сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-89-182

Н.А.Черников

ПРОБЛЕМА ЭНЕРГИИ В ОТО И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

1989

1. К ИСТОРИИ ВОПРОСА

В эйнштейновой теории гравитации (ЭТГ) из-за того, что был потерян тензор аффинной деформации, на протяжении семидесяти лет оставалась нерешенной проблема энергии гравитационного поля.

В 1963 году мне советовал заняться этой проблемой Д.И.Блохинцев, полагая, что методы, развитые в защищенной мною тогда диссертации на соискание доктора физико-математических наук, помогут найти ключ к решению проблемы. В диссертации рассмотрено поведение газа Больцмана в условиях общей теории относительности (ОТО). Результаты диссертации, близкие к проблеме энергии, опубликованы в[1-9]. Совет мне пришелся по душе, ибо в намеченной мною для себя программе исследований стоял вопрос о нерелятивистском предельном переходе в ОТО, где уже тогда вырисовывалась для меня необходимость введения двух связностей.

В то время ближе всех к решению проблемы стояли В.А.Фок[10-11], Н.Розен[12-13] и А.Папапетру[14]. Основная идея в этих работах - "погружение" гравитационного поля в мир Минковского, основной метод - биметрический формализм. Эта идея была поддержана Эйнштейном[15-16] и Паули[16]. Однако по этому поводу Эйнштейн не сослался даже на своего ученика Н.Розена. Это можно объяснить, вероятно, тем, что уже в работах[17-18] по слабому гравитационному полю он сам фактически выдвигал идею о погружении. Что до метода, то и биметрический формализм уже был известен, и не только математикам, но и физикам[19], а в теории слабого гравитационного поля наличие двух метрик очевидно.

Обсудив проблему с Д.И.Блохинцевым, а также и с А.З.Петровым, я пришел тогда к выводу, что в работах[10-14] на базе ОТО сформулирована теория островной системы, но возможности ОТО этим отнюдь не исчерпываются. Наряду с проблемой энергии в ОТО мне представлялись интересными вопросы применения геометрии Лобачевского к ОТО[20-24], вопросы согласования квантовой теории с ОТО[25-26], вопросы единой теории поля Эйнштейна[27], а также и вышеупомянутый вопрос о нерелятивистском предельном переходе[20-24].

Спокойный ход моей работы был прерван в связи с дискуссией, начатой А.А.Логуновым с сотрудниками[28-32] и поддержанной

Л.Д.Фаддеевым[33]. К тому времени появились также работы Шена, Яо[34–35] и Виттена[36]. В 1982 году Н.Н.Боголюбов обратил мое внимание на необходимость разобраться с проблемой энергии в ОТО строго математически. Через полтора года я дал предварительный ответ на такую постановку задачи[37]. В ряде работ[38–43] рассмотрены связанные с этим трудные вопросы теории относительности.

Оказалось, что в ЭТГ с самого начала был потерян важный геометрический объект - фоновая связность, которая вместе с метрическим тензором как раз и определяет плотность энергии гравитационного поля в ОТО. Эта потеря была замещена псевдотензорной субкультурой, достигшей своего потолка в работе[33]. Рост псевдотензорной субкультуры поставил под сомнение возможности тензорной культуры, для реабилитации которой необходимо было построить геометрическую теорию гравитации (ГТГ), целиком основанную на тензорном анализе.

