89-122

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-89-122

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛАКСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в "Journal of Physics A"

1989

В настоящем сообщении речь идет о нелинейных эволюционных уравнениях, получаемых следующим образом. Пусть L и A – линейные дифференциальные (по переменной x) операторы, образующие пару Лакса, т.е. пусть дана система нелинейных эволюционных уравнений, представленных в виде

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c\kappa\frac{\partial A}{\partial y} + \kappa[A,L] = 0, \tag{1}$$

где c и κ – константы. Тогда существует оператор Γ вида

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n,$$

такой, что коэффициенты оператора Γ_n зависят от решения ϕ_n уравнения

$$c\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = (L - \eta_n)\phi_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

а зацепленная система уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c\kappa\frac{\partial A}{\partial y} + \kappa[A, L] = \Gamma,$$

$$c\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = (L - \eta_n)\phi_n, \; n = 1, \dots, N$$

интегрируется с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора $L - c\frac{\partial}{\partial y}$. При этом оператор Γ определяется следующим образом.

Пусть операторы L и A имеют вид

$$L = \Lambda\partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k\partial^k, \quad k_0 \geq 0,$$
$$A = \sum_{m=0}^{m_0+1} A_m\partial^{m_0-m+1}, \quad m_0 \geq 0, \tag{2}$$

где ∂ - оператор дифференцирования по переменной x, квадратные матрицы $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}$ и $A_1, \ldots, A_{m_0+1}$ имеют порядок $r_0 \geq 1$, а Λ и A - диагональные матрицы порядка r_0 соответственно с диагональными элементами $\lambda_r \neq 0$ и $a_r \neq 0$, $r = 1, \ldots, r_0$. Рассмотрим теперь линейную систему уравнений

$$c \frac{\partial f_0}{\partial y} = (L - \eta) f_0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \tilde{\psi}_n f_0, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

относительно неизвестных матриц $f_0, f_1, \ldots, f_N$. При этом будем предполагать, что f_0 является квадратной матрицей порядка r_0, матрицы $f_1, \ldots, f_N$ имеют r_1 строк и r_0 столбцов, а матрицы $\psi_1, \ldots, \psi_N$ имеют r_0 строк и r_1 столбцов. Здесь и всюду в дальнейшем знак "~" означает транспонирование. С помощью решения $f_0, f_1, \ldots, f_N$ системы (3) определим величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \kappa A f_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n,$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \frac{\partial^k \tilde{\psi}_n}{\partial x^k} \Lambda \frac{\partial^{k_0 - k} f_0}{\partial x^{k_0 - k}} + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \frac{\partial^s (\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^s} \frac{\partial^{k-s-1} f_0}{\partial x^{k-s-1}} - c \frac{\partial f_n}{\partial y} - (\eta - \eta_n) f_n, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

где $\phi_1, \ldots, \phi_N$ - некоторые (пока неопределенные) матрицы, имеющие r_0 строк и r_1 столбцов, и, следовательно, g_0 является квадратной матрицей порядка r_0, а матрицы $g_1, \ldots, g_N$ имеют r_1 строк и r_0 столбцов.

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять матрицы $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}$, $\phi_1, \ldots, \phi_N$ и $\psi_1, \ldots, \psi_N$ для того, чтобы определенные посредством (2)-(4) матрицы $g_0, g_1, \ldots, g_N$ удовлетворяли условиям

$$c \frac{\partial g_0}{\partial y} - (L - \eta) g_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n g_n = 0, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

С помощью несложных вычислений легко находим, что для справедливости условий (5) необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c\kappa\frac{\partial A}{\partial y} + \kappa[A, L] = \Gamma,$$

$$c\frac{\partial \phi_n}{\partial y} - (L - \eta_n)\phi_n = c\frac{\partial \psi_n}{\partial y} + (\tilde{L} - \eta_n)\psi_n = 0, \; n = 1, \dots, N, \tag{6}$$

где

$$\tilde{L} = (-1)^{k_0+1}\Lambda\partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\partial^k\cdot\tilde{u}_k, \tag{7}$$

