СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 8880

С.М.Елисеев

РАСЧЕТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ПОЛНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАУБЕРА

1975

Р2 - 8880

С.М.Елисеев

РАСЧЕТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ПОЛНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАУБЕРА

Рассеяние адронов атомными ядрами при высоких и промежуточных энергиях является важным средством изучения структуры ядер. Экспериментальные и теоретические исследования в этом направлении проводятся во многих научных центрах. С введением в скором времени в строй мезонных фабрик (как у нас, так и за рубежом), очевидно,существенно увеличится число опытных даннных об особенностях взаимодействия адронов с ядрами,а также адронов с адронами. Сейчас только начинают появляться экспериментальные данные о столкновении адронов с ядрами. Однако на практике часто возникает необходимость знать поперечное сечение адрон-ядерного взаимодействия. Весьма полезно иметь сводку основных приближенных методов вычисления характеристик адрон-ядерного взаимодействия и простую программу для численных расчетов по существующим моделям.

В данной работе поставлены две основные задачи:

I) рассмотреть дифракционную теорию многократного рассеяния Глаубера, широко применяемую при рассеянии частиц высоких энергий на ядрах. Эта теория, например, позволяет просто связать амплитуду рассеяния адрона высокой энергии на ядре с амплитудой адрон-адронного рассеяния и волновой функцией ядра;

2) разработать удобную математическую программу расчетов поперечных сечений (полных, дифференциальных, полных упругих).

В теории Глаубера /I/ используются адрон-адронная и адрон-ядерная амплитуды в представлении параметра удара:

$$f(q)=\frac{ik}{2\pi}\int e^{i\vec{q}\vec{b}}[1-e^{i\chi(b)}]d\vec{b}, \qquad (I)$$

где $\chi(b)$ - фаза (эйконал), $\vec{q}$ -переданный импульс, $\vec{K}=\frac{\vec{P}}{h}$,

$\vec{P}$ - импульс частицы, $\vec{b}$ - параметр удара (вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной $\vec{K}$).

Если $\chi(\vec{b})$ не зависит от направления $\vec{b}$ (т.е. рассматривается рассеяние центрально-симметричным полем), то в (I) можно произвести интегрирование по углу $\hat{qb}$:

$$f(q)=ik\int J_0(qb)[1-e^{i\chi(b)}]b\,db, \tag{2}$$

J_0 - функция Бесселя нулевого порядка.

Часто вводят обозначение

$$\Gamma(\vec{b})=1-e^{i\chi(\vec{b})}, \tag{3}$$

$\Gamma(b)$ называют профиль-функцией.

Имеем:

$$f(q)=\frac{ik}{2\pi}\int e^{i\vec{q}\vec{b}}\Gamma(b)d\vec{b}, \tag{4}$$

или, если воспользоваться обратным фурье-преобразованием,

$$\Gamma(b)=\frac{1}{2\pi ik}\int e^{-i\vec{q}\vec{b}}f(q)d\vec{q}. \tag{5}$$

Пусть ядро состоит из A фиксированных нуклонов, положения которых задаются векторами $\vec{S}_1,\vec{S}_2,\cdots,\vec{S}_A$ ($|\vec{S}_i|$ - расстояние от центра i -нуклона до оси, проходящей через центр ядра параллельно импульсу падающей частицы). Перечислим основные допущения теории Глаубера /I/.

I) Сдвиг фазы рассеяния на ядре $\chi(\vec{b},\vec{S}_1,\cdots\vec{S}_A)$ равен сумме сдвигов фаз рассеяния на отдельных нуклонах:

$$\chi(\vec{b},\vec{S}_1,\dots,\vec{S}_A)=\sum_{\ell=1}^{A}\chi_\ell(\vec{b}-\vec{S}_\ell). \tag{6}$$

2) Рассматривается рассеяние частицы высокой энергии на слабосвязанной системе:

$$U/E \ll 1. \tag{7}$$

3) Длина волны налетающей частицы меньше радиуса ее взаимодействия с нуклоном

$$\chi \ll a. \tag{8}$$

4) Пренебрегается искажением волны из-за наличия дифракционных эффектов при рассеянии частицы на внутриядерных нуклонах

$$R \ll a^2/\chi, \tag{9}$$

где R - радиус ядра.