Псевдотензорная субкультура возникла и развилась в результате неправильного обращения с геометрическим объектом, называемым в тензорном анализе аффинной связностью. Говорят, что на N-мерном многообразии задана аффинная связность Γ, если в каждой координатной карте $x^1,\ldots,x^N$ заданы N^3 ее компонент Γ^a_{mn}, которые при переходе к другой карте $\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^N$ в той области многообразия, где обе карты применимы, преобразуются по правилу

$$\tilde{\Gamma}^a_{mn} = \Gamma^b_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial\tilde{x}^m}\frac{\partial x^q}{\partial\tilde{x}^n}\frac{\partial\tilde{x}^a}{\partial x^b} + \frac{\partial^2 x^b}{\partial\tilde{x}^m\partial\tilde{x}^n}\frac{\partial\tilde{x}^a}{\partial x^b}. \qquad (1)$$

Для краткости такой объект называем просто связностью. С помощью связности берется ковариантная производная и определяется параллельный перенос тензорных объектов. Широко известным примером связности является связность Кристоффеля

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2}\, g^{as}(\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}), \qquad (2)$$

задаваемая невырожденным симметричным тензором g_{ab} и обратным тензором g^{ab}. Более простым примером является примитивная связность, тензор кручения и тензор кривизны которой оба равны нулю. В общем случае тензор кручения равен

$$S^a_{mn} = \Gamma^a_{mn} - \Gamma^a_{nm}, \qquad (3)$$

а тензор кривизны равен

$$R^a_{mnb} = \partial_m\Gamma^a_{nb} - \partial_n\Gamma^a_{mb} + \Gamma^a_{ms}\Gamma^s_{nb} - \Gamma^a_{ns}\Gamma^s_{mb}. \qquad (4)$$

Если связность примитивна, то в некоторой карте $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N$ все ее компоненты равны нулю, так что в соответствии с законом преобразования (1) в произвольной карте $x^1, \ldots, x^N$ ее компоненты равны

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^s}{\partial x^m \partial x^n} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^s} = - \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^n} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \tilde{x}^p \partial \tilde{x}^q}. \qquad (5)$$

Примитивная связность определяет карту $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N$ не однозначно, а с точностью до линейных преобразований

$$\approx{x}^a = A^a_b \tilde{x}^b + B^a. \qquad (6)$$

Это значит, что примитивная связность задает на многообразии аффинную геометрию. В случае связности Кристоффеля (2) тензор кручения (3) равен нулю, но тензор кривизны (4) не обязательно равен нулю. Если все-таки он равен нулю, то в некоторой карте $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N$ компоненты тензора, определяющего связность (2), постоянны. Это значит, что такой тензор задает на многообразии евклидову или псевдоевклидову геометрию. Но в таком случае выражения (2) и (5) совпадают. Вот почему примитивную связность нехорошо называть евклидовой: она в равной мере и псевдоевклидова.

Уже введение в ОТО примитивной связности в качестве фона дало нам возможность не прибегать к услугам какой бы то ни было субкультуры. Собственно, этим можно было и ограничиться, если бы мы пожелали исследовать гравитационные поля только на таких многообразиях, которые допускают введение примитивной связности, да к тому же, если бы мы пожелали не извлекать никакой пользы из вариационного исчисления.

Однако автор таких желаний не имел, и ему пришлось ввести непримитивную фоновую связность без кручения [44-47], что эквивалентно введению тензора аффинной деформации, равному разности

$$P^a_{mn} = \breve{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn}, \qquad (7)$$

где $\breve{\Gamma}^a_{mn}$ - фоновая связность без кручения, Γ^a_{mn} - связность Кристоффеля (2), определяемая гравитационно-метрическим тензором g_{ab}. Так на базе ЭТГ была построена геометрическая теория гравитации (ГТГ), в которой все физические объекты представляются объектами геометрическими.

В частности, фоновая связность может быть и примитивной. Это очень ограничивает топологию многообразия: оно должно быть клиффордовым, то есть должно покрываться атласом, состоящим из линейно склеенных координатных карт. Понятно, что простое, то есть покрываемое одной единственной картой, многообразие клиффордово. Но вот интересное противопоставление: двумерный тор - многообразие клиффордово, а двумерная сфера - неклиффордово.

