89-198

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-198

В.В.Курышкин*, Э.Э.Энтральго

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ И СТРУКТУРНО-ТОЧЕЧНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Направлено в журнал "Il Nuovo Cimento A"

*Университет дружбы народов им.П.Лумумбы,Москва

1989

Введение

Попытки построения классической теории для точечной частицы со спином предпринимались многими исследователями. При этом для построения классической модели спина были апробированы различные методы, относящиеся в основном к трем направлениям.

Первое направление берет начало с известной работы Шредингера [I], вскрывшей осциллирующее движение (**"zitterbewegung"**) свободной дираковской частицы. Аналогичный эффект (**"trembling motion"**) впоследствии был продемонстрирован и для других объектов, описываемых в квантовой механике многокомпонентными волновыми функциями. По мнению многих авторов (см., например, [2-5]), **"zitterbewegung"** отражает неточечность релятивистской частицы, что математически выражается в существовании двух координат, $\vec{q}(t)$ (траектория центра масс) и $\vec{Q}(t)$ (траектория центра заряда), связанных между собой быстроосциллирующей величиной $\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{Q}$. Величина $\vec{\xi}$ совместно с $\dot{\vec{\xi}}$ входит в определение спина частицы. Идея двух координат послужила основой построения различного рода билокальных теорий для классического объекта со спином (**"bilocal rotator"**, **"relativistic oscillator"**, **"bilocal stochastic oscillator"**, **"dequantized spin-particle"**, **"bilocal extended object"** и т.п., см., например, [6-I0]).

Второе направление так или иначе связано с разработками Френкеля [II] представления о частице как о малом протяженном объекте, имеющем некоторое объемное распределение массы $\rho_m(\vec{\xi})$ и заряда $\rho_e(\vec{\xi})$, где $\vec{\xi}$ - отклонение от центра масс. В предположении о внутреннем движении такой объект обладает, естественно, собственными механическим и магнитным моментами. Идея протяженности послужила основой для построения ряда классических теорий частицы со спином, имеющим физический смысл собственного механического момента (**"microscopic rotator"**, **"extended object"** и т.п., см., например, [I0-I3]).

Наконец, третье направление основано на предположении о существовании у точечного объекта физических переменных ξ_k, $k \in \overline{1,n}$, подчиняющихся алгебре Грассмана. Грассмановы переменные позволяют построить билинейную конструкцию, обладающую необходимыми математическими свойствами, отождествить ее с классическим спином и провести построение соответствующей классической теории ("**object with the Grassmann variables**", см., например, [I4-I5]).

Существенно отметить, что все направления, связанные с классической реализацией понятия спина, предполагают существование "скрытых" от непосредственного наблюдения ("**inner**", "**intrinsic**", "**internal**", "**microscopic**" и т.п., см. [6-I5]) переменных. Эти "ненаблюдаемые" переменные включаются, наряду со спином, в математический формализм предлагаемых классических теорий, что весьма затрудняет их анализ и адекватную экспериментальную проверку.

Кроме того, ни одна из упомянутых выше конкретных моделей не может претендовать на роль классической теории точечной частицы со спином. Так, в моделях первых двух направлений объект не является точечным, а в моделях третьего направления объект, оставаясь точечным, обладает некоммутирующими переменными и теория лишь формально может быть названа классической.

В настоящей работе обсуждается еще одна модель классического объекта со спином, относящаяся фактически ко второму направлению, но отличающаяся от соответствующих ему известных моделей тем, что здесь спин, собственный механический момент и собственный магнитный момент суть не пропорциональные друг другу величины.

Обсуждаемая модель базируется на введенном в работах [I6-I8] понятии структурно-точечного объекта и при соответствующих предположениях позволяет построить классическую теорию точечной частицы со спином, не содержащую "ненаблюдаемых" независимых переменных.

I. Структурно-точечный объект в приближении 2-го порядка

Следуя работам [I6-I8], рассмотрим скопление точечных частиц с массами m_κ, зарядами e_κ, координатами $\vec{q}_\kappa$ и кинетическими импульсами $\vec{p}_\kappa = m_\kappa \dot{\vec{q}}_\kappa$. Пусть рассматриваемое скопление находится во внешнем гравитационном, электрическом и магнитном стационарном поле с потенциалами $\Phi(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ и, соответственно, напряженностями

$$\vec{G} = -\nabla\Phi, \qquad \vec{\mathcal{E}} = -\nabla\varphi, \qquad \vec{\mathcal{H}} = [\nabla\times\vec{A}] \tag{I}$$

и обладает внутренней потенциальной энергией W, зависящей только от взаимного расположения составляющих его частиц. Тогда

$$H = \sum_\kappa \left(\frac{1}{2m_\kappa}\vec{p}_\kappa^{\,2} + m_\kappa\Phi(\vec{q}_\kappa) + e_\kappa\varphi(\vec{q}_\kappa) \right) + W(\ldots,\vec{q}_\kappa-\vec{q}_n,\ldots) \tag{2}$$

есть полная энергия скопления.

Выражение (2) может рассматриваться как функция Гамильтона в терминах координат и кинетических импульсов, т.е. справедлив (подробнее см. [I9]) гамильтонов формализм со скобкой Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$, явно зависящей от напряженности магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}$, а именно:

$$\dot{X} = \{H, X\} \qquad \text{для любых} \qquad X = X(\ldots, \vec{q}_\kappa, \ldots, \vec{p}_\kappa, \ldots), \quad (3а)$$

$$\{X, Y\} = \sum_\kappa \left(\frac{\partial X}{\partial p_{\kappa\alpha}} \frac{\partial Y}{\partial q_{\kappa\alpha}} - \frac{\partial X}{\partial q_{\kappa\alpha}} \frac{\partial Y}{\partial p_{\kappa\alpha}} - \frac{e_\kappa}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_\alpha(\vec{q}_\kappa) \frac{\partial X}{\partial p_{\kappa\beta}} \frac{\partial Y}{\partial p_{\kappa\gamma}} \right). \quad (3б)$$

Здесь и далее $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный полностью антисимметричный тензор, под повторяющимися индексами $\alpha, \beta, \ldots = 1,2,3$ компонент трехмерных векторов подразумевается суммирование.

