89-171

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-171

В.К.Мельников

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ КАДОМЦЕВА - ПЕТВИАШВИЛИ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в журнал "Communications
in Mathematical Physics"

1989

В настоящей работе речь идет о взаимодействии уединенных волн в системе, описываемой уравнениями /1-4/

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\kappa|\phi|^2\right)\right] = 0,$$

$$i\frac{\partial\phi}{\partial y} = u\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Эта система возникает при изучении взаимодействия длинных и коротких волн в различных физических процессах и, соответственно, здесь u - амплитуда длинной волны, ϕ - комплексная огибающая пакета коротких волн, а параметр κ удовлетворяет условию $\kappa^2 = 1$.

Как известно, система (1) обладает односолитонным решением вида

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x+2\nu y - \tau t)+\delta]},$$

$$\phi = a\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2-\nu^2)y + i\sigma t]}{\mathrm{ch}[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta]}, \tag{2}$$

где вещественные параметры μ, ν, τ и комплексная величина a удовлетворяют единственному условию

$$4\kappa|a|^2 = [\tau - 4(\mu^2 - 3\nu^2)]\mu^2, \tag{3}$$

а величины δ и σ принимают любые вещественные значения. Из этого соотношения следует, что для существования солитонов (2) параметры μ, ν и τ должны удовлетворять неравенству

$$[\tau - 4(\mu^2 - 3\nu^2)]\kappa \geq 0. \tag{4}$$

Параметры δ и $\theta = \arg a$ характеризуют положение солитона (2) на плоскости x, y и при $\mu^2 + \nu^2 > 0$ посредством замены $x \to x + x_0$, $y \to y + y_0$ могут быть преобразованы в любые наперед заданные величины, например - равные нулю. С помощью четырех вещественных параметров μ, ν, σ, τ образуем две комплексные величины ω и ρ^3 вида

$$\omega = \mu + i\nu, \quad \rho^3 = -\bar{\omega}^3 + \frac{1}{4}(\mu\tau + i\sigma), \tag{5}$$

играющие важную роль при изучении взаимодействия солитонов (2). Здесь и всюду в дальнейшем черта означает комплексное сопряжение.

Из соотношения (3) следует, что при $\tau = 4(\mu^2 - 3\nu^2)$ солитон (2) вырождается в хорошо известный солитон /5/

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu y) - 4\mu(\mu^2 - 3\nu^2)t + \delta]}, \quad \phi \equiv 0 \tag{6}$$

уравнения Кадомцева - Петвиашвили /6/. В соответствии с (5) параметр ρ^3 в этом случае может принимать только чисто мнимые значения. Далее, полагая $\sigma = \tau = 0$, согласно (5) находим, что $\rho^3 = -\bar{\omega}^3$. В этом случае солитон (2) принимает вид

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu y) + \delta]}, \quad \phi = a\,\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu y) + \delta]}, \tag{7}$$

то есть является стационарным решением системы (1). Следовательно, солитон (7) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{gathered} 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\kappa|\phi|^2\right) = 0, \\ i\frac{\partial \phi}{\partial y} = u\phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \end{gathered} \tag{8}$$

получающейся из системы (1) после выбрасывания члена $\frac{\partial u}{\partial t}$ в первом уравнении. Наконец, отметим, что $N > 1$ солитонов (2) с одинаковыми величинами ω_m, но с различными величинами ρ_m^3, $m = 1, \ldots, N$, образуют уединенную волну вида

$$\begin{gathered} u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu y - f)]}, \\ \phi = A\,\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu y - f)]}, \end{gathered} \tag{9}$$

где величины f и A не зависят от координат x и y. Однако эти величины, вообще говоря, зависят от времени t и удовлетворяют соотношению

$$\frac{df}{dt} = 4(\mu^2 - 3\nu^2) + 4\kappa\mu^{-2}|A|^2 . \tag{10}$$

Из этого соотношения следует, что $\frac{d^2 f}{dt^2} \neq 0$, если в этот момент времени выполняется неравенство $\frac{d|A|^2}{dt} \neq 0$. Таким образом, изменение квадрата амплитуды ϕ-волны приводит к синхронному ускорению u-волны и, наоборот, ускорение u-волны приводит к синхронному изменению квадрата амплитуды ϕ-волны.

Нетрудно убедиться, что соотношение (10) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы определенные посредством (9) функции u и ϕ удовлетворяли системе (1). Более того, как будет показано ниже, класс пар функций f, A, удовлетворяющих соотношению (10), существенно шире того, который можно получить из рассмотрения N-солитонного решения системы (1) при указанном выше выборе параметров ω_m и ρ_m^3, $m = 1, \ldots, N$. Таким образом, волны вида (9) далеко не всегда могут быть получены из многосолитонного решения системы (1). Тем не менее взаимодействие $N > 1$ волн вида (9) всегда описывается формулами, очень сходными по структуре с формулами N-солитонного решения системы (1). Ниже эти формулы будут получены и с их помощью будет исследовано взаимодействие уединенных волн (9). В частности, будет показано, что при определенных условиях две или более волн (9) могут находиться в связанном состоянии, то есть в течение полубесконечного промежутка времени $t < 0$ эти волны находятся на конечном расстоянии друг от друга, а затем происходит распад связанного состояния, и при $t > 0$ эти волны неограниченно удаляются друг от друга. Далее, если в этих решениях заменить t на $-t$, а x заменить на $-x$, то полученные новые решения системы (1) будут описывать процесс образования связанного состояния, то есть процесс, в котором две или более уединенные волны (9), находящиеся при $t < 0$ неограниченно далеко друг от друга, при всех $t > 0$ будут находиться на конечном расстоянии друг от друга. Здесь необходимо заметить, что в отличие от распада и слияния солитонов, имеющих, как известно, резонансный характер, распад и образование связанного состояния волн (9) происходит при выполнении условий, задаваемых неравенствами, то есть в ситуации общего положения.

