сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-183

Н.С.Шавохина

ПРИМЕРЫ АРЕАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ: СИСТЕМА ДВУХ ТЕЛ, СФЕРИЧЕСКАЯ МЕМБРАНА, МИР ДЕ СИТТЕРА

1989

Релятивистские объекты рассматриваются в мире событий Пуанкаре - Минковского. В своем законченном виде релятивистская механика - это механика одной материальной точки. Еще Пуанкаре [1] ввел понятия четырехскорости, четырехускорения и четырехсилы, без которых не обходится ни одна релятивистская теория, если в ней рассматриваются материальные точки. Ему принадлежит также постановка вопроса о необходимости описания взаимодействия двух материальных точек в релятивистской механике. По его мнению, постановка релятивистской задачи двух тел является первым этапом на пути построения моделей релятивистских протяженных объектов конечных размеров. Он же сформулировал и принципы, которым должна удовлетворять релятивистская задача двух тел.

Эти принципы не допускают существования твердого тела в классическом смысле. В работах Борна [2], Герглотца [3] и Нетер [4] дано определение жесткого движения тела в специальной теории относительности. Движение тела, которое является протяженным релятивистским объектом, при этом задается с помощью конгруэнции мировых линий его точек. Салман и Тауб [5] написали уравнения жесткого движения релятивистского тела. При исследовании этих уравнений [6,7] было установлено, что условия жесткости выполняются только в случае прямолинейного неускоренного движения тела.

Рассматриваемые здесь релятивистские протяженные объекты мы называем ареальными, поскольку их действие складывается из весов равномерно нагруженных поверхностей. Подробно рассмотрим два ареальных объекта. Один из них дает представление о движении двух одинаковых материальных точек с постоянной силой притяжения. Другой приводит к представлению о мире де Ситтера.

В работах [8-15] построен пример релятивистской задачи двух тел, удовлетворяющий всем принципам Пуанкаре. В работе [16] построен аналогичный пример релятивистской задачи трех тел, а в [17] - четырех. Существенно, что в задаче трех тел появляется тройное взаимодействие, не сводимое к парным, а в задаче четырех тел - четверное взаимодействие, не сводимое ни к тройным, ни к парным взаимодействиям. В этих примерах действие складывается из весов равномерно нагруженных поверхностей размерности от 1 до 4. Под одномерной поверхностью здесь понимается мировая траектория материальной точки, под четырехмерной - область в мире событий Пуанкаре - Минковского. По двумерным поверхностям передаются парные взаимодействия частиц, по трехмерным - тройные, а по четырехмерной - четверное взаимодействие частиц. Как целое рассматриваемые системы характеризуются четырехвектором энергии-импульса и бивектором момента. Эти характеристики сохраняются, то есть не меняются в процессе движения. Они определяют собственную ось времени - аналог мировой траектории центра масс нерелятивистской системы.

Мы будем выбирать собственную ось времени за ось времени t. Это означает, что мы будем рассматривать покоящиеся как целое системы с центром масс в начале координат x, y, z.

Вначале рассмотрим пример релятивистской задачи двух одинаковых тел с массами покоя m и с силой притяжения G. Положительные константы m и G - это плотности как раз тех самых весов, из которых складывается действие системы. Можно считать, что собственная ось времени системы лежит на двумерной поверхности, по которой передается притяжение частиц. Мировые траектории частиц расположены симметрично относительно собственной оси времени. Этот пример рассмотрен в работах [11-15], однако в них не рассмотрен тензор энергии-импульса системы. Здесь мы восполним этот недостаток. Скорость света c полагаем равной единице.

Мировая поверхность Σ, соединяющая мировые траектории L_1 и L_2 частиц, является двумерной минимальной поверхностью в мире событий Пуанкаре - Минковского. Ее можно записать в виде

$$\vec{x} = \vec{x}(\eta, t) = \frac{1}{2}[\vec{B}(t-\eta) - \vec{B}(t+\eta)], \qquad /1/$$

где параметр η меняется в пределах

$$-\xi(t) \leq \eta \leq \xi(t), \qquad /2/$$

а функция $\vec{B}(t)$ удовлетворяет условию

$$|\dot{\vec{B}}(t)| = 1. \qquad /3/$$

Точкой обозначаем производную по аргументу функции. Предполагаем, что первая квадратичная форма поверхности /1/ регулярна. Она равна

$$dt^2 - d\vec{x}^2 = \cos^2\Delta(\eta, t)\,[dt^2 - d\eta^2], \qquad /4/$$

где

$$\cos 2\Delta(\eta, t) = \dot{\vec{B}}(t-\eta)\,\dot{\vec{B}}(t+\eta). \qquad /5/$$

Условие регулярности означает, что всюду на поверхности /1/ угол Δ заключен в пределах $-\frac{\pi}{2} < \Delta < \frac{\pi}{2}$. При условии /3/ поверхность переноса /1/ становится минимальной. При этом условии сеть переноса $u = t + \eta$, $v = t - \eta$ является изотропной сетью.