5) Углы рассеяния малы, так что переданный импульс примерно перпендикулярен импульсу падающей частицы:

$$|\vec{q}|=|\vec{K}_i-\vec{K}_f|\approx|\vec{K}_i|\sin\theta. \tag{10}$$

На основании вышеизложенного амплитуду рассеяния на ядре можно записать в виде /2/

$$F(Q)=\frac{ik}{2\pi}\int e^{i\vec{Q}\vec{b}}[1-e^{i\chi(\vec{b},\vec{S}_1,\dots,\vec{S}_A)}]d\vec{b}=\frac{ik}{2\pi}\int e^{i\vec{Q}\vec{b}}\,\Gamma(\vec{b},\vec{S}_1,\dots,\vec{S}_A)\,d\vec{b}, \tag{11}$$

где $\Gamma(\vec{b},\vec{S}_1,\dots,\vec{S}_A)=1-\prod_{\ell=1}^{A}[1-\Gamma_\ell(\vec{b}-\vec{S}_\ell)]=$

$$\sum_{\ell=1}^{A}\Gamma_\ell(\vec{b}-\vec{S}_\ell)-\sum_{\ell\neq n}\Gamma_\ell\Gamma_n+\sum\Gamma\Gamma\Gamma-\cdots$$

Первая сумма в этом равенстве соответствует однократному рассеянию частицы в ядре (импульсному приближению), вторая - двухкратному и т.д.

В действительности ядра являются сложными системами, в которых элементарные составляющие (нуклоны) непрерывно движутся. Рассмотрение взаимодействия адрона с такой системой является сложной проблемой. Задача упрощается /I/, если предположить, что скорости нуклонов за время взаимодействия изменяются мало и передача энергии в упругих взаимодействиях мала. Как показал Глаубер, амплитуда рассеяния с переходом ядра из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ определяется в таком случае матричным элементом функции Γ :

$$F_{fi}(Q)=\frac{ik}{2\pi}\int e^{i\vec{Q}\vec{b}}\int \Psi_f^*(r)\Gamma(\vec{b},\vec{s}_1\ldots\vec{s}_A)\Psi_i(r)\delta\Big(A^{-1}\sum_{j=1}^{A} r_j\Big)\prod_{\ell=1}^{A}d\vec{r}_\ell\, d\vec{b}\,. \qquad (I2)$$

Здесь Ψ - волновая функция ядра в системе координат, связанной с его центром. Появление дельта - функции обусловлено законом сохранения полного импульса ядра /I/.

Далее можно выразить F_{fi} через амплитуды f_j рассеяния на отдельных нуклонах. Используя формулы (II, I2), для амплитуды упругого рассеяния F_{ii} получаем

$$F_{ii}(Q)=\frac{ik}{2\pi}\int e^{i\vec{Q}\vec{b}}\int|\Psi(r)|^2\Big\{1-\prod_{n=1}^{A}\Big[1-\frac{1}{2\pi ik}\int e^{-iq_n(b-s_n)}f_n(q_n)d\vec{q}_n\Big]\Big\}\cdot \qquad (I3)$$
$$\delta\Big(A^{-1}\sum_{j=1}^{A} r_j\Big)\prod_{\ell=1}^{A}d\vec{r}_\ell\, d\vec{b}\,.$$

Преобразованием Гартенхауза-Шварца /2/ дельта-функция из равенства (I3) исключается, но в формуле для амплитуды возникает множитель $G(q)$. В случае осцилляторных волновых функций этот множитель равен: $G(q)=e^{q^2R^2/4A}$,
для тяжелых ядер ($A\gg 1$) $G(q)\approx 1$.
Предположим, что полная ядерная плотность равна произведению одночастичных плотностей распределения нуклонов x). Из (I3) получаем:

$$F_{ii}(Q)=\frac{ikG(Q)}{2\pi}\int e^{i\vec{Q}\vec{b}}\Big\{1-\Big[1-\frac{1}{2\pi ik}\int e^{-i\vec{q}\vec{b}}f_p(q)S_p(q)d\vec{q}\Big]^Z\Big[1-\frac{1}{2\pi ik}\int e^{-i\vec{q}\vec{b}}f_n(q)S_n(q)\Big]^N\Big\}d\vec{b}, \qquad (I4)$$