1. N-ВОЛНОВОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (1)

Для того чтобы получить формулы, описывающие взаимодействие $N > 1$ волн (9), возьмем вектор-столбец λ с N компонентами λ_m вида

$$\lambda_m = \exp(\omega_m x - i\omega_m^2 y), \quad m = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

где ω_m - комплексные параметры. Возьмем, далее, квадратную матрицу P порядка N с элементами $P_{m,n}$ вида

$$P_{m,n} = \frac{\lambda_m \bar{\lambda}_n}{\omega_m + \bar{\omega}_n}, \quad m, n = 1, \ldots, N. \tag{1.2}$$

Пусть, наконец, q - вектор-столбец с N компонентами $q_1, \ldots, q_N$, а Q - эрмитова матрица порядка N с элементами $Q_{m,n}$, m, $n = 1, \ldots, N$, такими, что выполняется равенство

$$\frac{dQ}{dt} + 4\bar{\omega}^3 Q + 4Q\omega^3 + 4\kappa \bar{q}\tilde{q} = 0, \tag{1.3}$$

где

$$\omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_N), \tag{1.4}$$

а знак "~" означает транспонирование, то есть, в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Таким образом, выражение $\bar{q}\tilde{q}$ определяет эрмитову матрицу порядка N с элементами $\bar{q}_m q_n$, m, $n = 1, \ldots, N$. Предположим теперь, что компоненты q_m вектора q и элементы $Q_{m,n}$ матрицы Q не зависят от координат x и y. Положим

$$D = \det \begin{vmatrix} I & -Q \\ P & I \end{vmatrix}, \quad \Phi = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{q} \\ 0 & I & -Q \\ \lambda & P & I \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

где I - единичная матрица порядка N. Тогда функции

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D, \quad \phi = \frac{\Phi}{D} \tag{1.6}$$

удовлетворяют системе (1) всюду, где $D \neq 0$.

С учетом (1.6) легко находим, что для того, чтобы доказать это утверждение, нам достаточно убедиться в справедливости соотношений

$$\left(3\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^4 D}{\partial x^4}\right) D - 3\left[\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial D}{\partial t} + 4\frac{\partial^3 D}{\partial x^3}\right)\frac{\partial D}{\partial x} - 4\kappa |\Phi|^2 = 0, \tag{1.7}$$

$$(i\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})D=(i\frac{\partial D}{\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2})\Phi-2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \qquad (1.8)$$

Справедливость этих соотношений, как будет показано ниже, вытекает из следующей алгебраической леммы.

Алгебраическая лемма. Пусть B - квадратная матрица порядка $r+2$, $r>0$. Пусть, далее, $B_{\mu,\nu}$ - квадратная матрица порядка $r+1$, получающаяся из матрицы B после вычеркивания элементов μ-й строки и ν-го столбца, а $\beta_{\mu,\nu} = \det B_{\mu,\nu}$, μ, $\nu = 1,\ldots, r+2$. Пусть, наконец, B_0 - минор r-го порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы B. Тогда справедливо равенство

$$(\det B)(\det B_0)=\beta_{1,1}\beta_{2,2}-\beta_{1,2}\beta_{2,1}. \qquad (1.9)$$

Доказательство этой леммы тривиально и поэтому опущено (см., например, работу [3]).

Покажем теперь, каким образом соотношения (1.7) и (1.8) следуют из равенства (1.9). С этой целью возьмем квадратные матрицы $F_{m,n}$, G_m, U и V вида

$$F_{m,n}=\begin{vmatrix} 0 & \lambda^*\bar{\omega}^n & 0 \\ 0 & 1 & -Q \\ \omega^m\lambda & P & 1 \end{vmatrix}, \quad m\ge 0,\quad n\ge 0, \qquad (1.10)$$

$$G_m=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{q} \\ 0 & 1 & -Q \\ \omega^m\lambda & P & 1 \end{vmatrix}, \quad m\ge 0, \qquad (1.11)$$

$$U=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda^*\tilde{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -Q \\ \omega\lambda & \lambda & P & 1 \end{vmatrix}, \qquad (1.12)$$

$$V=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{q} \\ 0 & 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -Q \\ \omega\lambda & \lambda & P & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1.13)$$

Здесь и всюду в дальнейшем звездочкой обозначено эрмитово сопряжение, то есть транспонирование и комплексное сопряжение, выполняемое одновременно. Нетрудно видеть, что матрицы $F_{m,n}$ и G_m имеют порядок $2N+1$, а матрицы U и V имеют порядок, равный $2N+2$. С помощью несложных вычислений, основанных на равенствах (1.1), (1.2) и (1.5), нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$\frac{\partial D}{\partial x} = -\det F_{0,0}\ , \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -\det F_{0,1} - \det F_{1,0}\ ,$$

$$\frac{\partial^3 D}{\partial x^3} = -\det F_{0,2} - 2\det F_{1,1} - \det F_{2,0}\ , \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial^4 D}{\partial x^4} = -\det F_{0,3} - 3\det F_{1,2} - 3\det F_{2,1} - \det F_{3,0} + 2\det U\ ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \det G_1\ , \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \det G_2 - \det V\ , \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = -i\det F_{0,1} + i\det F_{1,0}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} = \det F_{0,3} - \det F_{1,2} - \det F_{2,1} + \det F_{3,0} - 2\det U\ , \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -i\det G_2 - i\det V\ .$$