Предположим теперь, что взаимодействие W в (2) таково, что в силу эволюции (3) выполняется условие удержания:

$$|\vec{q}_\kappa(t) - \vec{q}_n(t)| \leq \ell_o , \qquad \text{если} \qquad |\vec{q}_\kappa(t_o) - \vec{q}_n(t_o)| \leq \ell_o , \quad (4)$$

для любых κ, n, t_o и $t > t_o$, где ℓ_o – малый, недоступный непосредственному экспериментальному наблюдению интервал расстояния ("Специфичность"потенциала W детально обсуждается в работах [I6,I7]).

При выполненном условии (4) с точки зрения экспериментальных наблюдений рассматриваемое скопление точечных частиц само является точечным объектом, характеризующимся в любой момент t лишь одной координатой $\vec{q}(t)$, в качестве которой может быть выбрана координата центра масс (или любая другая координата внутри скопления, так как экспериментально они неразличимы).

Следуя работам [I6,I7], физический объект конечной массы и конечного заряда, представляющий собой скопление точечных частиц, эволюционирующее во внешних полях (I) в соответствии с законами (2)-(4), будем называть структурно-точечным объектом.

К экспериментально наблюдаемым характеристикам структурно-точечного объекта в первую очередь следует отнести величины, характеризующие его как материальную точку: масса m, заряд e, координата $\vec{q}$ (координата центра масс скопления), импульс $\vec{p}$:

$$m = \sum_\kappa m_\kappa , \qquad e = \sum_\kappa e_\kappa , \qquad \vec{q} = \frac{1}{m} \sum_\kappa m_\kappa \vec{q}_\kappa , \qquad \vec{p} = \sum_\kappa \vec{p}_\kappa . \quad (5)$$

Совокупность точечных характеристик (5) может быть дополнена структурными (неточечными, или интегральными, см. [I6-I8]) характеристиками: собственные дипольный электрический $\vec{d}$, механический $\vec{\zeta}$ и магнитный $\vec{\mu}$ моменты:

$$\vec{d} = \sum_{\kappa} e_\kappa \vec{\xi}_\kappa , \qquad \vec{S} = \sum_{\kappa} m_\kappa [\vec{\xi}_\kappa \times \dot{\vec{\xi}}_\kappa] , \qquad \vec{\mu} = \sum_{\kappa} \frac{e_\kappa}{2c} [\vec{\xi}_\kappa \times \dot{\vec{\xi}}_\kappa] . \quad (6)$$

В (6) и далее используются обозначения (экспериментально не наблюдаемые в силу (4) отклонения координат и скоростей частиц скопления от координаты и скорости его центра масс):

$$\vec{\xi}_\kappa = \vec{q}_\kappa - \vec{q} , \qquad \dot{\vec{\xi}}_\kappa = \dot{\vec{q}}_\kappa - \dot{\vec{q}} = \frac{1}{m_\kappa}\left(\vec{p}_\kappa - \frac{m_\kappa}{m}\vec{p}\right) . \quad (7)$$

Для построения теории структурно-точечного объекта в терминах наблюдаемых (5),(6),... естественно использовать малость параметра ℓ_0, поскольку в силу (4) и (7) $|\xi_{\kappa\alpha}(t)| \le \ell_0$ для любых κ, α и t. При этом возможны [16–18] различные приближения по порядку малости ℓ_0.

В частности, в приближении 2-го порядка для энергии H и траектории $\vec{q}(t)$ структурно-точечного объекта из (1)–(7) имеем

$$H = \frac{1}{2m} p_\alpha p_\alpha + \tau + m\Phi + e\varphi - A_{\alpha\beta} G_{\beta,\alpha} - d_\alpha \mathcal{E}_\alpha - B_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\beta,\alpha} + W , \quad (8)$$

$$\dot{q}_\alpha = \frac{1}{m} p_\alpha , \quad (9a)$$

$$\dot{p}_\alpha = m G_\alpha + e\mathcal{E}_\alpha + d_\beta \mathcal{E}_{\beta,\alpha} + \mu_\beta \mathcal{H}_{\beta,\alpha} + A_{\beta\gamma} G_{\alpha,\beta,\gamma} +$$
$$+ B_{\beta\gamma} \mathcal{E}_{\alpha,\beta,\gamma} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Big[\frac{e}{mc} p_\beta \mathcal{H}_\gamma + \frac{1}{c} f_\beta \mathcal{H}_\gamma +$$
$$+ \left(\frac{1}{mc} p_\beta d_\lambda + C_{\beta\lambda}\right) \mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + \left(\frac{1}{mc} p_\beta B_{\lambda\nu} + D_{\lambda\nu\beta}\right) \mathcal{H}_{\gamma,\lambda,\nu} \Big] . \quad (9б)$$

Здесь и далее все поля записываются как функции от $\vec{q}$, индекс $,\alpha$ означает частную производную по q_α.