где $S_{p,n}(q)=\frac{4\pi}{q}\int_0^\infty r\sin(qr)\rho_{p,n}(r)d\vec{r}$, $\int\rho_{p,n}(r)\,d\vec{r}=1$,
f_p, f_n - амплитуды рассеяния адронов на протонах и нейтронах соответственно, ρ_p, ρ_n - одночастичные плотности распределения протонов и нейтронов. При $A\gg 1$

$$F_{ii}(Q)=\frac{ik}{2\pi}\int e^{i\vec{Q}\vec{b}}\Big\{1-e^{\frac{i}{2\pi k}\left[Z\int e^{-i\vec{q}\vec{b}}f_p(q)S_p(q)d\vec{q}+N\int e^{-i\vec{q}\vec{b}}f_n(q)S_n(q)d\vec{q}\right]}\Big\}d\vec{b}. \qquad (I5)$$

В области высоких энергий адрон-нуклонная амплитуда обычно параметризуется:

$$f(q)=\frac{K(i+\gamma)\sigma}{4\pi}\,e^{-\beta^2q^2/2}, \qquad (I6)$$

здесь σ - полное сечение, $\gamma=Re f/Im f$, β - величины, известные из эксперимента.
Если в окрестности $q=0$ $S(q)$ падает быстрее, чем $f(q)$, то $f(0)$ можно вынести за знак интеграла и получается формула для амплитуды рассеяния в оптическом пределе теории Глаубера:

$$F_{ii}(Q)=ik\int J_0(Qb)\Big\{1-e^{i[\sigma_p(i+\gamma_p)T_p(b)+\sigma_n(i+\gamma_n)T_n(b)]}\Big\}b\,db, \qquad (I7)$$

$$T_p(b)=Z\int_0^\infty\rho_p\big(\sqrt{b^2+t^2}\big)dt\,,\quad T_n(b)=N\int_0^\infty\rho_n\big(\sqrt{b^2+t^2}\big)\,dt\,. \qquad (I8)$$

---

x) Расчеты /3/ показывают, что результаты мало изменяются, если использовать антисимметричные волновые функции ядра (определитель Слэтера).

Выражения (I4) и (I7) дают возможность вычислять дифференциальные и полные сечения рассеяния адронов на ядрах, если заданы одночастичные плотности распределения протонов и нейтронов и параметры элементарных амплитуд. В практических расчетах для различных ядер используются следующие одночастичные плотности[x]:

I) гауссовское распределение:

$$\rho(r)=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\alpha^2 r^2}; \qquad (I9)$$

2) плотности, соответствующие волновым функциям гармонического осциллятора:

$$\rho=\prod_{j=1}^{4}\rho_s(r)\prod_{j=5}^{A}\rho_p(r_j), \qquad (20)$$

$$\rho_s=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\alpha^2 r^2}, \quad \rho_p=\left(\frac{2\alpha^2}{3\pi^{1/2}}\right)r^2 e^{-\alpha^2 r^2},$$

$$\rho=\frac{4\alpha^3}{\pi^{3/2}}\left(1+\delta\alpha^2 r^2\right)e^{-\alpha^2 r^2}, \quad \delta=(A-4)/6; \qquad (2I)$$

3) распределение Ферми:

$$\rho=\rho_0\,\frac{1}{e^{\frac{r-c}{\alpha}}+1}\,. \qquad (22)$$

В Приложении дана программа, позволяющая вычислять поперечные сечения по элементарным амплитудам (I6) и плотностям (I9–22). Плотности могут быть заданы и в виде таблиц, расчет производится по общим формулам (I4) и в оптическом приближении (I7). Для пользования программой практически не требуется знать программирования: достаточно ввести ее в машину и обратиться к ней (см. Приложение). При этом предусмотрена выдача как результатов расчетов, так и используемых параметров ядерной модели и адрон-адронной амплитуды. Некоторые результаты конкретных расчетов и сравнение с экспериментом опубликованы ранее /4/.