Отсюда следует, что

$$i\,\frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -2\det F_{1,0}\ ,$$

$$i\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2\det V\ . \tag{1.17}$$

Воспользуемся теперь алгебраической леммой. Положим $\mathbf{B} = \mathbf{V}$. Тогда согласно (1.10), (1.11) и (1.13) имеем

$$B_{1,1} = F_{0,0}\ ,\quad B_{1,2} = F_{1,0}\ ,\quad B_{2,1} = G_0\ ,\quad B_{2,2} = G_1\ .$$

Далее, на основе (1.13) получаем равенство

$$B_0 = \begin{vmatrix} I & -Q \\ P & I \end{vmatrix}.$$

Отсюда в силу (1.5) следует, что

$$\det B_0 = D .$$

Таким образом, в этой ситуации равенство (1.9) принимает вид

$$D \det V = \det \begin{vmatrix} \det F_{0,0} & \det G_0 \\ \det F_{1,0} & \det G_1 \end{vmatrix}. \tag{1.18}$$

В соответствии с равенствами (1.5), (1.11), (1.14), (1.15) и (1.17) получаем, что соотношение (1.18) совпадает с соотношением (1.8). Следовательно, справедливость соотношения (1.8) доказана.

Вычислим теперь величину $\frac{\partial D}{\partial t}$. С этой целью возьмем диагональную матрицу T вида

$$T = \exp(4\omega^3 t), \tag{1.19}$$

где матрица ω определена посредством равенства (1.4), и положим

$$\hat{P} = T^{-1} P \bar{T}^{-1}, \quad \hat{Q} = \bar{T} Q T . \tag{1.20}$$

На основании (1.3) матрица $\hat{Q}$ удовлетворяет условию

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} + 4\kappa \bar{T}\bar{q}\tilde{q}T = 0 . \tag{1.21}$$

С другой стороны, в силу (1.5) имеем

$$D = \det \begin{vmatrix} I & -\hat{Q} \\ \hat{P} & I \end{vmatrix}.$$

С учетом (1.1), (1.2), (1.10) и (1.19)-(1.21) отсюда следует равенство

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 4 \det F_{0,2} - 4 \det F_{1,1} + 4 \det F_{2,0} - 4\kappa \det R , \tag{1.22}$$

где

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{q} \\ \bar{q} & 1 & -Q \\ 0 & P & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.23}$$

Далее, справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t \partial x} = 4 \det F_{0,3} + 4 \det F_{3,0} + 4 \det U + 4\kappa \det W , \tag{1.24}$$

где

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{q} \\ 0 & 0 & \lambda^* & 0 \\ \bar{q} & 0 & 1 & -Q \\ 0 & \lambda & P & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.25}$$

Таким образом, согласно (1.14), (1.16), (1.22) и (1.24) получаем равенства

$$3 \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^4 D}{\partial x^4} = -12 \det U - 4\kappa \det W ,$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + 4 \frac{\partial^3 D}{\partial x^3} = -12 \det F_{1,1} - 4\kappa \det R , \tag{1.26}$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial y} \right)^2 = 4 (\det F_{0,1})(\det F_{1,0}) .$$

Воспользуемся снова алгебраической леммой. Пусть $B = U$. Тогда в соответствии с равенствами (1.10) и (1.12) находим, что

$$B_{1,1} = F_{0,0} , \quad B_{1,2} = F_{1,0} , \quad B_{2,1} = F_{0,1} , \quad B_{2,2} = F_{1,1} .$$

Далее, на основе (1.5) и (1.12) имеем равенство $\det B_0 = D$. Таким образом, в рассматриваемом нами сейчас случае соотношение (1.9) принимает вид

$$D \det U = \det \begin{vmatrix} \det F_{0,0} & \det F_{0,1} \\ \det F_{1,0} & \det F_{1,1} \end{vmatrix}. \tag{1.27}$$

Пусть теперь $B = W$. С учетом равенств (1.5), (1.10), (1.23) и (1.25) получаем, что

$$B_{1,1} = F_{0,0}\,, \quad \det B_{2,1} = \Phi\,, \quad B_{2,2} = R\,, \quad \det B_0 = D\,.$$

Далее, на основе эрмитовости матриц P и Q убеждаемся в справедливости равенства

$$\bar{\Phi} \doteq \det \begin{vmatrix} 0 & \lambda^* & 0 \\ \bar{q} & I & -Q \\ 0 & P & I \end{vmatrix},$$

то есть в силу (1.25) имеем $\det B_{1,2} = \bar{\Phi}$. Следовательно, на этот раз соотношение (1.9) имеет вид

$$D \det W = \det \begin{vmatrix} \det F_{0,0} & \bar{\Phi} \\ \Phi & \det R \end{vmatrix}. \qquad (1.28)$$

Согласно равенствам (1.26) справедливость соотношения (1.7) вытекает из соотношений (1.27) и (1.28). Таким образом, справедливость соотношений (1.7) и (1.8) доказана полностью.

Здесь необходимо отметить, что определенная посредством (1.1) и (1.2) эрмитова матрица P будет неотрицательной, если величины ω_m удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \omega_m > 0\,, \quad m = 1, \ldots, N\,. \qquad (1.29)$$

Наоборот, матрица P будет неположительной, если выполняется условие

$$\operatorname{Re} \omega_m < 0\,, \quad m = 1, \ldots, N\,. \qquad (1.30)$$

Таким образом, выбирая эрмитову матрицу Q неотрицательной, если имеет место условие (1.29), или, наоборот, беря ее неположительной, если справедливо условие (1.30), мы в обоих случаях с учетом равенства (1.5) убеждаемся в справедливости неравенства $D \geq 1$. Это значит, что определенное посредством (1.6) решение системы (1) в этой ситуации не имеет особенностей. Кроме того, из эрмитовости матриц P и Q следует, что определенная посредством (1.5) и (1.6) функция u при любых вещественных значениях x, y, t принимает только вещественные значения.