Мы ограничились случаем, когда тензор кручения фоновой связности равен нулю, чтобы не иметь сразу дела еще и с нерешенными вопросами единой теории поля Эйнштейна. Нерешенных вопросов хватает и в теории чисто гравитационного поля в вакууме, которое мы погружаем в пространство аффинной связности без кручения. Последнее эквивалентно тому, что мы считаем тензор аффинной деформации (7) симметричным по двум нижним значкам. В наиважнейшем частном случае мы погружаем гравитационное поле в аффинное пространство. Под этот случай подходят как вышеупомянутые работы В.А.Фока, Н.Розена и А.Папапетру, так и недавние работы А.А.Логунова с сотрудниками [48-51].

2. ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

На передний план выдвигаем два тензорных поля:

$$g_{ab} = g_{ba} \quad \text{и} \quad P^a_{mn} = P^a_{nm}. \tag{8}$$

Определитель g матрицы g_{ab} не равен нулю. По тензорному полю g_{ab} определяем связность Кристоффеля (2) и, привлекая тензорное поле P^a_{mn}, вводим фоновую связность

$$\breve{\Gamma}^a_{mn} = \Gamma^a_{mn} + P^a_{mn}. \tag{9}$$

Для выяснения вопроса, необходимо ли вводить в ЭТГ поле P^a_{mn}, нет нужды в конкретных представлениях о строении вещества, и мы будем рассматривать здесь гравитационное поле в вакууме. В соответствии с этим действие гравитационного поля задаем в виде

$$\mathcal{E} = \int \mathfrak{L}\, dV, \tag{10}$$

где $\mathfrak{L}$ - скаляр, равный

$$\mathfrak{L} = g^{mn} P_{mn}, \tag{11}$$

dV - элемент объема многообразия, равный

$$dV = \epsilon\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \quad \epsilon = \sqrt{|g|}, \tag{12}$$

P_{mn} - тензор, равный

$$P_{mn} = P^{a}_{mb} P^{b}_{an} - P^{a}_{as} P^{s}_{mn}. \tag{13}$$

Уравнения гравитационного поля получаем из вариационных условий

$$\delta \mathcal{E} = 0, \quad \delta \check{\Gamma}^{a}_{mn} = 0. \tag{14}$$

Уравнения гравитационного поля в вакууме таковы:

$$\nabla_a P^{a}_{mn} = P_{mn} + \frac{1}{2} (\nabla_m P_n + \nabla_n P_m), \tag{15}$$

где ∇_a - ковариантная производная со связностью (2),

$$P_a = P^{s}_{as}. \tag{16}$$

Тензор энергии гравитационного поля, построенный по образцу "псевдотензора" Эйнштейна /45/, равен

$$\mathcal{E}^{a}_{b} = (P^{a}_{mn} - P_m \delta^{a}_{n}) \Phi^{mn}_{b} - \mathcal{L} \delta^{a}_{b}, \tag{17}$$

где

$$\Phi^{mn}_{a} = g^{ms} P^{n}_{as} + g^{ns} P^{m}_{as} - P_a g^{mn}. \tag{18}$$

Последний тензор можно записать в виде

$$\Phi^{mn}_{a} = (\check{\nabla}_a - P_a) g^{mn}, \tag{19}$$

где $\check{\nabla}_a$ - ковариантная производная со связностью (9).

3. СПРАВКА О СВЯЗНОСТЯХ

Для любого тензорного поля разность ковариантных производных ∇_m и $\check{\nabla}_m$ является билинейной формой от тензора аффинной деформации и дифференцируемого тензора. Например, для векторного и ковекторного полей

$$\check{\nabla}_m T^{a} - \nabla_m T^{a} = P^{a}_{mn} T^{n}, \quad \nabla_m T_n - \check{\nabla}_m T_n = P^{a}_{mn} T_a. \tag{20}$$

В частности, для тензора аффинной деформации эта разность является квадратичной формой

$$\nabla_m P^{a}_{nb} - \check{\nabla}_m P^{a}_{nb} = P^{s}_{mn} P^{a}_{sb} + P^{s}_{mb} P^{a}_{ns} - P^{a}_{ms} P^{s}_{nb}. \tag{21}$$