---

[x] Параметры, входящие в распределения плотностей, можно определить из опытов по рассеянию электронов так, как это сделано, например, в работе /3/.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обращение к программе осуществляется при помощи оператора

```
CALL HESON(A,Z,R,AM,T,L,N,ND,TD,TT,TM,
SP,SN,RP,RN,BP,BN,K,CP,CN,AP,AN,FP,FN,I,J) .
```

Здесь A – атомный номер ядра-мишени, Ze – заряд ядра, $R = 1/\alpha$ (см. формулы (I9-2I)) AM (ГэВ) – масса налетающего адрона, T – кинетическая энергия, L = I,2,3 при вычислении полных, полных упругих и дифференциальных сечений соответственно, N = I,2,3,4 – расчет по общей формуле (I4) и плотностям (I9,20 I9,2I), $(K = 1)$. N = 5 – расчет по (I4) и плотностям, заданным в виде (22), $K = 1$, где CP, CN, AP, AN – значения параметров c и α в формуле (22) для протонов и нейтронов. N =4 $(K=2)$ – расчет по формуле (I4) и одночастичным плотностям распределения протонов и нейтронов, заданным с постоянным шагом в массивах FP и FN, $I-1$, $J-1$ – число точек, шаги распределений задаются в ячейках $FP(I)$, $FN(J)$. N = 6 $(K=1,2)$ – расчет сечений в оптическом пределе теории Глаубера (I7). $SP(mb), SN(mb), RP, RN, BP(ГэВ/c)^{2}, BN(ГэВ/c)^{-2}$ – параметры σ, γ, β (см.(16)) амплитуды взаимодействия первичной частицы с протонами и нейтронами соответственно, $TD(ГэВ/c)^2$ – шаг по квадрату переданного импульса для вычисления дифференциальных сечений в ND точках. $TT(ГэВ/c)^2$ – верхний предел интегрирования при вычислении полного упругого сечения, $TM(ГэВ/c)$ – верхний предел интегрирования по переданному импульсу в формуле (I4) (достаточно положить $TM \sim 0.6 \div 0.9$ для $T \sim 1$ ГэВ).

Необходимо точно указывать только те параметры ядерной модели, которые используются в конкретных расчетах. Если применяется S, P – волновая модель (20), например, то при обращении к HESON нужно задать правильно лишь R, а значения параметров (CP, CN и т.д.) других возможных моделей – по порядку величины. В приведенной программе дифференциальные сечения вычисляются в лабораторной системе координат. Если убрать из программы HESON девятнадцатую перфокарту, то на печать будут выдаваться сечения в системе центра масс.

В таблице, которая может служить тестом для проверки работы программы, даны сечения при различных переданных импульсах. Для проверки точности использованных численных методов интегрирования в тесте вместо (22) (N = 4) было взято распределение (I9). Видно, что результаты численного интегрирования (N = 4) примерно совпадают с результатами аналитического интегрирования (N =2). Табличные значения были получены при обращении к программе HESON (N = 2,4):

```
               12.,6.,
CALL HESON(16.,8.,1.71,0.94,1.,3,N,4,0.1,
0.3,0.6,44.,44.,-0.275,-0.275,5.45,5.45,1,1.,1.,
1.,1.,FP,FN,1,1)
```

