabla}_m P_n+\check{\nabla}_n P_m)-\check{\nabla}_s P^{s}_{mn}-\dot{P}_{mn}. \qquad /50/$$

Поэтому уравнения гравитационного поля /39/ можно записать еще в одном виде

$$\check{\nabla}_a P^{a}_{mn}=\frac{1}{2}(\check{\nabla}_m P_n+\check{\nabla}_n P_m)-\dot{P}_{mn}. \qquad /51/$$

Построенная теория гравитации удовлетворяет принципу соответствия: при условии, что тензор кривизны /45/ фоновой связности /6/ равен нулю, она переходит в ЭТГ. Действительно, в этом случае найдется координатная карта, в которой все коэффициенты /6/ равны нулю, так что в этой карте

$$P^{a}_{mn}=-\Gamma^{a}_{mn}. \qquad /52/$$

При этом уравнения /49/ совпадают с уравнениями Гильберта - Эйнштейна

$$R_{mn}=0, \qquad /53/$$

а тензор энергии /40/ совпадает с "псевдотензором энергии" Эйнштейна.

Уравнения /49/ совпадают с уравнениями /53/ и при более слабом условии

$$\check{R}_{mn}+\check{R}_{nm}=0. \qquad /54/$$

Поэтому важно рассмотреть теорию гравитации с уравнениями ЭТГ на фоне полупримитивной связности, удовлетворяющей условию /54/, и с тензором энергии, равным /40/.

По широко распространенному мнению, энергия в ОТО нелокализуема, поскольку ее плотность определяется псевдотензором энергии*. Напротив, в развиваемой здесь тензорной теории гравитации энергия локализуема, и ее плотность определяется тензором энергии, а не псевдотензором. Пора очнуться от наваждения и приступить к поискам способов измерения плотности энергии гравитационного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
2. Эйнштейн А., Громмер Я. Общая теория относительности и закон движения. /1927/. В кн.: Собр. научн. трудов А.Эйнштейна. М.: Наука, 1966, т.2, с.198-222.
3. Черников Н.А. Погружение гравитационного поля в пространство аффинной связности без кручения. Препринт ОИЯИ Р2-88-27, Дубна, 1988. В сб.: "Гравитация и электромагнетизм", Минск: Университетское, 1988, с.255-262.
4. Черников Н.А. Вариационный метод Гильберта и тензор Папапетру. Сообщение ОИЯИ, Р2-87-683, Дубна, 1987.
5. Черников Н.А. Необходимый объект в ОТО - фоновая связность. Препринт ОИЯИ Р2-88-778, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 марта 1989 года.

*В отличие от Эйнштейна, современные авторы не берут этот термин в кавычки.