Пусть теперь

$$q_m = a_m \exp[-4(\omega_m^3 + \bar{\rho}_m^3)t]\,, \quad m = 1, \ldots, N,$$

$$Q_{m,n} = \kappa \frac{\bar{q}_m q_n}{\rho_m^3 + \bar{\rho}_n^3}, \quad m,n = 1, \ldots, N, \tag{1.31}$$

где $a_m \neq 0$, ω_m и ρ_m^3 – комплексные параметры. С помощью несложных вычислений находим, что в этом случае вектор q и эрмитова матрица Q удовлетворяют равенству (1.3). В соответствии с (5) положим

$$\omega_m = \mu_m + i\nu_m, \quad \rho_m^3 = -\bar{\omega}_m^3 + \frac{1}{4}(\mu_m \tau_m + i\sigma_m), \quad m = 1, \ldots, N,$$

где μ_m, ν_m, σ_m и τ_m – вещественные параметры. Нетрудно убедиться, что матрица Q будет неотрицательной, если выполнено условие (1.29), а параметры μ_m, ν_m и τ_m удовлетворяют аналогичному (4) неравенству

$$[\tau_m - 4(\mu_m^2 - 3\nu_m^2)]\kappa > 0, \quad m = 1, \ldots, N. \tag{1.32}$$

Наоборот, матрица Q будет неположительной, если одновременно выполнены условия (1.30) и (1.32). Следовательно, подчиняя выбор величин ω_m и ρ_m^3 либо условиям (1.29) и (1.32), либо условиям (1.30) и (1.32), мы получим решение системы (1), не имеющее особенностей при любых вещественных значениях x, y, t. Полученное таким образом решение системы (1) является уже известным N-солитонным решением [3]. Оно описывает взаимодействие N солитонов вида (2). Если в этом решении при некоторых значениях индекса m положить $\tau_m = 4(\mu_m^2 - 3\nu_m^2) + \kappa |a_m|^2 c_m$, где $c_m > 0$, и перейти к пределу при $a_m \to 0$, то полученное в результате N-солитонное решение системы (1) будет содержать некоторое число солитонов вида (6). Далее, полагая $\rho_m^3 = -\bar{\omega}_m^3$ при некоторых значениях индекса m, мы добьемся того, что наше N-солитонное решение системы (1) будет содержать также некоторое число солитонов вида (7). Наконец, полагая в исходном решении $\rho_m^3 = -\bar{\omega}_m^3$ при всех значениях индекса m = 1,..., N, мы получим N-солитонное решение системы (8).

Положим теперь в равенствах (1.31) $\omega_1 = \ldots = \omega_N = \mu + i\nu$, где μ и ν – вещественные параметры. С помощью несложных вычислений убеждаемся в справедливости равенств

$$D = 1 + K \exp[2\mu(x + 2\nu y)],$$

$$\Phi = L \exp[\mu(x + 2\nu y)] \exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y],$$

где

$$K = \frac{\kappa}{2\mu} \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\bar{q}_m q_n}{\rho_m^3 + \bar{\rho}_n^3}, \quad L = -\sum_{m=1}^{N} q_m . \tag{1.33}$$

Если все величины ρ_m^3 взяты разными, то из неравенства (1.32) следует, что квадратичная форма K положительно определена. Это значит, что $K > 0$ при любом вещественном значении времени t. Таким образом, в силу (1.6) рассматриваемое нами решение системы (1) в данном случае действительно имеет вид (9), если положить

$$f = -\frac{1}{2\mu} \ln K, \quad A = \frac{1}{2} L K^{-1/2}. \tag{1.34}$$

С учетом (1.31) получаем, что определенные выше величины K и L удовлетворяют соотношению

$$\mu \frac{dK}{dt} + 8(\mu^2 - 3\nu^2)\mu^2 K + 2\kappa |L|^2 = 0 .$$

Отсюда вытекает, что определенные посредством (1.33) и (1.34) величины f и A удовлетворяют соотношению (10). Далее, справедливо равенство

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\kappa}{\mu^2 K^2} \left(K \frac{d}{dt} |L|^2 - |L|^2 \frac{dK}{dt} \right).$$

Согласно (1.33) из этого равенства следует, что если среди величин ρ_m^3 имеется по крайней мере две разные, то справедливо неравенство $\frac{d^2 f}{dt^2} \neq 0$, то есть фазовая скорость волны (9) в этом случае не является постоянной во времени.

Рассмотренная выше уединенная волна не исчерпывает всех возможных здесь случаев. Чтобы убедиться в этом, положим

$$q_m = \sum_{r=0}^{\infty} a_{m,r} \exp[-4(\omega_m^3 + \bar{\rho}_{m,r}^3)t], \quad m = 1, \dots, N,$$

$$Q_{m,n} = C_{m,n} \exp[-4(\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3)t] + \tag{1.35}$$

$$+ \kappa \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_{m,r} a_{n,s}}{\rho_{m,r}^3 + \bar{\rho}_{n,s}^3} \exp[-4(\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3 + \rho_{m,r}^3 + \bar{\rho}_{n,s}^3)t],$$