ТАБЛИЦА

$q^2 (ГэВ/c)^{-2}$	$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\frac{mb}{st}\right), N=1$	$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\frac{mb}{st}\right), N=4$
0	$1.424 \cdot 10^4$	$1.423 \cdot 10^4$
0.I	5.099	5.095
0.2	7.720	7.668
0.3	0.337	0.339

```
      SUBROUTINE HESON(AT,ZN,RN,AM,TK,LSIGMA,NFUN,NDS,TT,TTMAX,TF,S,SN,
     M R1,~~R5~~,B1,~~B2~~,KK,~~AN~~,AP,~~BN~~,BP,FFP,FNN,II,JJ)
      DIMENSION FPP(200),FNN(200)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN,DIF,FUN
      REAL M
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1     RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      COMMON/DVV/ROP,RON,ASP,CP,ASN,CN,PI,FFP(200),FFN(200),I,J,K
      EXTERNAL FUNC1,FUNC2,FUN2,FP,FN
      DO 4 I=1,II $ FFP(I)=FPP(I)
    4 CONTINUE
      DO 5 J=1,JJ $ FFN(J)=FNN(J)
    5 CONTINUE
      HC=0.19733 $ PI=3.1415927
      ASN=AN   $   CP=BP   $   CN=BN   $ RB=3.5*AT**(1./3.)
      A=AT $ Z=ZN $ P=RN $ T=TK $ L=NFUN $ RR1=R1 $ ASP=AP $ M=AM $RR5=R5

      PC=4.0*(A*0.938)**2 *T*(T+2.*M)/((A*0.938)**2 +A*1.875*(T+M)+M*M)
     1 /HC**2 $ R2=R**2 $ R3=3.5*AT**(1./3.) $ TTM=TTMAX/HC**2

       PC=4.*((T+M)**2-M**2)/HC**2
      R4=2.*R2/3. $ W=4.*A/R2 $ HHB=R3/200. $  HH=RB/100. $HHQ=TTM/100.
      BB1=B1*HC**2   $   BB2=B2*HC**2  $  SS=S*0.1  $  SSM=0.1*SN
      P1=1./(R2+2.*BB1)   $  P2=1./(R2+2.*BB2)  $  TFF=TF/HC
      Q3=0.1*P1*S*(1.-(0.,1.)*R1)/(2.*PI) $  SQ=TFF/200.$ K=KK
      Q2=0.1*P2*SN*(1.-(0.,1.)*R5)/(2.*PI)   $ J=JJ $ I=II
      ROP=1.$RON=1.$Q4=0.$CALL SIMPB(0.,RB,HH,FP,RAP)
      CALL SIMPB(0.,RB,HH,FN,RAN)  $  ROP=1./RAP $  RON=1./RAN
      IF(NFUN-5)84,41,84
   41 Q4=0.
      DO 42 IW=1,202$ CALL SIMPB (0.,RB,HH,FP,SQ1)
      WW1(IW)=Q4*SQ1*SS*((0.,1.)+RR1)*EXP(-BB1*Q4**2/2.)/(4.*PI)
      CALL SIMPB (0.,RB,HH,FN,SQ1)
      WW2(IW)=Q4*SQ1*SSM*((0.,1.)+RR5)*EXP(-BB2*Q4**2/2.)/(4.*PI)
   42 Q4=Q4+SQ
   84 IF(NFUN-1)65,40,85
   65 FT=0. $ QQ=(1.,0.) $ DO 86 IT=1,202 $ TFUN(IT)=FUN(FT)
   86 FT=FT+HHB
   40 GO TO (1,2,3),LSIGMA
    1 IF(NFUN-1)11,11,13
   11 GLAU=DIF(0.)*20.*PI
      PRINT 50,NFUN,AT,ZN,RN,TK,M,S,SN,R1,R5,B1,B2,GLAU $ RETURN
   50 FORMAT(2X7HVARIANT,I2,2X2HA=F6.1,2X2HZ=F6.1,
     * 2X2HR=F6.2,3HFM.,2X2HT=F8.3,
     1 2X2HM=F6.3,2X3HS+=F6.1,2X3HS0=F6.1,2X4HRE+=F6.3,2X4HRE0=F6.3/,
     2 2X3HB+=F5.1,2X3HB0=F5.1,
     3 13H(GEV/C)**(-2),2X10HSIG. TOT.=F9.3,3HMB.)
   13 Q1=0.0 $ QQ=(1.0,0.0) $ CALL SIMPB(0.0,R3,HHB,FUNC1,BAIR)
      GLAU=40.*PI*BAIR
      PRINT 50,NFUN,AT,ZN,RN,TK,M,S,SN,R1,R5,B1,B2,GLAU $ RETURN
    2 IF(NFUN-1)21,21,43
   21 CALL SIMPQ(0.0,TTM,HHQ,FUNC2,AIQ) $ GLAU=AIQ*2.5*PI