В соотношениях (8) и (9б) в дополнение к (6) появились новые структурные характеристики: внутренние кинетическая τ и потенциальная W энергии, скорость $\vec{f}$ изменения дипольного момента:

$$\tau = \sum_{\kappa} \frac{1}{2m_\kappa} \dot{\vec{\xi}}_\kappa^{\,2} , \qquad W = W_0 + \sum_{\kappa,n} \omega^{\kappa n}_{\alpha\beta} \xi_{\kappa\alpha} \xi_{n\beta} , \qquad \vec{f} = \sum_{\kappa} e_\kappa \dot{\vec{\xi}}_\kappa , \quad (10)$$

а также величины, связанные с квадрупольными и тороидными (см., например, [20]) моментами:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{\kappa} \frac{m_\kappa}{2} \xi_{\kappa\alpha} \xi_{\kappa\beta} , \qquad B_{\alpha\beta} = \sum_{\kappa} \frac{e_\kappa}{2} \xi_{\kappa\alpha} \xi_{\kappa\beta} , \quad (11a)$$

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\kappa} \frac{e_\kappa}{2c} \left(\xi_{\kappa\alpha} \dot{\xi}_{\kappa\beta} + \xi_{\kappa\beta} \dot{\xi}_{\kappa\alpha}\right) , \qquad D_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\kappa} \frac{e_\kappa}{2c} \xi_{\kappa\alpha} \xi_{\kappa\beta} \dot{\xi}_{\kappa\gamma} . \quad (11б)$$

Уравнения (9) для траектории должны быть дополнены уравнениями для структурных характеристик, которые можно записать, используя определения (6),(I0)-(II), обозначения (5),(7) и соотношения (I)-(3):

$$\dot d_\alpha = f_\alpha , \tag{I2а}$$

$$\dot f_\alpha = d_\beta G_{\alpha,\beta} + \left(B_{\beta\gamma} - \frac{e}{m}A_{\beta\gamma}\right) G_{\alpha,\beta,\gamma} + lc^2 \mathcal{E}_\alpha + d^{(1)}_\beta \mathcal{E}_{\alpha,\beta} + B^{(1)}_{\beta\gamma}\mathcal{E}_{\alpha,\beta,\gamma} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big[\frac{1}{mc}p_\beta\left(lc^2\mathcal{H}_\gamma + d^{(1)}_\lambda \mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + B^{(1)}_{\lambda\nu}\mathcal{H}_{\gamma,\lambda,\nu}\right) + \frac{1}{c} f^{(1)}_\beta \mathcal{H}_\gamma + E^{(1)}_{\lambda\beta}\mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + D^{(1)}_{\lambda\nu\beta}\mathcal{H}_{\gamma,\lambda,\nu}\Big] - M_\alpha , \tag{I2б}$$

$$\dot s_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big[2A_{\beta\lambda}G_{\gamma,\lambda} + d_\beta \mathcal{E}_\gamma + 2B_{\beta\lambda}\mathcal{E}_{\gamma,\lambda} - N_{\beta\gamma} + \varepsilon_{\gamma\lambda\nu}\left(\frac{1}{mc}d_\beta p_\lambda \mathcal{H}_\nu + \frac{2}{mc}B_{\beta\mu}p_\lambda\mathcal{H}_{\nu,\mu} + E_{\beta\lambda}\mathcal{H}_\nu + 2D_{\beta\mu\lambda}\mathcal{H}_{\nu,\mu}\right)\Big] \tag{I2в}$$

и так далее. Однако при этом возникают новые структурные характеристики, физический смысл которых в большинстве случаев неясен. Так, например, в уравнении (I2б) появилась положительная постоянная l размерности длины:

$$l = \frac{1}{c^2}\sum_k e_k z_k = \frac{1}{c^2}\sum_k m_k z_k^2 > 0, \qquad z_k = \left(\frac{e_k}{m_k} - \frac{e}{m}\right), \tag{I3}$$

и множество новых структурных характеристик:

$$d^{(1)}_\alpha = \sum_k e_k z_k \xi_{k\alpha} , \qquad E_{\alpha\beta} = \sum_k \frac{e_k}{c}\xi_{k\alpha}\dot\xi_{k\beta} , \tag{I4а}$$

$$f^{(1)}_\alpha = \sum_k e_k z_k \dot\xi_{k\alpha} , \qquad D^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_k \frac{e_k}{2c} z_k \xi_{k\alpha}\xi_{k\beta}\dot\xi_{k\gamma} , \tag{I4б}$$

$$E^{(1)}_{\alpha\beta} = \sum_k \frac{e_k}{c} z_k \xi_{k\alpha}\dot\xi_{k\beta} , \qquad N_{\alpha\beta} = \sum_{k,n}\left(\omega^{kn}_{\beta\gamma} + \omega^{nk}_{\gamma\beta}\right)\xi_{k\alpha}\xi_{n\gamma} , \tag{I4в}$$

$$B^{(1)}_{\alpha\beta} = \sum_k \frac{e_k}{2} z_k \xi_{k\alpha}\xi_{k\beta} , \qquad M_\alpha = \sum_{k,n} z_k\left(\omega^{kn}_{\alpha\beta} + \omega^{nk}_{\beta\alpha}\right)\xi_{n\beta} , \tag{I4г}$$

для которых также требуются соответствующие уравнения.

Таким образом, структурно-точечный объект даже в приближении 2-го порядка обладает, наряду с точечными характеристиками m , e , $\vec q$, $\vec p$, бесконечной цепочкой структурных характеристик $\vec d$, $\vec s$, $\vec \mu$, τ , W , ... Соответствующая система уравнений движения также бесконечна.

Поэтому для построения замкнутой теории структурно-точечного объекта с конечным числом независимых переменных и, соответственно, конечным числом уравнений движения требуется самосогласованный и обоснованный обрыв цепочки структурных характеристик.

2. Структурные характеристики, скобки Пуассона и связи

Результаты работ [16-18] показывают возможность определенных связей между структурными характеристиками, что позволяет выдвинуть предположение о множестве a независимых переменных, а именно:

$$a = (a_i\,,\ i \in \overline{1,15}) = (\vec{q}, \vec{p}, \vec{d}, \vec{f}, \vec{s})\,, \tag{15}$$

и искать все остальные физические величины, характеризующие структурно-точечный объект, в виде некоторых функций от a. При этом поиск связей $\vec{\mu} = \vec{\mu}(a)$, $\tau = \tau(a)$, ... может быть основан на анализе системы скобок Пуассона.

