ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8879

А.Ульман

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА ГРИФФИТСА

1975

Р2 - 8879

А.Ульман

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА ГРИФФИТСА

Направлено в ТМФ

1. Обозначения

Мы начнем с введения обозначений, которые принадлежат Кэлей и Шермэну

Пусть T - конечное множество, $t, t', \ldots$ - его точки. Обозначим через X множество всех его подмножеств /конфигурации/ и определим для $A, B \in X$

$$S_A : \ B \to S_A(B) = (-1)^{|A \cap B|}, \qquad /1/$$

где число точек в множестве A обозначается через $|A|$. Тогда известно, что

$$S_A(BG) = S_A(B) S_A(G) \qquad /2/$$

$$S_{AB}(G) = S_A(G) S_B(G)$$

где $AB := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Для каждой положительной функции

$$J : \ A \to J(A) \geq 0, \quad A \in X \qquad /3/$$

/константы взаимодействия ферромагнитного типа/ мы построим гамильтониан, матрицу плотности и среднее

$$H_J = -\sum_B J(B) S_B \qquad /4/$$

$$d_J = \exp\{-H_J\} \qquad /5/$$

$$\langle S_A \rangle_J = \frac{\sum_B S_A(B) d_J(B)}{\sum_B d_J(B)} . \qquad /6/$$

Тогда неравенства Гриффитса запишутся в виде[1,2,3,4]

$$\langle S_A \rangle_J \geq 0 \qquad /7/$$

$$\langle S_A S_B \rangle_J - \langle S_A \rangle_J \langle S_B \rangle_J \geq 0 . \qquad /8/$$

2. Обобщение неравенства Гриффитса

Утверждение: Пусть $A, A_1, \dots, A_m$ - произвольные конфигурации из X и $J_1, \dots, J_m$ - произвольные положительные функции /3/. Положим

$$J = J_1 + J_2 + \dots + J_m . \qquad /9/$$

Тогда справедливо неравенство

$$\langle S_A \prod_{k=1}^{m} \{ S_{A_k} - \langle S_{A_k} \rangle_{J_k} \} \rangle_J \geq 0 \qquad /10/$$

3. Замечания

1. Если мы положим $m=1$ в /10/, получим /8/, т.е. второе неравенство Гриффитса.

2. В случае $m=2$ и для $A = A_1 = A_2$ получим

$$\langle S_A \rangle_{J_1 + J_2} \geq \frac{\langle S_A \rangle_{J_1} + \langle S_A \rangle_{J_2}}{1 + \langle S_A \rangle_{J_1} \langle S_A \rangle_{J_2}} . \qquad /11/$$

Это неравенство сильнее, чем /8/, потому что /8/ равносильно тому факту, что /6/ является возрастающей функцией относительно J .

3. Поскольку

$$x, y \to \frac{x + y}{1 + xy} , \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1$$

является умножением однопараметрической группы, удобно ввести канонический параметр ξ. Положим

$$\xi_A(J) = \ln \frac{1 + \langle S_A \rangle_J}{1 - \langle S_A \rangle_J} . \qquad /12/$$

Из /11/ следует

$$\xi_A(J_1 + J_2) \geq \xi_A(J_1) + \xi_A(J_2) , \qquad /13/$$

а отсюда, конечно, и неравенство

$$\xi_A(\sum J_i) \geq \sum \xi_A(J_i) . \qquad /14/$$

4. Доказательство /по Жинибру[3]/

Сначала заметим, что X относительно умножения

$$AB = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

/симметрической разности/ является группой. Введем вспомогательные величины

$$q_j = \sum_B \{ d_j(B) S_{A_j} - d_j(B) S_{A_j}(B) \} , \quad d_j = d_{J_j} . \qquad /15/$$

Нужно доказать, что

$$\langle S_A q_1 q_2 \dots q_m \rangle_J \geq 0 ,$$

то есть

$$0 \leq \sum_{B,B_1,\ldots,B_m} S_A(B) \prod_{j=1}^{m} \{ S_{A_j}(B) - S_{A_j}(B_j) \} d_J(B)\, d_1(B_1) \ldots d_m(B_m). \quad /16/$$

Произведем подстановку: $B \to B$, $B_1 \to BB_1, \ldots, B_m \to BB_m$. Тогда сумма /16/ не меняется, т.к. X является группой по симметрической разности. Использовав /2/, как это сделал Жинибре, мы увидим, что /16/ равносильно неравенству

$$0 \leq \sum_{B,B_1,\ldots,B_m} \prod_{j=1}^{m} \{ 1 - S_{A_j}(B_j) \} S_{AA_1..A_m}(B) d_J(B) d_1(BB_1) \ldots d_m(BB_m). \quad /17/$$

Поэтому мы докажем утверждение /1О/, если только для каждого набора $A, A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m \in X$ справедливо неравенство

$$0 \leq \sum_B S_{AA_1 \ldots A_m}(B) d_J(B) d_1(BB_1) \ldots d_m(BB_m).$$

Но это неравенство - первое неравенство Гриффитса, если установить, что для каждого набора $B_1, \ldots, B_m \in X$ матрица плотности

$$\tilde{d}: B \to \tilde{d}(B) = d_J(B)\, d_1(BB_1) \ldots d_m(BB_m) \quad /18/$$

является матрицей плотности ферромагнитного типа. А это действительно так, поскольку из /9/ следует, что

$$\tilde{d}(B) = \exp\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_G J_k(G) [S_G(B) + S_G(B) S_G(B_k)] \}$$

и очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{m} J_k(G) [1 + S_G(B_k)] \geq 0.$$

Итак, мы доказали наше утверждение.

5. Два дополнительных неравенства

Следуя идее, предложенной В.А.Загребновым, мы можем воспользоваться в выражении /17/ тем обстоятельством, что $1 - S_A(B) \leq 2$ и получить в неравенствах

оценки сверху. При условии /9/ и для случая $n<m$ это нам дает

$$\langle S_A \prod_{k=1}^{m} \{ S_{A_k} - \langle S_{A_k} \rangle_{J_k} \} \rangle_J \leq 2^{m-n} \langle S_A \prod_{k=1}^{n} \{ S_{A_k} - \langle S_{A_k} \rangle_{J_k} \} \rangle_J . \quad /19/$$

Более того, метод, которым было доказано /1О/,можно использовать для того, чтобы показать, что

$$\langle S_A \prod_{k=1}^{m} \{ S_{A_k} + \lambda_k \langle S_{A_k} \rangle_{J_k} \} \rangle_J \geq 0 \quad /2О/$$

для любого набора чисел

$$-1 \leq \lambda_k \leq +1 .$$

Однако неравенства /19/ и /2О/ для случая $\lambda_k \neq -1$ являются нетривиальными лишь тогда, когда $m \geq 2$.

В заключение я хочу поблагодарить В.А.Загребнова за интересные и ценные обсуждения.

Литература

1. *D.Kelly, S.Sherman. J.Math.Phys., 9, 466 (1968).*
2. *R.Griffiths. J.Math.Phys., 8, 478 (1967); 8, 484 (1967); Comm.Math.Phys., 9, 121 (1967).*
3. *J.Ginibre. Phys.Rev.Lett., 23, 828 (1969).*
4. *J.Ginibre. Comm.Math.Phys., 16, 310 (1970).*

Рукопись поступила в издательский отдел 14 мая 1975 года.