Граничные линии $\eta = -\xi(t)$ и $\eta = \xi(t)$ поверхности /1/ рассматриваем как мировые траектории первого и второго тел. Иначе их можно записать в виде $\vec{x} = -\vec{x}(t)$ и $\vec{x} = \vec{x}(t)$, где

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(\xi(t), t) = \frac{1}{2}[\vec{B}(v(t)) - \vec{B}(u(t))], \qquad /6/$$

$$u(t) = t + \xi(t), \qquad v(t) = t - \xi(t). \qquad /7/$$

Импульс второго тела, вычисляемый по формулам релятивистской механики материальной точки, равен

$$\vec{p}(t) = p^{\circ}(t)\,\dot{\vec{x}}(t), \qquad /8/$$

где

$$p^{\circ}(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^{\,2}(t)}} = \frac{m}{\cos\Delta(t)\sqrt{1 - \dot{\xi}^{2}(t)}}, \quad \Delta(t) = \Delta(\xi(t), t), \qquad /9/$$

а импульс первого тела равен $-\vec{p}(t)$. Краевое условие для минимальной поверхности /1/ задаем в виде

$$\vec{p}(t) = \frac{G}{2}[\vec{B}(v(t)) + \vec{B}(u(t))]. \qquad /10/$$

Компоненты тензора энергии-импульса рассматриваемого ареального объекта равны

$$T^{oo} = p^{\circ}(t)[\delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) + \delta(\vec{x} + \vec{x}(t)] + G\int_{-\xi(t)}^{\xi(t)} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\eta, t))\,d\eta,$$

$$T^{ok} = p^{\circ}(t)[\delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) - \delta(\vec{x} + \vec{x}(t))]\dot{x}^{k}(t) +$$

$$+ G\int_{-\xi(t)}^{\xi(t)} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\eta, t))\frac{\partial}{\partial t}x^{k}(\eta, t)\,d\eta = T^{ko},$$

$$T^{k\ell} = p^{\circ}(t)\,[\,\delta(\vec{x}-\vec{x}(t)) - \delta(\vec{x}+\vec{x}(t))]\,\dot{x}^{k}(t)\,\dot{x}^{\ell}(t) +$$

$$+ G \int_{-\xi(t)}^{\xi(t)} \delta(\vec{x}-\vec{x}(\eta,t))\,F^{k\ell}(\eta,t)\,d\eta,$$

где

$$F^{k\ell} = \frac{\partial x^{k}(\eta,t)}{\partial t}\,\frac{\partial x^{\ell}(\eta,t)}{\partial t} - \frac{\partial x^{k}(\eta,t)}{\partial \eta}\,\frac{\partial x^{\ell}(\eta,t)}{\partial \eta}.$$

Можно убедиться, что в силу краевого условия /10/ дивергенция тензора энергии-импульса равна нулю, то есть

$$\frac{\partial T^{oo}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ok}}{\partial x^{k}} = 0, \qquad \frac{\partial T^{ko}}{\partial t} + \frac{\partial T^{k\ell}}{\partial x^{\ell}} = 0. \qquad /11/$$

Теперь рассмотрим в $(N+1)$-мерном мире X_{N+1} Пуанкаре - Минковского с метрикой

$$\eta_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta} = -(dx^{o})^{2} + (dx^{1})^{2} + \ldots + (dx^{N})^{2}, \qquad /12/$$

ареальный объект, действие которого равняется [18]:

$$P \int_{\omega_{N+1}} L\, du^{o}\, du^{1} \ldots du^{N} + Q \int_{\partial\omega_{N+1}} M\, dv^{1} \ldots dv^{N}. \qquad /13/$$

Такой объект состоит из N-мерной арельной материи, движение которой представляется $(N+1)$-мерной мировой областью ω_{N+1} и $(N-1)$-мерной ареальной материи, движение которой представляется боковой границей $\partial\omega_{N+1}$ области ω_{N+1}. Более сосредоточенной материи, и, в частности, самой сосредоточенной - материальных точек - рассматриваемый объект не имеет. Простейший статический образ такого объекта - мыльный пузырь, причем константа P играет роль давления, а константа Q - роль поверхностного натяжения.