      PRINT 50,NFUN,AT,ZN,RN,TK,M,S,SN,R1,R5,B1,B2,GLAU,TTMAX $ RETURN
   60 FORMAT(2X7HVARIANT,I2,2X2HA=F6.1,2X2HZ=F6.1,
     * 2X2HR=F6.2,3HFM.,2X2HT=F8.3,
     1 2X2HM=F6.3,2X3HS+=F6.1,2X3HS0=F6.1,2X4HRE+=F6.3,2X4HRE0=F6.3/,
```

```
     2 2X3HB+=F5.1,2X3HB0=F5.1,13H(GEV/C)**(-2),
     3 2X9HSIG. EL.=F8.2,3HMB.,2X9HQ**2/MAX=F6.3,10H(GEV/C)**2)
   43 CALL SIMPQ(0.,TTM,HHQ,FUN2,AIQ) $ GLAU=AIQ*10.*PI
      PRINT 60,NFUN,AT,ZN,RN,TK,M,S,SN,R1,R5,B1,B2,GLAU,TTMAX $ RETURN
    3 TD=0.  $  DO 87 ID=1,NDS
      CT=180.*ASIN(SQRT(1.-(1.-2.*TD/(PC*HC**2))**2))/PI
      IF(NFUN-1)31,31,33
   31 GLAU=PC*10./16.*FUNC2(TD/HC**2)  $  GO TO 88
   33 GLAU=PC*10./4.*FUN2(TD/HC**2)
   88 PRINT 70,NFUN,AT,ZN,RN,TK,M,S,SN,R1,R5,B1,B2,GLAU,TD,CT
   70 FORMAT(2X7HVARIANT,I2,2X2HA=F6.1,2X2HZ=F6.1,
     * 2X2HR=F6.2,3HFM.,2X2HT=F8.3,
     1 2X2HM=F6.3,2X3HS+=F6.1,2X3HS0=F6.1,2X4HRE+=F6.3,2X4HRE0=F6.3/,
     2 2X3HB+=F5.1,2X3HB0=F5.1,13H(GEV/C)**(-2),
     3 15H DSIGMA/DOMEGA=E12.5,5HMB/SR,2X5HQ**2=F6.3,10H(GEV/C)**2,
     4  2X5HANG.=F8.3,5H DEG.)
      TD=TD+TT
   87 CONTINUE
      RETURN
      END


      FUNCTION DPM(XD)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1     RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      COMMON/DVV/ROP,RON,ASP,CP,ASN,CN,PI,FFP(200),FFN(200),I,J,K
      GO TO (10,20),K
   10 DPM=ROP/(1.+EXP((XD-CP)/ASP))
      RETURN
   20 II=XD/FFP(I)+1.01
      IF(XD-FFP(I))30,30,40
   30 DPM=FFP(II) $ RETURN
   40 IF(I-II-2)50,50,60
   50 DPM=FFP(I-1) $ RETURN
   60 DPM=FFP(II)+(FFP(II+1)-FFP(I))*(XD-FFP(I)*(II-1))/FFP(I)
      RETURN
      END


      FUNCTION DNM(XD)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1     RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      COMMON/DVV/ROP,RON,ASP,CP,ASN,CN,PI,FFP(200),FFN(200),I,J,K
      GO TO (10,20),K
   10 DNM=RON/(1.+EXP((XD-CN)/ASN))
      RETURN
   20 II=XD/FFN(I)+1.01
      IF(XD-FFN(I))30,30,40
   30 DNM=FFN(II) $ RETURN
   40 IF(I-II-2)50,50,60
   50 DNM=FFN(I-1) $ RETURN
   60 DNM=FFN(II)+(FFN(II+1)-FFN(I))*(XD-FFN(I)*(II-1))/FFN(I)
      RETURN
      END
```

```
      COMPLEX FUNCTION FUN(X)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,                 B,C,V,U,WW1,WW2,TFUN,RE1,RE2,W1,W2
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      EXTERNAL W1,W2,WP,WN
      N1=Z  $  N2=A-Z  $  GO TO (20,20,30,40,50,60),L
   20 B=1.-Q3*EXP (-P1*X**2)  $  V=1.-Q2*EXP (-P2*X**2)
      C=1.-Q3*(1.-R4*P1+R4*P1**2*X**2)*EXP (-P1*X**2)
      U=1.-Q2*(1.-R4*P2+R4*P2**2*X**2)*EXP (-P2*X**2)
      FUN=(1.-B**2*V**2*C**(N1-2)*U**(N2-2))*X*QQ  $  RETURN