$m, n = 1, \dots, N$,

где $a_{m,r}$, $C_{m,n}$, ω_m и $\rho^3_{m,r}$ - комплексные параметры. Нетрудно видеть, что так определенные вектор q и матрица Q удовлетворяют соотношению (1.3). Кроме того, матрица Q будет, очевидно, эрмитовой, если величины $C_{m,n}$ образуют эрмитову матрицу. Далее, нетрудно убедиться, что если $C_{m,n} = 0$ при $m,n = 1, \ldots, N$, а среди величин $a_{m,r}$ имеется только конечное число отличных от нуля, то получаемое в этом случае с помощью (1.35) решение системы (1) описывает взаимодействие N уединенных волн вида (9), каждая из которых может быть получена из многосолитонного решения системы (1) указанным выше способом, и, следовательно, само решение может быть получено из многосолитонного решения системы (1). Однако в случае, когда среди величин $a_{m,r}$ имеется бесконечно много отличных от нуля, получаемое с помощью (1.35) решение системы (1), очевидно, невозможно получить из многосолитонного решения этой системы. Существуют и другие возможности для выбора вектора q и матрицы Q, которые удовлетворяют соотношению (1.3) и позволяют получить другие типы уединенных волн вида (9), отличных от многосолитонных. Заслуживают особого упоминания уединенные волны вида (9) с ограниченными при всех $t \in (-\infty,\infty)$ функциями f_m, такими, что $\frac{df_m}{dt} \not\equiv 0$. Такого типа уединенные волны совершают финитные движения, то есть каждая из них все время движется в конечных пределах. В том случае, когда параметры ν_m всех участвующих во взаимодействии волн вида (9) совпадают, $m = 1, \ldots, N$, эти волны образуют одну уединенную волну, способную распадаться на несколько уединенных волн вида (9). В следующем разделе это явление будет рассмотрено детально.

2. ОБРАЗОВАНИЕ И РАСПАД СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМЕ (1)

Возьмем компоненты q_m вектора q и элементы $Q_{m,n}$ матрицы Q в следующем виде:

$$q_m = a_m \exp[-4(\omega_m^3 + \bar{\rho}_m^3)\, t\,] + b_m \exp(4 i \gamma_m t), \quad m = 1, \ldots, N,$$

$$Q_{m,n} = \kappa \frac{\bar{a}_m a_n}{\rho_m^3 + \bar{\rho}_n^3} \exp[-4(\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3 + \rho_m^3 + \bar{\rho}_n^3)t\,] -$$

$$-\kappa \frac{\bar{a}_m b_n}{\omega_n^3 - \rho_m^3 + i\gamma_n} \exp[-4(\bar{\omega}_m^3 + \rho_m^3 - i\gamma_n)t\,] -$$

$$- \kappa \frac{a_n \bar{b}_m}{\bar{\omega}_m^3 - \bar{\rho}_n^3 - i\gamma_m} \exp[-4(\omega_n^3 + \bar{\rho}_n^3 + i\gamma_m)t] - \tag{2.1}$$

$$- \kappa \frac{\bar{b}_m b_n}{\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3 - i(\gamma_m - \gamma_n)} \exp[-4i(\gamma_m - \gamma_n)t], \quad m,n = 1, \ldots, N,$$

где $a_m \neq 0$, $b_m \neq 0$, ω_m и ρ_m^3 - комплексные параметры, а γ_m - вещественные параметры. Нетрудно убедиться, что таким образом определенные вектор q и матрица Q удовлетворяют соотношению (1.3). Далее, положим при $m = 1, \ldots, N$

$$\omega_m = \mu_m + i\nu, \quad \rho_m^3 = -\bar{\omega}_m^3 + \frac{1}{4}(\mu_m \tau_m + i\sigma_m), \tag{2.2}$$

где μ_m, σ_m, τ_m и ν - вещественные параметры, удовлетворяющие неравенствам

$$\kappa\mu_m < 0, \quad \mu_m \tau_m < 0, \quad (\mu_m^2 - 3\nu^2)\mu_m > 0, \quad m = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

В этой ситуации определенные посредством равенств (2.1) элементы $Q_{m,n}$ матрицы Q допускают представление

$$Q_{m,n} = -4\kappa \exp[-4(\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3)t] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{t} \bar{q}_m(t') q_n(t') \exp[4(\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3)t'] dt'.$$

Отсюда следует, что эрмитова матрица κQ будет неположительной. Далее, из условия $\kappa\mu_m < 0$, $m = 1, \ldots, N$, следует, что определенная посредством (1.1) и (1.2) эрмитова матрица κP также будет неположительной. Следовательно, в силу (1.5) при любых вещественных x, y, t справедливо неравенство $D \geq 1$. Таким образом, определенное с помощью выражений (2.1) решение системы (1) согласно (1.6) не имеет особенностей при любых вещественных значениях x, y, t.

Выясним теперь, какова динамика этого решения. С этой целью возьмем матрицу G с элементами $G_{m,n}$ вида

$$G_{m,n} = \frac{\bar{b}_m b_n}{\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3 - i(\gamma_m - \gamma_n)} \exp[-4i(\gamma_m - \gamma_n)t], \quad m,n = 1, \ldots, N.$$