Для плотности объема (12) верно равенство

$$\nabla_a \epsilon - \breve{\nabla}_a \epsilon = P_a \epsilon, \tag{22}$$

а так как $\nabla_a \epsilon = 0$, то $(\breve{\nabla}_a + P_a)\epsilon = 0$. Поэтому для любого тензорного поля T верно равенство

$$\epsilon(\breve{\nabla}_a - P_a)\,T = \breve{\nabla}_a(\epsilon T). \tag{23}$$

Для любого векторного поля T^k справедливы равенства

$$(\breve{\nabla}_k - P_k)\,T^k = \nabla_k T^k = \epsilon^{-1}\partial_k(\epsilon\, T^k). \tag{24}$$

Эти равенства интересны в связи с интегральной теоремой Гаусса.

Тот факт, что тензор (18) равен тензору (19), следует из того, что

$$\breve{\nabla}_a g^{mn} - \nabla_a g^{mn} = P^m_{as} g^{sn} + P^n_{as} g^{ms}, \tag{25}$$

и из того, что $\nabla_a g^{mn} = 0$.

Равным образом из того, что $\nabla_a g_{mn} = 0$, следует равенство

$$-\breve{\nabla}_a g_{mn} = P^s_{am} g_{sn} + P^s_{an} g_{ms}. \tag{26}$$

Отсюда и из условий симметрии (8) получается следующее выражение для тензора аффинной деформации

$$P^a_{mn} = -\frac{1}{2} g^{as}(\breve{\nabla}_m g_{sn} + \breve{\nabla}_n g_{sm} - \breve{\nabla}_s g_{mn}). \tag{27}$$

Из (2) и (8) следуют равенства

$$S^a_{mn} = 0, \quad \breve{S}^a_{mn} = 0, \tag{28}$$

а также и равенства

$$\Omega_{mn} = 0, \quad \breve{\Omega}_{mn} = \partial_m P_n - \partial_n P_m, \tag{29}$$

где

$$\Omega_{mn} = R^s_{mns}, \qquad \breve{\Omega}_{mn} = \breve{R}^s_{mns}. \tag{30}$$

Наряду с очевидной антисимметрией по первым двум нижним индексам, тензор кривизны обладает двумя следующими свойствами:

$$\check{R}^a_{mnb} + \check{R}^a_{bmn} + \check{R}^a_{nbm} = 0, \qquad (31)$$

$$\check{\nabla}_k \check{R}^a_{mnb} + \check{\nabla}_n \check{R}^a_{kmb} + \check{\nabla}_m \check{R}^a_{nkb} = 0. \qquad (32)$$

Последние две формулы остаются правильными и после того, как в них стереть все "галочки". Из (31) следует, что свертки (30) равны

$$\Omega_{mn} = R_{nm} - R_{mn}, \quad \check{\Omega}_{mn} = \check{R}_{nm} - \check{R}_{mn}, \qquad (33)$$

где

$$R_{mn} = R^s_{smn}, \quad \check{R}_{mn} = \check{R}^s_{smn}. \qquad (34)$$

Из (32), а равным образом, и из (29) следует, что

$$\partial_k \check{\Omega}_{mn} + \partial_n \check{\Omega}_{km} + \partial_m \check{\Omega}_{nk} = 0. \qquad (35)$$

Ввиду (28) операция $\nabla_{mn} = \nabla_m\nabla_n - \nabla_n\nabla_m$ в применении к любому тензорному полю дает билинейную форму от тензора кривизны и от дифференцируемого тензора, ту же самую, о которой шла выше речь по поводу операции $\check{\nabla}_m - \nabla_m$. Например, аналогично (20) имеем

$$\nabla_{mn} F^a = R^a_{mnb} F^b, \quad \nabla_{mn} F_b = - R^a_{mnb} F_a, \qquad (36)$$

а аналогично (25) имеем

$$\nabla_{mn} g^{ab} = R^a_{mns} g^{sb} + R^b_{mns} g^{as}. \qquad (37)$$

Из того, что $\nabla_n g^{ab} = 0$, следует, что левая часть равенства (37) равна нулю. Значит, тензор

$$R^{ab}_{mn} = R^a_{mns} g^{sb} \qquad (38)$$

антисимметричен не только по нижним, но и по верхним индексам.