а действие оператора Γ на матрицу f_0 определяется равенством

$$\begin{aligned}\Gamma f_0 = &\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{k_0}\Lambda\frac{\partial^{k_0-k}}{\partial x^{k_0-k}}\left(\frac{\partial^k\phi_n}{\partial x^k}\tilde{\psi}_n f_0\right) - \\ &-\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{k_0}(-1)^k\phi_n\frac{\partial^k\tilde{\psi}_n}{\partial x^k}\Lambda\frac{\partial^{k_0-k} f_0}{\partial x^{k_0-k}} + \\ &+\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}u_k\frac{\partial^{k-s-1}}{\partial x^{k-s-1}}\left(\frac{\partial^s\phi_n}{\partial x^s}\tilde{\psi}_n f_0\right) - \\ &-\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\phi_n\frac{\partial^s(\tilde{\psi}_n u_k)}{\partial x^s}\frac{\partial^{k-s-1} f_0}{\partial x^{k-s-1}}.\end{aligned} \tag{8}$$

Из этого равенства следует, что оператор Γ имеет вид

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{k_0}\gamma_k\partial^{k_0-k}, \text{ где } \gamma_0 = \sum_{n=1}^{N}[\Lambda, \phi_n\tilde{\psi}_n]. \tag{9}$$

Таким образом, структура оператора Γ согласована со структурой уравнения (1). Кроме того, согласно (8) и (9) при $k_0 > 0$ имеем

$$\gamma_1 = \sum_{n=1}^{N}\left\{(k_0+1)\Lambda\frac{\partial}{\partial x}(\phi_n\tilde{\psi}_n) - [\Lambda, \phi_n\frac{\partial\psi_n}{\partial x}] + [u_{k_0}, \phi_n\tilde{\psi}_n]\right\}.$$

Система (6) содержит большое число интересных частных случаев. Рассмотрим несколько простейших. Пусть $c = i$, $\kappa = 1$, $\eta_n = \bar{\eta}_n$, $n = 1, \ldots, N$. Беря операторы L и A в виде

$$L = \partial^2 + u, \quad A = 4\partial^3 + 3(u\partial + \partial \cdot u) + ip,$$

где u и p – вещественные функции x, y, t, на основе (6)-(8) получаем систему уравнений [1]

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sum_{n=1}^{N}\epsilon_n|\phi_n|^2\right)\right] = 0,$$

$$i\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + (u - \eta_n)\phi_n, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

которую естественно назвать уравнением Кадомцева – Петвиашвили с самосогласованным источником. Не зависящие от переменной y решения этой системы удовлетворяют уравнению Кортевега – де Вриса с самосогласованным источником. В работах [2,3] указан метод интегрирования уравнения Кортевега – де Вриса с самосогласованным источником в классе быстро убывающих по x функций.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда $c = 0$, $\kappa = -2i$. Далее, возьмем операторы L и A в виде

$$L = \Lambda\partial + U, \quad A = \Lambda\partial^2 + \frac{1}{2}(U\partial + \partial \cdot U) + \frac{1}{2}\Lambda U^2,$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}(1, -1), \qquad U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ \bar{u} & 0 \end{vmatrix}.$$

В результате несложных вычислений, основанных на равенствах (6)-(9), получаем систему уравнений

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + 2|u|^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\sum_{n=1}^{N}\epsilon_n(\phi_n^2 + \bar{\psi}_n^2),$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + u\psi_n - \eta_n\phi_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \bar{u}\phi_n + \eta_n\psi_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N.$$

В работе [4] приведен метод интегрирования этой системы в классе быстро убывающих по x функций.

В заключение подчеркнем, что изложенный выше подход сводит проблему интегрирования системы (10) к исследованию прямой и обратной задач рассеяния для оператора $i\partial_y - \partial_x^2 - u$, где соответственно $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Общая схема интегрирования системы (6) будет опубликована отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mel'nikov V.K. - Lett.Math.Phys., 1983, v.7, p.129.
2. Mel'nikov V.K. - Phys.Lett., 1988, v.A133, p.493.
3. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-88-668, Дубна, 1988.
4. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-88-728, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1989 года.