Так, записывая величины множества (15) в виде функций от "ненаблюдаемых" переменных $q_{\kappa\alpha}$ и $p_{\kappa\alpha}$ согласно соотношениям (5)-(7),(10) и подставляя их попарно в определение (3б) в приближении 2-го порядка, получим систему скобок Пуассона:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \quad \{q_\alpha, p_\beta\} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad \{q_\alpha, d_\beta\} = \{q_\alpha, f_\beta\} = \{q_\alpha, s_\beta\} = 0, \tag{16а}$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = -\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(e\mathcal{H}_\gamma + d_\lambda \mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + B_{\lambda\nu}\mathcal{H}_{\gamma,\lambda,\nu}), \quad \{p_\alpha, d_\beta\} = 0, \tag{16б}$$

$$\{p_\alpha, f_\beta\} = -\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\ell c^2 \mathcal{H}_\gamma + d_\lambda^{(1)}\mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + B_{\lambda\nu}^{(1)}\mathcal{H}_{\gamma,\lambda,\nu}), \tag{16в}$$

$$\{p_\alpha, s_\beta\} = \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\varepsilon_{\beta\gamma\nu}(d_\nu \mathcal{H}_\lambda + 2B_{\nu\mu}\mathcal{H}_{\lambda,\mu}), \tag{16г}$$

$$\{d_\alpha, d_\beta\} = 0, \quad \{d_\alpha, f_\beta\} = -\ell c^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \{d_\alpha, s_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\gamma, \tag{16д}$$

$$\{f_\alpha, f_\beta\} = -\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\ell^{(1)} c^2 \mathcal{H}_\gamma + d_\lambda^{(2)}\mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + B_{\lambda\nu}^{(2)}\mathcal{H}_{\gamma,\lambda,\nu}), \tag{16е}$$

$$\{f_\alpha, s_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_\gamma + \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\varepsilon_{\beta\gamma\nu}(d_\nu^{(1)}\mathcal{H}_\lambda + 2B_{\nu\mu}^{(1)}\mathcal{H}_{\lambda,\mu}), \tag{16ж}$$

$$\{s_\alpha, s_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(s_\gamma + \frac{2}{c}B_{\lambda\gamma}\mathcal{H}_\lambda). \tag{16з}$$

В соотношениях (16), как и следовало ожидать, появились новые структурные характеристики:

$$\ell^{(1)} = \frac{1}{c^2}\sum_{\kappa} e_\kappa z_\kappa^2 , \qquad d_\alpha^{(2)} = \sum_{\kappa} e_\kappa z_\kappa^2 \xi_{\kappa\alpha} , \qquad B_{\alpha\beta}^{(2)} = \sum_{\kappa} \frac{e_\kappa}{2} z_\kappa^2 \xi_{\kappa\alpha}\xi_{\kappa\beta} . \tag{I7}$$

Дальнейшая проблема состоит в установлении функций, выражающих все структурные характеристики из (6), (I0), (II), (I4) и (I7) через независимые переменные (I5).

Основной принцип решения указанной проблемы разработан в [I6-I8] и заключается в следующем.

Для конкретной характеристики X вычисляются согласно формуле (3б) скобки Пуассона $\{X, a_i\}$ со всеми величинами множества (I5). Затем решается задача поиска функции $Y(a)$, такой, чтобы в силу системы скобок Пуассона (I6) оказалось $\{Y(a), a_i\} = \{X, a_i\}$ для всех $a_i \in a$. Если такая функция найдена, то $\{Y(a) - X, a_i\} \equiv 0$. Поскольку a есть (по предположению) множество независимых переменных, то отсюда следует связь $X = X(a) = Y(a) + Const.$.

Отметим, что результат $\{X, a_i\}$ включает в себя не только величины множества $X \vee a$, но и другие структурные характеристики. Поэтому приходится анализировать сразу всю совокупность скобок Пуассона $\{X_j, a_i\}$ с целью установить всю совокупность связей $X_j = X_j(a)$. Соответствующая совокупность, как уже отмечалось выше, бесконечна даже в приближении 2-го порядка по параметру ℓ_0 из условия (4). Поэтому требуется еще по крайней мере один малый параметр.

В работах [I6-I8] предложено считать все z_κ, определенные согласно (I3), малыми, что соответствует близости формфакторов массы и заряда рассматриваемого скопления точечных частиц. В этом случае роль малого параметра играет величина $z = max\{|z_\kappa|\}$ и одновременно постоянная ℓ, так как, по определению (I3), $\ell \leq m z^2/c^2$.

В приближении 2-го порядка по ℓ_0 и одновременно 2-го порядка по z для перечисленных выше структурных характеристик устанавливаются следующие связи (соответствующие довольно громоздкие выкладки частично приведены в работе [I8]):

$$\ell^{(1)} = \frac{e}{m}\ell , \qquad d_\alpha^{(1)} = \frac{e}{m} d_\alpha , \qquad f_\alpha^{(1)} = \frac{e}{m} f_\alpha , \qquad d_\alpha^{(2)} = 0 , \tag{I8a}$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\varkappa} d_\alpha d_\beta , \qquad B_{\alpha\beta} = \frac{c g_0}{\varkappa} d_\alpha d_\beta , \qquad B_{\alpha\beta}^{(1)} = B_{\alpha\beta}^{(2)} = 0 , \tag{I8б}$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{g_0}{\varkappa}(d_\alpha f_\beta + d_\beta f_\alpha) , \qquad \mu_\alpha = g S_\alpha + \frac{g_0}{\varkappa}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\beta f_\gamma , \tag{I8в}$$

$$W = \frac{\omega^2}{2\varkappa} d_\alpha d_\alpha + W_0 , \qquad N_{\alpha\beta} = \frac{\omega^2}{\varkappa} d_\alpha d_\beta , \qquad M_\alpha = \omega^2 d_\alpha , \tag{I8г}$$

$$E_{\alpha\beta} = g\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma + \frac{2g_0}{\varkappa} d_\alpha f_\beta , \qquad E^{(1)}_{\alpha\beta} = 2cg(g-g_0)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma , \tag{18д}$$