   30 B=1.-Q3*EXP (-P1*X**2)  $  V=1.-Q2*EXP (-P2*X**2)
      FUN=(1.-B**N1*V**N2)*X*QQ  $  RETURN
   40 C=Q3*(1.-R4*(A-4.)*P1*(1.-P1*X**2)/A)*EXP (-P1*X**2)
      U=Q2*(1.-R4*(A-4.)*P2*(1.-P2*X**2)/A)*EXP (-P2*X**2)
      FUN=(1.-(1.-C)**N1*(1.-U)**N2)*X*QQ  $  RETURN
   50 Q=X$CALL SIMPQ1(0.,TFF,SQ,W1,RE1)$CALL SIMPQ1(0.,TFF,SQ,W2,RE2)
      FUN=(1.-(1.+(0.,1.)*RE1)**N1*(1.+(0.,1.)*RE2)**N2)*X*QQ
      RETURN
   60 Q=X  $  CALL SIMPQ1(0.,RB,HH,WP,RP)  $  RP=2.*RP
      CALL SIMPQ1(0.,RB,HH,WN,RN)  $  RN=RN*2.
      FUN=(1.-(1.-0.5*(1.-(0.,1.)*RR1)*SS*RP)**N1*
     *  (1.-0.5*(1.-(0.,1.)*RR5)*SSM*RN)**N2)*X*QQ
      RETURN
      END
```

```
      COMPLEX FUNCTION W1(X1)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      IX1=X1/SQ+1.50 $ W1=WW1(IX1)*BESJ0(Q*X1) $  Q4=X1
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION FUN2(Y)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSN,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      EXTERNAL FUNC1
      Q1=Y  $  QQ=(1.,0.)  $  CALL SIMPB(0.,R3,HHB,FUNC1,BAIR)
      QQ=(0.,-1.)  $  CALL SIMPB(0.,R3,HHB,FUNC1,BAIC)
      FUN2=(BAIR**2+BAIC**2)*EXP (2.*Y/W)
      RETURN
      END
```

```
      COMPLEX FUNCTION W2(X1)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      IX1=X1/SQ+1.50 $ W2=WW2(IX1)*BESJ0(Q*X1) $ Q4=X1
      RETURN
      END
```

```
      COMPLEX FUNCTION DIF(X)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,RF,HF, RFHF,WW1,WW2,TFUN
 ?    COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      N=Z+0.1  $  RF=(0.,0.)  $  HF=(0.,0.)  $  RFHF=(0.,0.)
      DO 10 I=1,N  $  E=I  $  J=I+1
   10 RF=RF+(-1.)**J*FA(N)/(FA(I)*FA(N-I)*E)*Q3**I*EXP (-X/(4.*E*P1))
      N=A-Z+0.1 ← ?
      DO 20 I=1,N  $  E=I  $  J=I+1
   20 HF=HF+(-1.)**J*FA(N)/(FA(I)*FA(N-I)*E)*Q2**I*EXP (-X/(4.*E*P2))
      NZ=Z+0.1  $  NN=A-Z+0.1
      DO 40 I=1,NN
      DO 30 J=1,NZ  $  E1=I  $  E2=J
   30 RFHF=RFHF+(-1.)**(I+J)*
     * FA(NN)/(FA(I)*FA(NN-I))*Q2**I*EXP (-X/(4.*E1*P2+4.*E2*P1))*
     * FA(NZ)/(FA(J)*FA(NZ-J))*Q3**J/(P1*E2+P2*E1)
   40 CONTINUE
      DIF=(RF/P1+HF/P2-RFHF)*EXP(X/W)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SIMPQ1(A1,B1,H,F,SUM)
      COMPLEX F,SUM
      N1=(B1-A1)/(2.*H)-2. $ SUM=(F(A1)+F(B1)+4.*F(A1+H))*H/3. $ X1=A1
      DO 10 I=1,N1  $  X1=X1+2.*H
      SUM=SUM+(2.*F(X1)+4.*F(X1+H))*H/3.
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      COMPLEX FUNCTION FUNC1(X)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,              FUN,           WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      IX=X/HHB+1.5  $  IF(Q1)1,1,2