Ввиду (28) закон изменения тензора кривизны при переходе от одной связности к другой [52] можно записать в двух вариантах

$$R^a_{mnb} - \check{R}^a_{mnb} = \nabla_n P^a_{mb} - \nabla_m P^a_{nb} + P^a_{mnb}, \qquad (39)$$

$$R^a_{mnb} - \check{R}^a_{mnb} = \check{\nabla}_n P^a_{mb} - \check{\nabla}_m P^a_{nb} - P^a_{mnb}, \qquad (40)$$

где

$$P^{a}_{mnb} = P^{s}_{mb} P^{a}_{sn} - P^{s}_{nb} P^{a}_{sm}. \qquad (41)$$

Следовательно, уравнения гравитационного поля (15) можно записать еще в двух вариантах

$$\breve{\nabla}_a P^{a}_{mn} = \frac{1}{2}(\breve{\nabla}_m P_n + \breve{\nabla}_n P_m) - P_{mn}, \qquad (42)$$

$$R_{mn} = \frac{1}{2}(\breve{R}_{mn} + \breve{R}_{nm}). \qquad (43)$$

4. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ В ГТГ

Согласно принципу соответствия новая теория при определенных условиях должна переходить в старую. Так, например, когда константа Лобачевского стремится к бесконечности, геометрия Лобачевского переходит в геометрию Евклида; когда константа Планка стремится к нулю, квантовая механика переходит в классическую; когда тензор кривизны (4) связности (2) обращается в нуль, геометрия Римана переходит в геометрию Евклида.

Так и ГТГ переходит в ЭТГ, когда тензор кривизны $\breve{R}^{a}_{mnb}$ связности (9) обращается в нуль, то есть когда

$$\partial_m \breve{\Gamma}^{a}_{nb} - \partial_n \breve{\Gamma}^{a}_{mb} + \breve{\Gamma}^{a}_{ms} \breve{\Gamma}^{s}_{nb} - \breve{\Gamma}^{a}_{ns} \breve{\Gamma}^{s}_{mb} = 0. \qquad (44)$$

В этом случае согласно (43) получаются уравнения Эйнштейна

$$R_{mn} = 0. \qquad (45)$$

Что до тензора энергии гравитационного поля (17), то, как известно, в случае (44) обязательно найдется координатная карта, в которой все компоненты фоновой связности $\breve{\Gamma}^{a}_{mn}$ равны нулю. В такой карте ковариантные производные $\breve{\nabla}_a$ равняются частным производным ∂_a, тензор аффинной деформации (7) равен $P^{a}_{mn} = -\Gamma^{a}_{mn}$, а тензор (17) переходит в псевдотензор Эйнштейна

$$E^{a}_{b} = (-\Gamma^{a}_{mn} + \Gamma_m \delta^{a}_{n})(\partial_b + \Gamma_b) g^{mn} - L\delta^{a}_{b}, \qquad (46)$$

где L - псевдоскаляр Эйнштейна

$$L = g^{mn}(\Gamma^{a}_{mb}\Gamma^{b}_{an} - \Gamma^{a}_{as}\Gamma^{s}_{mn}), \qquad (47)$$

в который переходит скаляр (11). Действие (10) при этом переходит в действие Эйнштейна

$$E = \int L\,dV. \qquad (48)$$

В отличие от (10) интеграл (48) зависит от выбора координат.