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{cg}{\varkappa}(g-g_0)\left(d_\alpha\varepsilon_{\beta\gamma\lambda} + d_\beta\varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\right)S_\lambda , \qquad D^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} = 0 , \tag{18е}$$

$$\tau = \frac{1}{2\varkappa} f_\alpha f_\alpha - g S_\alpha \mathcal{H}_\alpha - \frac{2cg}{\varkappa}(g-g_0) d_\alpha S_\beta \mathcal{H}_{\beta,\alpha} + \tau_0 . \tag{18ж}$$

В соотношениях (I8) введены обозначения:

$$S_\alpha = s_\alpha - \frac{1}{\varkappa}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\beta f_\gamma , \qquad \varkappa = lc^2, \qquad g_0 = \frac{e}{2mc} . \tag{19}$$

Постоянные $l > 0$, g, $\omega > 0$, τ_0 и W_0, имеющие размерности длины, гиромагнитного фактора, частоты, энергии соответственно и появившиеся в процессе вывода связей (I8) в рассматриваемом приближении остаются неопределенными (так же, как, впрочем, m и e).

3. Уравнения движения структурно-точечного объекта

Связи (I8) замыкают систему уравнений (9),(I2) и систему скобок Пуассона (I6) в том смысле, что теперь в них участвуют только переменные множества (I5).

Так, подставляя выражения (I8) в уравнения (9) и (I2) и сохраняя для удобства записи обозначения (I9), получим

$$\dot q_\alpha = \frac{1}{m} p_\alpha , \tag{20а}$$

$$\dot p_\alpha = m\left(G_\alpha + \frac{e}{m}\mathcal{E}_\alpha\right) + \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{e}{m}p_\beta + f_\beta\right)\mathcal{H}_\gamma + d_\beta \mathcal{E}_{\beta,\alpha} + g S_\beta \mathcal{H}_{\beta,\alpha} +$$
$$+ \frac{1}{mc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(p_\beta + \frac{e}{\varkappa} f_\beta\right) d_\lambda \mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + \frac{1}{2\varkappa} d_\beta d_\gamma \left(G_\alpha + \frac{e}{m}\mathcal{E}_\alpha\right)_{,\beta,\gamma} +$$
$$+ \frac{g_0}{m\varkappa}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\beta d_\lambda d_\nu \mathcal{H}_{\gamma,\lambda,\nu} + \frac{2cg}{\varkappa}(g-g_0) d_\beta S_\gamma \mathcal{H}_{\gamma,\beta,\alpha} , \tag{20б}$$

$$\dot d_\alpha = f_\alpha , \tag{20в}$$

$$\dot f_\alpha = \varkappa \mathcal{E}_\alpha + \frac{\varkappa}{mc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(p_\beta + \frac{e}{\varkappa} f_\beta\right)\mathcal{H}_\gamma + d_\beta\left(G_\beta + \frac{e}{m}\mathcal{E}_\beta\right)_{,\alpha} +$$
$$+ \frac{2g_0}{m}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\beta d_\lambda \mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + 2cg(g-g_0) S_\beta \mathcal{H}_{\beta,\alpha} - \omega^2 d_\alpha , \tag{20г}$$

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Big\{ d_\beta \mathcal{E}_\gamma + g S_\beta \mathcal{H}_\gamma + \frac{1}{\varkappa} d_\beta d_\lambda \left(G_\gamma + \frac{e}{m}\mathcal{E}_\gamma\right)_{,\lambda} +$$

$$+ \frac{1}{mc} \varepsilon_{\gamma\lambda\nu} d_\beta \left[\left(p_\lambda + \frac{e}{\varkappa} f_\lambda\right)\mathcal{H}_\nu + \frac{e}{m\varkappa} d_\mu p_\lambda \mathcal{H}_{\nu,\mu} \right] +$$

$$+ \frac{2cq}{\varkappa}(g-g_0)\left(d_\beta S_\lambda \mathcal{H}_{\lambda,\gamma} - d_\lambda S_\gamma \mathcal{H}_{\beta,\lambda}\right) \Big\} . \qquad (20д)$$

Совокупность соотношений (20) представляет собой систему уравнений движения структурно-точечного объекта в приближении 2-го порядка во внешних стационарных полях. Система (20) позволяет однозначно установить значения независимых переменных $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{s}$ в любой момент $t > t_o$, если их значения известны для момента t_o.

Используя связи (I8), из выражения (8) для энергии имеем

$$H = \frac{1}{2m} p_\alpha p_\alpha + m\Phi + e\varphi - d_\alpha \mathcal{E}_\alpha - \frac{1}{2\varkappa} d_\alpha d_\beta \left(G_\beta + \frac{e}{m}\mathcal{E}_\beta\right)_{,\alpha} -$$

$$- g S_\alpha \mathcal{H}_\alpha - \frac{2cq}{\varkappa}(g-g_0) d_\alpha S_\beta \mathcal{H}_{\beta,\alpha} + \frac{1}{2\varkappa}\left(f_\alpha f_\alpha + \omega^2 d_\alpha d_\alpha\right) + H_o , \qquad (2I)$$

где $H_o = T_o + W_o = Const.$. Дифференцируя выражение (2I) по времени в силу системы (20) получим

$$\dot{H} \equiv 0, \qquad H = Const. , \qquad (22)$$

т.е. энергия структурно-точечного объекта в произвольных внешних стационарных полях является интегралом движения.