Если величины $\hat{\omega}_m^3 = \omega_m^3 + i\gamma_m$ все разные, $m = 1, \ldots, N$, то эрмитова матрица G на основе (2.2) и (2.3) будет положительно определенной. Далее, с учетом (2.1)-(2.3) имеем $Q_{m,n}+\kappa G_{m,n}\to 0$ при $t\to-\infty$, $m,n=1,\dots,N$. Отсюда следует, что найдется константа $c_0>0$ и момент времени t_0, такие, что при всех $t\le t_0$ справедливо неравенство $(-\kappa)^N \det Q \ge c_0$. Наконец, если величины μ_m все разные, $m=1,\dots,N$, то согласно (1.1) и (1.2) имеем $\det P\ne 0$. Положим теперь $z=(x+2\nu y)\kappa$. Тогда при $z\to\infty$ в соответствии с (1.1), (1.2) и (2.3) получаем, что $D\to 1$, $\Phi\to 0$ равномерно по $t\in(-\infty,t_0]$, то есть $u\to 0$ и $\phi\to 0$ при $z\to\infty$ равномерно по $t\in(-\infty,t_0]$. С другой стороны, с помощью (2.3) убеждаемся, что равномерно по $t\in(-\infty,t_0]$ при $z\to-\infty$ справедливы соотношения

$$D\exp(-2\kappa\mu_0 z)\to 2^{-N}\omega_0\det Q, \quad \Phi D^{-1}\to 0,$$

где

$$\mu_0=\sum_{m=1}^{N}\mu_m, \quad \omega_0=\prod_{m=1}^{N}\mu_m^{-1}\prod_{1\le m<n\le N}\left(\frac{\mu_m-\mu_n}{\mu_m+\mu_n}\right)^2.$$

Отсюда следует, что при $z\to-\infty$ равномерно по $t\in(-\infty,t_0]$ имеем $u\to 0$ и $\phi\to 0$. Таким образом, при $t\in(-\infty,t_0]$ рассматриваемое нами решение системы (1) действительно описывает уединенную волну, совершающую финитное движение, то есть при всех $t\in(-\infty,t_0]$ находящуюся в некоторой полосе вида $|x+2\nu y|\le$ $\le C_0$, где $C_0>0$.

Посмотрим теперь, что произойдет с нашим решением при $t\to\infty$. С этой целью предположим, что входящие в (2.2) величины τ_m все разные, $m=1,\dots,N$, а их нумерация такова, что при любых $m\ne n$ выполняется неравенство

$$(\tau_m-\tau_n)\mu_m>0, \quad \text{если} \quad m<n. \tag{2.4}$$

Возьмем, далее, диагональную матрицу M вида

$$M=\exp(-\mu\tau t), \tag{2.5}$$

где τ - вещественный параметр, а μ - диагональная матрица с элементами μ_m на главной диагонали, $m=1,\dots,N$, то есть

$$\mu=\operatorname{diag}(\mu_1,\dots,\mu_N). \tag{2.6}$$

В силу (1.5) справедливы равенства

$$D = \det \begin{vmatrix} I & -\hat{Q} \\ & \\ \hat{P} & I \end{vmatrix}, \qquad \Phi = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\eta} \\ 0 & I & -\hat{Q} \\ \zeta & \hat{P} & I \end{vmatrix}, \tag{2.7}$$

где

$$\hat{P} = MPM, \quad \hat{Q} = M^{-1} Q M^{-1}, \quad \zeta = M\lambda, \quad \eta = M^{-1} q. \tag{2.8}$$

На основании (1.1), (1.2), (2.5) и (2.8) элементы $\hat{P}_{m,n}$ матрицы P имеют вид

$$\hat{P}_{m,n} = \frac{\zeta_m \bar{\zeta}_n}{\omega_m + \bar{\omega}_n}, \quad m, n = 1, \dots, N, \tag{2.9}$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ - компоненты вектора-столбца $\zeta = M\lambda$. В соответствии с (1.1), (2.2), (2.5) и (2.6) справедливо равенство

$$\zeta_m = \exp(\mu_m z) \exp[i\nu x - i(\mu_m^2 - \nu^2) y], \quad m = 1, \dots, N, \tag{2.10}$$

где $z = x + 2\nu y - \tau t$. Наконец, с учетом (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) и (2.8) получаем, что компоненты $\eta_1, \dots, \eta_N$ вектора-столбца $\eta = M^{-1} q$ и элементы $\hat{Q}_{m,n}$ матрицы $\hat{Q}$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\eta_m = \exp[\mu_m(\tau - \tau_m) t] \{ a_m \exp(i\sigma_m t) +$$

$$+ b_m \exp[(\mu_m \tau_m + 4i\gamma_m) t] \}, \quad m = 1, \dots, N,$$

$$\hat{Q}_{m,n} = \exp[\mu_m(\tau - \tau_m) t + \mu_n (\tau - \tau_n) t] \times$$

$$\times \{ \kappa \frac{\bar{a}_m a_n}{\bar{\rho}_m^3 + \rho_n^3} \exp[-i(\sigma_m - \sigma_n) t] - \tag{2.11}$$

$$- \kappa \frac{\bar{a}_m b_n}{\omega_n^3 - \rho_m^3 + i\gamma_n} \exp[\mu_n \tau_n t - i(\sigma_m - 4\gamma_n) t] -$$

$$- \kappa \frac{a_n \bar{b}_m}{\bar{\omega}_m^3 - \bar{\rho}_n^3 - i\gamma_m} \exp[\mu_m \tau_m t + i(\sigma_n - 4\gamma_m) t] -$$

$$- \kappa \frac{\bar{b}_m b_n}{\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3 - i(\gamma_m - \gamma_n)} \exp[(\mu_m \tau_m + \mu_n \tau_n) t - 4i(\gamma_m - \gamma_n) t] \},$$

$$m, n = 1, \dots, N.$$

Предположим теперь, что входящий в равенства (2.5) и (2.11) параметр $\tau\in(-\infty,\infty)$ выбран так, что при любом $m=1,\dots,N$ выполняется неравенство

$$(\tau-\tau_m)\mu_m<0\,,\quad m=1,\dots,N\,. \tag{2.12}$$

Тогда согласно (2.3) и (2.11) получаем, что при $t\to\infty$ справедливы соотношения

$$\eta_m\to 0,\quad m=1,\dots,N,\quad \hat{Q}_{m,n}\to 0,\quad m,n=1,\dots,N\,.$$