В произвольной же карте в случае (44) тензор аффинной деформации равен

$$P^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial \psi^s}\frac{\partial^2 \psi^s}{\partial x^m \partial x^n} - \Gamma^a_{mn}, \qquad (49)$$

где $\psi^1, \ldots, \psi^N$ - скалярные функции от $x^1, \ldots, x^N$, которые сами могут составить координатную карту. Тензор (49) инвариантен относительно аффинных подстановок

$$\psi^a = A^a_b \bar{\psi}^b + B^a, \quad \det(A^a_b) \neq 0, \qquad (50)$$

а это и означает, что он определяется примитивной связностью, коэффициенты которой в каждой из карт, определенных подстановками (50), равны нулю.

5. К ВОПРОСУ О ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

Развивая ГТГ, автор учитывал результаты работ /10-14,48-51/. Как видно, в этих работах представления Эйнштейна о природе гравитации не опровергаются, а уточняются. Поэтому развиваемые в них теории неправильно называть альтернативными по отношению к ЭТГ. Надо сказать, что и скептическое отношение авторов этих работ к "черным дырам" совпадает с эйнштейновским:

"Основным результатом проведенного исследования является четкое понимание того, что в реальном мире отсутствуют "шварцшильдовские сингулярности"... Настоящее исследование возникло из дискуссий автора с профессором Робертсоном и с докторами В.Баргманом и П. Бергманом о математическом и физическом смысле шварцшильдовской сингулярности. Эта проблема совершенно естественно привела к вопросу о том, допускают ли физические модели существование такой сингулярности. Настоящая работа отвечает на этот вопрос отрицательно" /53/.

Скорее теорию черных дыр следует называть по отношению к ЭТГ альтернативной, чем теорию гравитации на фоне метрики Минковского.

Не считая обязательным вводить фоновую метрику, автор тем не менее считает обязательным вводить фоновую связность, а за ней и тензор аффинной деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А. - ДАН СССР, 1957, т.112, № 6, с.1030.
2. Черников Н.А. - ДАН СССР, 1957, т. 114, № 3, с.530.
3. Черников Н.А. - ДАН СССР, 1960, т.133, № 1, с.84.
4. Черников Н.А. - ДАН СССР, 1960, т.133, № 2, с.333
5. Черников Н.А. - ДАН СССР, 1962, т.144, № 1, с.89.
6. Черников Н.А. - ДАН СССР, 1962, т.144, № 2, с.314.
7. Черников Н.А. - ДАН СССР, 1962, т.144, № 3, с.544.
8. Chernikov N.A. - Acta Physica Polonica, 1963, vol.23, No.5, p.629.
9. Chernikov N.A. - Physics Letters, 1963, vol.5, No.2,p.115.
10. Фок В.А. - ЖЭТФ, 1939, т.9, вып.4, с.375.
11. Фок. В.А. - Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехтеориздат, 1955.
12. Rosen N. - Phys.Rev., 1940, vol57, p.147.
13. Rosen N. - Annals of Physics, 1953, vol.22, p.1.
14. Papapetrou A. - Proc.Roy.Irish Acad., 1948, vol.52,Sect.A, No.2, p.12.
15. Эйнштейн А. - Демонстрация несуществования гравитационных полей с исчезающей массой, свободных от сингулярностей (1941). Собр.науч.трудов, т.2. М.: Наука, 1966, с.555.
16. Эйнштейн А., Паули В. Несуществование регулярных стационарных решений релятивистских уравнений поля (1943). Собр.науч.трудов, т.2. М.: Наука, 1966, с.560.
17. Эйнштейн А. - Приближенное интегрирование уравнений гравитационного поля (1916). Собр.науч.трудов, т.1. М.: Наука, 1963, с.514.
18. Эйнштейн А. - О гравитационных волнах (1918). Собр.науч. трудов, т.1. М.: Наука, 1965, с.631.
19. Flint H.T. - Proc.Roy.Soc., 1943, vol.144, Sect.A, No.A852, p.413.
20. Черников Н.А. - Препринт ОИЯИ Р-723, Дубна, 1961; В сб.: "Гравитация и теория относительности", вып.2. Казань: изд.Казанского ун-та, 1965, с.9.
21. Черников Н.А. - ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.3, с.773.
22. Черников Н.А. - В сб.: "Классическая и квантовая теория гравитации". Минск: изд.ин-та физики АН БССР, 1976,с.47.
23. Черников Н.А. - В сб.: "150 лет геометрии Лобачевского". М.: изд.ВИНИТИ, 1977, с.146.
24. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2-80-776, Дубна, 1980.
25. Черников Н.А. - ЖЭТФ, 1967, т.53, вып.3(9), с.1006.
26. Черников Н.А. - В сб.: Труды 3-го Межд.совещ. по нелокальной теории поля. ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973, с.218.
27. Черников Н.А. - Известия ВУЗов, Математика, 1978, 5(192), с.114.