4. Спин как классическое понятие

Фигурирующая в уравнениях движения (20) и в выражении для энергии (2I) конструкция $\vec{S}$, определенная через независимые переменные $\vec{d}$, $\vec{f}$ и $\vec{s}$ соотношением (I9), имеет нетривиальный физический смысл, так как оказывается связанной с еще одним интегралом движения. Так, дифференцируя $\vec{S}$ по времени, в силу уравнений (20в,г,д) имеем

$$\dot{S}_\alpha = \dot{s}_\alpha - \frac{1}{\varkappa}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\beta \dot{f}_\gamma = g\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\beta \left(\mathcal{H}_\gamma + \frac{2c}{\varkappa}(g-g_0) d_\lambda \mathcal{H}_{\gamma,\lambda}\right). \qquad (23)$$

Из (23) следует: во-первых, $\vec{S} = Const.$ в отсутствие магнитного поля, во-вторых, $\vec{S}^2$ есть интеграл движения в произвольных стационарных полях:

$$\dot{\vec{S}}^2 = 2 S_\alpha \dot{S}_\alpha \equiv 0, \qquad \vec{S}^2 = Const. \qquad (24)$$

Таким образом, величина $\vec{S}$ есть именно та физическая характеристика структурно-точечного объекта, которая согласно установившейся в современной физике системе понятий должна быть отождествлена со спином ($\vec{S}$ имеет размерность механического момента, $g\vec{S}\vec{\mathcal{H}}$ есть вклад в энергию в однородном магнитном поле, $\vec{S}^2$ сохраняется).

Существенно, что согласно (18в) и (19) спин $\vec{S}$ в общем случае не совпадает с собственным механическим моментом $\vec{\varsigma}$ и не пропорционален собственному магнитному моменту $\vec{\mu}$.

В конкретных приложениях удобно перейти от набора a независимых переменных (15) к новому набору $a' = (\vec{q}, \vec{p}, \vec{d}, \vec{f}, \vec{S})$. Такой переход возможен в силу однозначной (при фиксированных $\vec{d}$ и $\vec{f}$) связи (19) между $\vec{\varsigma}$ и $\vec{S}$. При этом в системе (20) достаточно заменить уравнение (20д) на более компактное уравнение (23).

Для новых переменных из соотношений (16) при связях (18),(19) следует система скобок Пуассона:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \{q_\alpha, d_\beta\} = \{q_\alpha, f_\beta\} = \{p_\alpha, d_\beta\} = \{d_\alpha, d_\beta\} = 0, \qquad (25а)$$

$$\{q_\alpha, p_\beta\} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad \{d_\alpha, f_\beta\} = -\varkappa\delta_{\alpha\beta}, \quad \{f_\alpha, f_\beta\} = -\frac{\varkappa e}{mc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\gamma, \qquad (25б)$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = -\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(e\mathcal{H}_\gamma + d_\lambda \mathcal{H}_{\gamma,\lambda} + \frac{e}{2m\varkappa} d_\lambda d_\nu \mathcal{H}_{\gamma,\lambda,\nu}\right), \qquad (25в)$$

$$\{p_\alpha, f_\beta\} = -\frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\varkappa\mathcal{H}_\gamma + \frac{e}{m} d_\lambda \mathcal{H}_{\gamma,\lambda}\right), \qquad (25г)$$

$$\{S_\alpha, a_i\} = 0, \quad a_i \in (\vec{q}, \vec{p}, \vec{d}, \vec{f}); \quad \{S_\alpha, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma . \qquad (25д)$$

Соотношения (25) показывают, что величина $\vec{S}$ (в отличие от моментов $\vec{\varsigma}$ и $\vec{\mu}$) образует, как это и требуется для спина, самостоятельную подалгебру момента.

5. Классическая теория точечной частицы со спином

Проведенное в предыдущих параграфах исследование физических характеристик и законов эволюции структурно-точечного объекта в приближении 2-го порядка позволяет сформулировать феноменологическую классическую теорию точечной частицы со спином. Такая теория заключается в следующих положениях:

1. Постоянные характеристики частицы: масса $m>0$, заряд e, гиромагнитный фактор g, характеристическая длина $\ell>0$, характеристическая частота $\omega>0$.

2. Независимые переменные: координата $\vec{q}$, кинетический импульс $\vec{p}$, дипольный электрический момент $\vec{d}$, скорость его изменения $\vec{f}$, спин $\vec{S}$.

3. Уравнения движения в стационарном гравитационном, электрическом и магнитном поле с напряженностями $\vec{G}$, $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ соответственно (поля и их производные берутся в точке $\vec{q}$):

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{m}\vec{p}\,, \tag{26а}$$

$$\dot{\vec{p}} = m\vec{G} + e\vec{\mathcal{E}} + \frac{e}{mc}[\vec{p}\times\vec{\mathcal{H}}] + \frac{1}{c}[\vec{f}\times\vec{\mathcal{H}}] + \nabla(\vec{d}\vec{\mathcal{E}} + g\vec{S}\vec{\mathcal{H}}) +$$
$$+\frac{1}{mc}(\vec{d}\nabla)\Big\{[\vec{p}\times\vec{\mathcal{H}}] + \frac{e}{\ell c^2}[\vec{f}\times\vec{\mathcal{H}}] + \frac{2gm}{\ell}\Big(g-\frac{e}{2mc}\Big)\nabla\vec{S}\vec{\mathcal{H}}\Big\} +$$
$$+\frac{1}{2m\ell c^2}(\vec{d}\nabla)(\vec{d}\nabla)\Big\{m\vec{G} + e\vec{\mathcal{E}} + \frac{e}{mc}[\vec{p}\times\vec{\mathcal{H}}]\Big\}\,, \tag{26б}$$

$$\dot{\vec{d}} = \vec{f}\,, \tag{26в}$$

$$\dot{\vec{f}} = -\omega^2\vec{d} + \ell c^2\vec{\mathcal{E}} + \frac{\ell c}{m}[\vec{p}\times\vec{\mathcal{H}}] + \frac{e}{mc}[\vec{f}\times\vec{\mathcal{H}}] + \frac{e}{m^2c}(\vec{d}\nabla)[\vec{p}\times\vec{\mathcal{H}}] +$$
$$+\nabla\Big\{\vec{d}\vec{G} + \frac{e}{m}\vec{d}\vec{\mathcal{E}} + 2cg\Big(g-\frac{e}{2mc}\Big)\vec{S}\vec{\mathcal{H}}\Big\}\,, \tag{26г}$$

$$\dot{\vec{S}} = g\Big[\vec{S}\times\Big\{\vec{\mathcal{H}} + \frac{2}{\ell c}\Big(g-\frac{e}{2mc}\Big)(\vec{d}\nabla)\vec{\mathcal{H}}\Big\}\Big]\,. \tag{26д}$$