Отсюда в силу (2.7), (2.9) и (2.10) вытекает, что при любом фиксированном $z=x+2\nu y-\tau t$ и $t\to\infty$ имеем $D\to 1$, $\Phi\to 0$, то есть на основе (1.6) при любом фиксированном z и $t\to\infty$ получаем, что $u\to 0$ и $\phi\to 0$. Это значит, что интересующее нас решение при $t\to\infty$ не содержит бегущих волн с фазовой скоростью τ, удовлетворяющей условию (2.12). С другой стороны, предположим, что параметр $\tau\in(-\infty,\infty)$ выбран так, что при любом $m=$ $=1,\dots,N$ справедливо неравенство

$$(\tau-\tau_m)\mu_m>0\,,\quad m=1,\dots,N. \tag{2.13}$$

С учетом (2.3) и (2.11) получаем, что в этом случае при $t\to\infty$ справедливы асимптотики

$$\eta_m\exp[\mu_m(\tau_m-\tau)t]\sim a_m\exp(i\sigma_m t)\,,\quad m=1,\dots,N,$$

$$\hat{Q}_{m,n}\exp[\mu_m(\tau_m-\tau)t+\mu_n(\tau_n-\tau)t]\sim$$

$$\sim\frac{\bar{a}_m a_n}{\rho_m^3+\bar{\rho}_n^3}\exp[-i(\sigma_m-\sigma_n)t]\,,\quad m,n=1,\dots,N\,.$$

В соответствии с (2.7), (2.9) и (2.10) отсюда следует, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ выполняются соотношения

$$D\exp\Big[-2\sum_{m=1}^{N}\mu_m(\tau-\tau_m)t\Big]\to(\det\hat{P})(\det R)\,,$$

$$\Phi\exp\Big[-2\sum_{m=1}^{N}\mu_m(\tau-\tau_m)t\Big]\to 0\,,$$

где R – квадратная матрица порядка N с элементами $R_{m,n}$ вида

$$R_{m,n} = \kappa \frac{\bar{a}_m a_n}{\rho_m^3 + \rho_n^{-3}} \exp[-i(\sigma_m - \sigma_n)t], \quad m,n = 1, \ldots, N.$$

В том случае, когда величины ρ_m^3 все разные, $m = 1, \ldots, N$, очевидно, что $\det R \neq 0$. В этой ситуации с помощью (1.6) легко получаем, что при любом фиксированном z и $t \to \infty$ имеют место асимптотики $u \to 0$ и $\phi \to 0$, то есть рассматриваемое нами решение системы (1) при $t \to \infty$ также не содержит бегущих волн с фазовой скоростью τ, удовлетворяющей условию (2.13).

Рассмотрим, далее , случай, когда параметр $\tau \in (-\infty, \infty)$ выбран так, что при некотором целом r, удовлетворяющем условию $1 \le r < N$, выполняются неравенства

$$(\tau - \tau_r)\mu_r < 0, \quad (\tau - \tau_{r+1})\mu_{r+1} > 0. \tag{2.14}$$

Согласно (2.4) отсюда следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned} &(\tau - \tau_m)\mu_m < 0, \quad \text{если } m = 1, \ldots, r, \\ &(\tau - \tau_m)\mu_m > 0, \quad \text{если } m = r+1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.15}$$

В силу (2.3), (2.11) и (2.15) находим, что в данной ситуации при $t \to \infty$ справедливы асимптотики

$$\eta_m \to 0, \quad \text{если} \quad m = 1, \ldots, r,$$

$$\eta_m \exp[\mu_m(\tau_m - \tau)t] \sim a_m \exp(i\sigma_m t), \text{ если } m = r+1, \ldots, N,$$

$$\hat{Q}_{m,n} \to 0, \text{ если } m,n = 1, \ldots, r,$$

$$\hat{Q}_{m,n} \exp[\mu_n(\tau_n - \tau)t] \to 0, \text{ если } m = 1, \ldots, r, \text{ а } n = r+1, \ldots, N,$$

$$\hat{Q}_{m,n} \exp[\mu_m(\tau_m - \tau)t] \to 0, \text{ если } m = r+1, \ldots, N, \text{ а } n = 1, \ldots, r,$$

$$\hat{Q}_{m,n} \exp[\mu_m(\tau_m - \tau)t + \mu_n(\tau_n - \tau)t] \sim$$

$$\sim \kappa \frac{\bar{a}_m a_n}{\rho_m^3 + \bar{\rho}_n^{3}} \exp[-i(\sigma_m - \sigma_n)t], \text{ если } m,n = r+1, \ldots, N.$$

На основании (2.7), (2.9) и (2.10) отсюда следует, что при любом фиксированном z и $t \to \infty$ имеют место соотношения

$$D \exp[-2 \sum_{m=r+1}^{N} \mu_m(\tau - \tau_m)t] \to (\det P_r)(\det R_r),$$

$$\Phi \exp\left[-2\sum_{m=r+1}^{N} \mu_m(\tau-\tau_m)t\right] \to 0, \tag{2.16}$$

где P_r и R_r – квадратные матрицы порядка $N-r$ соответственно с элементами $P_{r,m,n}$ и $R_{r,m,n}$ вида

$$P_{r,m,n} = \frac{\zeta_{r+m}\,\bar{\zeta}_{r+n}}{\omega_{r+m}+\bar{\omega}_{r+n}}, \qquad m,n=1,\dots,N-r,$$

$$R_{r,m,n} = \kappa\,\frac{\bar{a}_{r+m}\,a_{r+n}}{\rho^3_{r+m}+\bar{\rho}^3_{r+n}}\exp[-i(\sigma_{r+m}-\sigma_{r+n})t], \quad m,n=1,\dots,N-r. \tag{2.17}$$