    1 FUNC1=TFUN(IX)*QQ  $  RETURN
    2 FUNC1=QQ*TFUN(IX)*BESJ0(X*SQRT(Q1))
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION FUNC2(X)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,        DIF,                WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      E1=DIF(X)  $  E2=(0.,1.)*DIF(X)  $  FUNC2=E1**2+E2**2
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION FN(ZF)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      COMMON/DVV/ROP,RON,ASP,CP,ASN,CN,PI
      IF(Q4)20,20,10
   10 FN=4.*PI*ZF*SIN(ZF*Q4)*DNM(ZF)/Q4
      RETURN
   20 FN=4.*PI*ZF**2*DNM(ZF)
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION FP(ZF)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      COMMON/DVV/ROP,RON,ASP,CP,ASN,CN,PI
      IF(Q4)20,20,10
   10 FP=4.*PI*ZF*SIN(ZF*Q4)*DPM(ZF)/Q4
      RETURN
   20 FP=4.*PI*ZF**2*DPM(ZF)
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION WP(Y)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,                       V,U,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      SR=SQRT(Q**2+Y**2)  $  IF(SR-2.*RB)40,40,41
   40 WP=DPM(SR)
      RETURN
   41 WP=0.
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION WN(Y)
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      SR=SQRT(Q**2+Y**2)  $  IF(SR-2.*RB)40,40,41
   40 WN=DNM(SR)
      RETURN
   41 WN=0.
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SIMPQ(A1,B1,H,F,SUM)
      COMMON/DV/TFUN(500),WW1(500),WW2(500),A,Z,R3,R4,P1,P2,W,
     1    RB,SS,SSM,RR1,RR5,BB1,BB2,Q,QQ,Q1,Q2,Q3,Q4,HH,HHB,HHQ,SQ,TFF,L
      COMPLEX QQ,Q2,Q3,WW1,WW2,TFUN
      N1=(B1-A1)/(2.*H) $ G=F(A1) $ SUM=(G+F(B1)+4.*F(A1+H))*H/3.  X1=A1
      DO 10 I=1,N1 $ X1=X1+2.*H $ G1=F(X1+H)
      SUM=SUM+(2.*F(X1)+4.*G1)*H/3.
      IF(G1-G*1.E-6)20,20,10
   10 CONTINUE
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SIMPB(A1,B1,H,F,SUM)
      N1=(B1-A1)/(2.*H)-2. $ SUM=(F(A1)+F(B1)+4.*F(A1+H))*H/3. $ X1=A1
      DO 10 I=1,N1  $  X1=X1+2.*H
      SUM=SUM+(2.*F(X1)+4.*F(X1+H))*H/3.
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION FA(N)
      FA=1  $  DO 10 I=1,N  $  W=I
      FA=FA*W
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Литература

1. R.J.Glauber. Lectures in Theoretical Physics, ed. by W.E.Brittin, Interscience, 1959;
   А.Г.Ситенко. УФЖ 4, I52 (I959).
2. S.Gartenhaus and C.L.Schwartz. Phys.Rev. 108, 482 (1957).
3. R.H.Bassel and C.Wilkin. Phys.Rev.174, 1179 (1968).
4. С.М.Елисеев. Acta Phys.Polonica B1, 83 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
I4 мая I975 г.