4. Прочие физические характеристики и связи: собственный $\vec{s}$, орбитальный $\vec{L}$ и полный $\vec{J}$ механические моменты:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}\,, \qquad \vec{L} = [\vec{q}\times\vec{p}]\,, \qquad \vec{s} = \vec{S} + \frac{1}{\ell c^2}[\vec{d}\times\vec{f}]\,, \tag{27}$$

собственный магнитный момент $\vec{\mu}$:

$$\vec{\mu} = g\vec{S} + \frac{e}{2m\ell c^3}[\vec{d}\times\vec{f}] = g\vec{s} - \frac{1}{\ell c^2}\Big(g-\frac{e}{2mc}\Big)[\vec{d}\times\vec{f}]\,, \tag{28}$$

полная энергия H (с точностью до постоянной отсчета):

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + m\Phi + e\varphi + \frac{1}{2\ell c^2}(\vec{f}^{\,2} + \omega^2\vec{d}^{\,2}) - \vec{d}\vec{\mathcal{E}} - g\vec{S}\vec{\mathcal{H}} -$$

$$-\frac{1}{2lc^2}(\vec{d}\nabla)\left\{\vec{d}\vec{G}+\frac{e}{m}\vec{d}\vec{\mathscr{E}}+4qc\left(q-\frac{e}{2mc}\right)\vec{S}\vec{\mathscr{H}}\right\}. \qquad (29)$$

Здесь Φ и φ есть потенциалы гравитационного и электрического поля соответственно.

5. Безусловные законы сохранения:

$$H = Const., \qquad \vec{S}^2 = Const. \qquad (30)$$

Сформулированные выше положения определяют замкнутую классическую теорию точечной частицы массы m и заряда e, движущейся во внешних полях по непрерывной дифференцируемой траектории $\vec{q}(t)$ и обладающей, в отличие от обычной заряженной материальной точки, характеристиками, присущими неточечному объекту - постоянные q, l, ω, спин $\vec{S}$, моменты $\vec{d}$, $\vec{s}$, $\vec{\mu}$ и т.п.

Траектория $\vec{q}(t)$ и значения переменных $\vec{S}(t)$, $\vec{d}(t)$, ... для времен $t > t_0$ однозначно определяются системой уравнений движения (26) по известным значениям $\vec{q}_0$, $\vec{p}_0$, $\vec{d}_0$, $\vec{f}_0$, $\vec{S}_0$ независимых переменных в момент времени t_0.

Градиентная инвариантность теории очевидна.

Принцип преемственности выполняется, так как при исчезающе малых $\vec{d}$, $\vec{f}$ и $\vec{S}$ (по построению это величины I-го порядка малости) соотношения (26)-(30) определяют классическую теорию заряженной материальной точки.

6. Некоторые предварительные выводы

Сформулированная в предыдущем разделе классическая теория точечной частицы со спином существенно отличается от предлагавшихся ранее моделей (см. введение) следующими положениями.

Во-первых, теория предполагает, что точечная частица со спином обладает ненулевым дипольным электрическим моментом даже при $e = 0$ (если $\vec{d} \equiv 0$, из (18г) следует $W \equiv Const.$ и условие удержания (4) не может быть выполнено).

Во-вторых, теория не содержит принципиально "ненаблюдаемых" переменных и все входящие в нее величины имеют четкий физический смысл.

В частности, теория предлагает классическую модель спина $\vec{S}$ (соотношения (27) и (28)) как конструкцию известных и вполне понятных физических величин ($\vec{d}$, $\vec{f}$ и $\vec{s}$ либо $\vec{d}$, $\vec{f}$ и $\vec{\mu}$), определяющую вклад однородного магнитного поля в энергию (29) и специфический безусловный закон сохранения (30).

Некоторую неясность вызывает лишь физический смысл появившихся, в дополнение к привычным для точечной частицы постоянным m и e, еще трех постоянных характеристик: g, l и ω. Обсудим их несколько подробнее, используя для этого простейшие частные примеры.

Стандартная интерпретация гиромагнитного фактора g следует из вклада $g\vec{S}\vec{H}$ однородного магнитного поля в энергию частицы. Именно этот фактор измеряется экспериментально. Следует лишь отметить, что фактор g здесь не является коэффициентом пропорциональности между $\vec{s}$ и $\vec{\mu}$, так как согласно (28) величины $\vec{s}$, $\vec{\mu}$ и $\vec{S}$ суть различные, не пропорциональные друг другу характеристики.

Рассматривая свободную частицу из уравнений (26) при $t_0=0$, имеем

$$\vec{q}=\frac{1}{m}\vec{p}_0 t+\vec{q}_0, \qquad \vec{d}=\vec{d}_0\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\vec{f}_0\sin\omega t, \qquad \vec{S}=\vec{S}_0. \quad (31)$$

Таким образом, характеристическая частота ω есть частота осцилляции или вращения дипольного момента свободной частицы, причем $\langle\vec{d}\rangle=0$.