С учетом равенств (1.6) и соотношений (2.16) легко находим, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ выполняются асимптотики $u\to 0$ и $\phi\to 0$, то есть наше решение при $t\to\infty$ не содержит бегущих волн с фазовой скоростью τ, удовлетворяющей условию (2.14). Таким образом, резюмируя сказанное выше, мы получаем, что в силу (2.12)-(2.14) интересующее нас решение системы (1) при $t\to\infty$ не содержит бегущих волн с фазовой скоростью $\tau\neq\tau_m$, $m = 1,\dots, N$. Рассмотрим, наконец, случай, когда $\tau=\tau_r$, $r = 1,\dots, N$. В соответствии с (2.3), (2.4), (2.11) и равенством $\tau=\tau_r$ получаем, что в этом случае при $t\to\infty$ справедливы асимптотики

$\eta_m \to 0$, если $m=1,\dots,r-1$,

$\eta_m \exp[\mu_m(\tau_m-\tau_r)t] \sim a_m \exp(i\sigma_m t)$, если $m=r,\dots,N$,

$\hat{Q}_{m,n}\to 0$, если $m,n=1,\dots,r-1$,

$\hat{Q}_{m,n}\exp[\mu_n(\tau_n-\tau_r)t]\to 0$, если $m=1,\dots,r-1$, а $n=r,\dots,N$,

$\hat{Q}_{m,n}\exp[\mu_m(\tau_m-\tau_r)t]\to 0$, если $m=r,\dots,N$, а $n=1,\dots,r-1$,

$$\hat{Q}_{m,n}\exp[\mu_m(\tau_m-\tau_r)t+\mu_n(\tau_n-\tau_r)t] \sim$$

$$\sim \kappa\,\frac{\bar{a}_m a_n}{\rho^3_m+\bar{\rho}^3_n}\exp[-i(\sigma_m-\sigma_n)t], \text{ если } m,n=r,\dots,N.$$

Согласно (2.7), (2.9) и (2.10) отсюда следует, что при любом фиксированном $z = x + 2\nu y - \tau_r t$ и $t \to \infty$ справедливы соотношения

$$D \exp\left[-2 \sum_{m=r}^{N} \mu_m (\tau_r - \tau_m) t\right] \to$$

$$\to (\det P_{r-1})(\det R_{r-1}) + (\det P_r)(\det R_r), \qquad (2.18)$$

$$\Phi \exp\left[-2 \sum_{m=r}^{N} \mu_m (\tau_r - \tau_m) t\right] \to -(\det \hat{P}_{r-1})(\det \hat{R}_{r-1}), \quad r = 1, \dots, N.$$

Здесь матрицы P_r и R_r при $r = 0, 1, \dots, N-1$ являются квадратными матрицами порядка $N - r$ с элементами $P_{r,m,n}$ и $R_{r,m,n}$, определяемыми выражениями (2.17), а при $r = N$ нужно положить, по определению, $\det P_N = \det R_N = 1$. Далее, матрица $\hat{P}_r$ получается из матрицы P_r в результате замены элементов первого столбца этой матрицы на величины $\zeta_{r+1}, \dots, \zeta_N$, $r = 0, 1, \dots, N-1$, а матрица $\hat{R}_r$ получается из матрицы R_r после замены элементов первой строки этой матрицы на величины $a_{r+1} \exp(i\sigma_{r+1} t), \dots$, $a_N \exp(i\sigma_N t)$, $r = 0, 1, \dots, N-1$. С учетом (2.9), (2.10) и (2.17) из соотношения (2.18) следует, что при $t \to \infty$ в нашем решении содержится N уединенных волн вида

$$u = \frac{2\mu_r^2}{\operatorname{ch}^2 [\mu_r (x + 2\nu y - \tau_r t) + f_r]},$$

$$\phi = A_r \frac{\exp[i\nu x - i(\mu_r^2 - \nu^2) y]}{\operatorname{ch}[\mu_r (x + 2\nu y - \tau_r t) + f_r]}, \qquad (2.19)$$

где f_r и A_r - ограниченные функции $t \in (-\infty, \infty)$. Таким образом, наше решение действительно описывает распад одной уединенной волны на N уединенных волн вида (2.19).

Нелишне отметить, что рассмотренное выше решение сохраняет свою динамику при замене вектора q с компонентами q_m вида (2.1) на вектор q' с компонентами $q'_m = q_m + \epsilon g_m$, где ϵ - малый параметр, а g_m - произвольные ограниченные функции $t \in (-\infty, \infty)$. При этом, конечно, нужно заменить определенные посредством (2.1) элементы $Q_{m,n}$ матрицы Q на величины $Q'_{m,n}$ вида

$$Q'_{m,n} = -4\kappa \exp[-4(\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3)t] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{t} \bar{q}'_m(t') q'_n(t') \exp[4(\bar{\omega}_m^3 + \omega_n^3)t']\,dt'.$$

В заключение необходимо отметить, что описанный выше процесс распада одной уединенной волны на произвольное число уединенных волн не исчерпывает всех возможностей найденного класса решений системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mel'nikov V.K. - Lett.Math.Phys., 1983, v.7, No.2, p.129.
2. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. - Physica D, 1986, v.18, No.1, p.455.
3. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1987, v.112, No.4,p.639.
4. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1989,v.120,No.3,p.451.
5. Satsuma Y. - J.Phys.Soc.Japan, 1976, v.40, No.1, p.286.
6. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. - ДАН СССР, 1970, т.192, № 4, с.753.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 марта 1989 года.