В формуле /13/ $u^{o}, u^{1}, \ldots, u^{N}$ - координаты в области ω_{N+1} с положительным якобианом

$$J = \left|\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{\beta}}\right|. \qquad /14/$$

Обозначая $a^{\alpha}_{\beta} = \partial x^{\alpha} / \partial u^{\beta}$, имеем $N+1$ векторов

$$a_o = \{ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{o}} \}, \quad a_1 = \{ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{1}} \}, \quad ..., \quad a_N = \{ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{N}} \} . \qquad /15/$$

Коэффициенты $g_{\mu\nu}$ квадратичной формы /12/ в координатах u^o, u^1, ..., u^{N-1}, u^N равны скалярным произведениям

$$g_{\mu\nu} = (a_{\mu} a_{\nu}) = a^{\alpha}_{\mu} a^{\beta}_{\nu} \eta_{\alpha\beta} . \qquad /16/$$

Лагранжиан L равен

$$L = \sqrt{|g|} = \det | a^{\alpha}_{\beta} | = J . \qquad /17/$$

Он описывает материю Эйнштейна. Докажем, что

$$\frac{\partial}{\partial u^{\beta}} (\frac{\partial J}{\partial a^{\alpha}_{\beta}}) = 0 . \qquad /18/$$

Действительно,

$$\frac{\partial J}{\partial a^{\alpha}_{\beta}} = J \frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} . \qquad /19/$$

Поэтому левая часть равенства /18/ равна

$$\frac{\partial J}{\partial x^{\alpha}} + J \frac{\partial}{\partial u^{\beta}} (\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}) = \frac{\partial J}{\partial x^{\alpha}} + J \frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^{\beta}} \frac{\partial^2 u^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} . \qquad /20/$$

Еще раз обращаясь к равенству /19/, находим

$$\frac{\partial J}{\partial x^{\alpha}} = J \frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} a^{\mu}_{\beta} = -J a^{\mu}_{\beta} \frac{\partial^2 u^{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\mu}} . \qquad /21/$$

Из /20/ и /21/ следует, что первая группа уравнения Лагранжа, а именно - система $(N+1)$ уравнений /18/ выполняется тождественно.

Далее, в формуле /13/ v^1, ..., v^N - параметры на поверхности $\partial\omega_{N+1}$, так что некоторая ее часть задается в виде

$$x^{\alpha} = f^{\alpha}(v^1, ..., v^N) , \quad \alpha = 0, 1, ..., N . \qquad /22/$$

Обозначая $b_k^\alpha = \partial f^\alpha / \partial v^k$, имеем N касательных к поверхности $\partial\omega_{N+1}$ векторов

$$b_1 = \{ \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^1} \}, \ldots, \; b_N = \{ \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^N} \} . \qquad /23/$$

Их скалярные произведения

$$f_{k\ell} = \eta_{\alpha\beta} \; \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^k} \; \frac{\partial f^\beta}{\partial v^\ell} \qquad /24/$$

являются коэффициентами первой квадратичной формы поверхности $\partial\omega_{N+1}$. Лагранжиан M равен

$$M = \sqrt{|f|}, \qquad /25/$$

где f - определитель матрицы ($f_{k\ell}$). Вторая группа уравнений Лагранжа имеет вид

$$Q \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial v^k} \left(\frac{\partial M}{\partial b_k^\alpha} \right) = P \begin{vmatrix} \delta_\alpha^o & \delta_\alpha^1 & \ldots & \delta_\alpha^N \\ b_1^o & b_1^1 & \ldots & b_1^N \\ - - & - - & - - & - - \\ b_N^o & b_N^1 & \ldots & b_N^N \end{vmatrix} , \qquad /26/$$

где δ_β^α - символ Кронекера. Подобно /18/, можно доказать, что в формуле /26/ обе части ортогональны к каждому из векторов /23/, так что из (N+1) уравнений /26/ имеется только одно независимое уравнение.

Вычисляя левую часть в формуле /26/, находим

$$\frac{\partial M}{\partial b_k^\alpha} = \frac{1}{2} M f^{ij} \frac{\partial f_{ij}}{\partial b_k^\alpha} = \eta_{\alpha\nu} M f^{kj} b_j^\nu , \qquad /27/$$

где (f^{ij}) - матрица, обратная матрице /24/. Следовательно, уравнения /26/ приводятся к виду

$$\Box f^{\alpha} = AM^{-1}\begin{vmatrix} \eta^{\alpha o} & \eta^{\alpha 1} & \dots & \eta^{\alpha N} \\ b_1^o & b_1^1 & \dots & b_1^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_N^o & b_N^1 & \dots & b_N^N \end{vmatrix} . \qquad /28/$$

где $\Box f^{\alpha}$ - второй дифференциальный параметр Бельтрами на поверхности $\partial\omega_{N+1}$, константа A равна P/Q, $\eta^{\alpha\beta}$ - тензор, обратный тензору $\eta_{\alpha\beta}$.