Рассмотрим еще движение в однородном электрическом поле. При этом из (26), считая $t_0=0$, получим

$$\vec{q}=\frac{e}{2m}\vec{\mathcal{E}}t^2+\frac{1}{m}\vec{p}_0 t+\vec{q}_0, \qquad \vec{S}=\vec{S}_0, \quad (32а)$$

$$\vec{d}=\vec{d}_0\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\vec{f}_0\sin\omega t+\frac{2lc^2}{\omega^2}\vec{\mathcal{E}}\sin^2\frac{\omega t}{2}. \quad (32б)$$

Из (32б) следует, что характеристическая длина l определяет "поляризуемость" частицы, т.е. изменение ее дипольного момента в электрическом поле (при этом $\langle\vec{d}\rangle=lc^2\vec{\mathcal{E}}/\omega^2$). Аналогичного рода эффект появляется и в магнитном поле.

Постоянные m, e, g, l, ω определяются "скрытой" структурой частицы (см. (5), (13) и (18)) и по этой причине не являются независимыми величинами. Поэтому при конкретном исследовании классического описания (26)-(30) следует, по-видимому, использовать оценки

$$l\doteq 4m\left(g-\frac{e}{2mc}\right)^2, \qquad \omega\doteq\frac{2mc^2}{\hbar}. \quad (33)$$

Первая из этих оценок возникает при установлении связей (18) (детали см. в [18]), а вторая- при сравнении частоты осцилляций, присущих свободной точечной частице со спином в классическом описании (26)-(30), с частотой осцилляций, которую содержит "**zitterbewegung**" свободной частицы со спином в квантовой механике (подробнее см. [1-3]).

В связи с оценками (33) интересно отметить, что из всех микрообъектов (элементарных частиц, ядер, атомов,...) с известными m, e и g (см., например, [21]) предельными значениями l и ω обладает электрон (и, естественно, позитрон) - наибольшая характеристическая длина $\ell_e = 2{,}82 \cdot 10^{-13}$см и наименьшая частота $\omega_e = 1{,}55 \cdot 10^{21} c^{-1}$. Для всех остальных микрообъектов $\ell \ll \ell_e$ и $\omega \gg \omega_e$.

Естественно возникает вопрос - какие реальные физические объекты можно было бы рассматривать как точечные частицы со спином на основе классического описания (26)-(30) (непосредственного или проквантованного)?

Для ответа на поставленный вопрос вспомним, что согласно проведенным в настоящей работе построениям точечная частица со спином есть частный случай структурно-точечного объекта, характеризующегося малым "ненаблюдаемым" размером ℓ_o (условие (4)) и "специфическим" взаимодействием W (выражение (2) для энергии), достаточно "сильным" для обеспечения условия удержания (4). Известно, однако, что вплоть до атомных расстояний (порядка 10^{-8}см) подобных "специфических удерживающих" взаимодействий не существует.

Таким образом, под точечными частицами со спином могут подразумеваться, по-видимому, лишь микрообъекты, имеющие размеры меньше размеров атома, т.е. ядра и элементарные частицы, и то лишь при условии, что они обладают ненулевым дипольным электрическим моментом.

Поэтому решение вопроса о правомерности и адекватности описания (26)-(30) остается за экспериментом по поиску эффектов быстроосциллирующего или быстровращающегося дипольного момента у ядер и элементарных частиц (непосредственное измерение значения $\vec{d}$, по-видимому, невозможно, так как за "разумный" экспериментальный интервал времени $\Delta t < 10^{-12}$с дипольный момент совершает более 10^8 осцилляций и фактически измеряется не $\vec{d}$, а $\langle \vec{d} \rangle \doteq 0$).

Литература

1. Schrödinger E. Sitzungsb. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 1930, v.24, p.418-430.
2. Guertin R.F., Guth E. Phys. Rev., 1973, v.D7, p.1057-1068.
3. Barut A.O., Bracken A.J. Phys. Rev., 1981, v.D23, p.2454-2463.
4. Umezawa M. Report CRN/HE 83-08, Inst. Nucl. Phys., University of Strasbourg, 1983, 12 p.
5. Barut A.O., Thacker W.D. Phys. Rev., 1985, v.D31, p.1386-1392.
6. Halbwachs F., Souriau J.M., Vigier J.P. Journ. Phys. Rad., 1961, v.22, p.393-406.
7. Ginzburg V.L., Manko V.I. Nucl. Phys., 1965, v.74, p.577-588.
8. Plahte E. Suppl. Nuovo Cim., 1967, v.5, p.944-953.

9. Petroni N.C., Maric Z., Zivanovic D., Vigier J.P. Journ. Phys., A:Math. Gen., 1981, v.14, p.501-508.
10. Umezawa M. Report CRN/HE 83-09, Inst. Nucl. Phys., University of Strasbourg, 1983, 38 p.
11. Френкель Я.И. Электродинамика. Л.-М.: Гостехиздат, 1934, т.I, с.239-276.
12. Kosowski S. Nuovo Cim., 1977, v.A42, p.33-40.
13. Bohm A., Boya L.J., Kielanowski P., Kmiecik M., Loewe M., Magnollay P. Report CPT 101, University of Texas, Austin, 1987, 29 p.
14. Beresin F.A., Marinov M.S. Ann. Phys., 1977, v.104, p.336-362.
15. Srivastava P.P., Lemos N.A. Phys. Rev., 1977, v.D15, p.3568-3574.
16. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. В сб.:Гравитация и гипотетические взаимодействия. М.: УДН, 1988, с.56-65.
17. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. Сообщение ОИЯИ, Дубна, 1988, Р2-88-878.
18. Энтральго Э.Э. Сообщение ОИЯИ, Дубна, 1988, Р2-88-879.
19. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. Сообщение ОИЯИ, Дубна, 1987, Р4-87-221.
20. Дубовик В.М.,Тосунян Л.А. ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.1193-1228.
21. Радциг А.А., Смирнов Б.М. Справочник по атомной и молекулярной физике. М., Атомиздат, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 марта 1989 года.