28. Логунов А.А., Фоломешкин В.Н. - ТМФ, 1977, т.32, № 2, с.167.
29. Денисов В.И., Логунов А.А. ТМФ, 1980, т.43, № 2, с.187.
30. Денисов В.И., Логунов А.А. - Препринт ИЯИ АН СССР П-0199, Москва, 1981.
31. Денисов В.И., Логунов А.А. - Препринт ИЯИ АН СССР П-0214, Москва, 1981.
32. Денисов В.И., Логунов А.А., Мествиришвили М.А. - ЭЧАЯ, 1981, т.12, вып.1, с.5.
33. Фаддеев Л.Д. - УФН, 1982, т.136, вып.3, с.435.
34. Shoen R., Yau S.-T. Commun.Math.Phys., 1979, vol.65, No.1, p.45.
35. Shoen R., Yau S.-T. Commun.Math.Phys., 1981, vol.79,No.1, p.47.
36. Witten E. - Commun.Math.Phys., vol.80, No.3, p.381.
37. Черников Н.А. В сб.: Труды 7-го Межд.совещ.по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984,с.382.
38. Черников Н.А. - Препринт ОИЯИ Р2-82-157, Дубна, 1985; В сб.: "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып.17, М.:Энергоатомиздат, 1986, с.24.
39. Черников Н.А. - В сб.: Труды Межд.рабочего совещ. по созданию излучателя и детектора гравитационных волн. ОИЯИ, Р85-667, Дубна, 1985, с.119.
40. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2-86-116, Дубна, 1986.
41. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2-86-207, Дубна, 1986.
42. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2-86-478, Дубна, 1986.
43. Черников Н.А. - ЭЧАЯ, 1987, т.18, вып.5, с.1000.
44. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2-87-490, Дубна, 1987.
45. Черников Н.А. - В сб.: Труды 8-го Межд.совещ. по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ Д2-87-798, Дубна, 1987, с.54.
46. Черников Н.А. - Препринт ОИЯИ Р2-88-27, Дубна, 1988; В сб.: "Гравитация и электромагнетизм". Минск: Университетское, 1988, с.255.
47. Черников Н.А. - Препринт ОИЯИ Р2-88-778, Дубна, 1988.
48. Логунов А.А., Власов А.А. - ТМФ, 1984, т.60, № 1, с.3.
49. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. - ТМФ, 1984, т.61, № 3, с.327.
50. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. - Основы релятивистской теории гравитации. М.: изд. Моск.ун-та, 1985.
51. Логунов А.А. - Релятивистская теория гравитации и новые представления о пространстве-времени. М.: изд.Моск.ун-та, 1986.
52. Норден А.П. - Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976, с.127.

53. Эйнштейн А. - О стационарных системах, состоящих из многих гравитирующих частиц и обладающих сферической симметрией (1939). Собр.науч.трудов, т.2. М.: Наука, 1966, с.514.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1989 года.