В качестве примера рассмотрим времениподобную поверхность вращения

$$x^o = t(r), \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^N)^2} . \qquad /29/$$

Такая поверхность времениподобна, если

$$t'^2 > 1 . \qquad /30/$$

Будем считать, что

$$x^k = v^k, \quad k = 1, \dots, N . \qquad /31/$$

В таком случае

$$b_1 = \{ \frac{x^1}{r} t', 1, \dots, 0 \}, \dots, b_N = \{ \frac{x^N}{r} t', 0, \dots, 1 \},$$

$$f_{k\ell} = \frac{x^k x^\ell}{r^2}(t')^2 - \delta_{k\ell}, \quad M = \sqrt{(t')^2 - 1} , \qquad /32/$$

$$f^{k\ell} = \frac{x^k x^\ell}{r^2} \frac{(t')^2}{(t')^2 - 1} - \delta_{k\ell} .$$

Согласно /28/, при $\alpha = 0$ получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{x^k}{r} \frac{t'}{\sqrt{(t')^2 - 1}}\right) = A . \qquad /33/$$

Следовательно, функция

$$F = \frac{t'}{\sqrt{(t')^2 - 1}} \qquad /34/$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dr}F + \frac{N-1}{r}F = A\,. \qquad /35/$$

Отсюда находим

$$F = \frac{A}{N}r + \frac{B}{r^{N-1}}, \qquad /36/$$

где B - константа интегрирования, так что задача свелась к квадратуре. Действительно, согласно /34/,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{F}{\sqrt{F^2 - 1}}, \qquad /37/$$

а F равно /36/.

Выделяются два случая $A = 0$ и $B = 0$. В первом случае нет материи Эйнштейна, а поверхность /29/ является минимальной поверхностью в мире в пространстве с метрикой /12/. Такие поверхности при $N > 2$ будем называть сферическими мембранами, а при $N = 2$ - кольцевидными струнами. Все дело сводится к интегралу

$$y = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1 - s^{2(N-1)}}}\,. \qquad /38/$$

Впервые кольцевидную струну рассмотрели Н.А.Черников и Б.М.Барбашов в работе [19]. При $N = 2$ интеграл /38/ дает синусоиду, а при $N = 3$ - лемнискатную функцию [20]. В случае $B = 0$ получается однополостной гиперболоид

$$r^2 - t^2 = \frac{N^2}{A^2}, \qquad /39/$$

иначе говоря, N-мерный мир де Ситтера.

Итак, из принципа наименьшего действия следует, что в метрическом пространстве-времени могут существовать и эволюционировать протяженные релятивистские структуры конечных размеров в виде Вселенной де Ситтера и сферических мембран. При этом радиус Вселенной де Ситтера зависит от размерности пространства-времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. Избранные труды. - М.: Наука, 1974, с.433-486, 487-520.
2. Born M. - Ann.Physik, 1909, 30, p.1.

3. Gerglotz G. - Ann.Physic, 1910, 31, p.393.
4. Noether F. - Ann.Physic., 1910, 31, p.919.
5. Salzman G., Gaub A. - Phys.Rev., 1954, 95, p.1659.
6. Синг Дж. - Общая теория относительности. - М.: ИИЛ, 1963.
7. Евтушенко С.П. - В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1970, с.34.
8. Черников Н.А., Шавохина Н.С. - ТМФ, 1980, т.42, № 1, с.59.
9. Черников Н.А., Шавохина Н.С. - ТМФ, 1980, т.43, № 3, с.356.
10. Шавохина Н.С. - Препринт ОИЯИ, Р2-80-419, Дубна, 1980; Изв.вузов, физика, 1981, № 7, с.91.
11. Шавохина Н.С. - Препринт ОИЯИ, Р2-82-222, Дубна, 1982; ДАН СССР, 1983, т.265, № 4, с.852.
12. Шавохина Н.С. - Препринт ОИЯИ Р2-82-157, Дубна, 1982; Изв.вузов, физика, 1982, № 7, с.66.
13. Шавохина Н.С. - Препринт ОИЯИ, Р2-83-52, Дубна, 1983; Изв.вузов, физика, 1983, № 7, с.46.
14. Шавохина Н.С. - Препринт ОИЯИ Р2-82-231, Дубна, 1984; Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып.15. М.: Энергоатомиздат, 1985, с.141.
15. Шавохина Н.С. - Препринт ОИЯИ Р2-85-183, Дубна, 1985; Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып.17. М.: Энергоатомиздат, 1986, с.187.
16. Шавохина Н.С. - Препринт ОИЯИ Р2-84167, Дубна, 1984. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып.16. М.: Энергоатомиздат, 1985, с.189.
17. Шавохина Н.С. - Сообщение ОИЯИ, Р2-87-391, 1987.
18. Шавохина Н.С. - Труды VIII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ, Д2-87-798, Дубна, 1987, с.246.
19. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.И. - Курс современного анализа. М.: ГТТИ, 1934.
20. Барбашов Б.М., Черников Н.А. - Классическая динамика релятивистской струны. - Препринт ОИЯИ Р2-7852, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1989 года.