ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8877

В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов

МАСШТАБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДЛИНА

1975

Р2 - 8877

В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов

МАСШТАБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДЛИНА

(Направлено на Международный семинар по глубоконеупругим и инклюзивным процессам, Сухуми, 1975 г.)

Ультрафиолетовые расходимости в квантовой теории поля (КТП) часто рассматривают как свидетельство того, что обычные геометрические представления о пространстве-времени неприменимы в области малых масштабов. Границы этой области определяются новой универсальной постоянной – "фундаментальной длиной" ℓ_0 .

Если поверить в существование ℓ_0 , то при формулировке КТП в p-представлении необходимо отказаться от псевдоевклидовости 4-пространства энергии-импульса*) при $p_0, |\vec{p}| \gtrsim M$, где $M = 1/\ell_0$. Но,как было отмечено нами[I,2], псевдоевклидовость четырехмерного p-пространства вовсе не следует из основных аксиом КТП, а является в действительности дополнительным независимым постулатом. Другими словами, в принципе, допустимо существование новой КТП, основанной на использовании p-пространства с другой геометрией. Естественно лишь потребовать, чтобы при малых энергиях-импульсах

$$p_0, |\vec{p}| \ll M \tag{I}$$

эта новая геометрия совпадала с геометрией Минковского.

Мы предприняли попытку аксиоматического построения КТП[I,2], исходя из гипотезы, что импульсное 4-пространство является пространством де Ситтера:

$$p_0^2 - \vec{p}^{\,2} + M^2 p_4^2 = M^2 . \tag{2}$$

---

*) Речь здесь идет о пространстве 4-импульсов как реальных, так и виртуальных частиц.

В области (I) эффекты, связанные с кривизной, несущественны, что обеспечивает соответствие между новой схемой и обычной "плоской" КТП. Поскольку на поверхности (2)

$$p_0^2 - \vec{p}^{\,2} \leq M^2 , \qquad (3)$$

то постоянную М можно интерпретировать как "предельную" массу элементарной частицы.

В рамках новой теории удалось построить аналоги наиболее важных соотношений обычной КТП, в том числе условия причинности и локальности. Трудности с ультрафиолетовыми расходимостями здесь, по-видимому, отсутствуют.

В настоящем сообщении будут изложены некоторые результаты, полученные при исследовании масштабных преобразований в р-пространстве де Ситтера. Разумеется, при наличии размерных констант в теории нельзя требовать инвариантность относительно преобразования вида

$$\vec{p} \to \lambda \vec{p} , \qquad (4)$$

не затрагивающего этих констант. Поэтому "принцип автомодельности" Матвеева, Мурадяна и Тавхелидзе[3] не может быть просто перенесен в новую схему. Однако те же авторы показали[4], что при изучении процессов множественного рождения адронов, где необходимо учитывать размеры частиц, весьма эффективным является обобщенный анализ размерностей, связанный с масштабным преобразованием лишь продольных компонент импульсов

$$p_z \to \lambda p_z \quad , \quad p_\perp \to p_\perp \qquad (5)$$

и введением двух масштабов длины: L_z и $L_\perp$. В основе данного метода лежат следующие физические соображения. Пусть сталкиваются

два адрона с 4-импульсами p_1 и p_2 . Будем изучать этот процесс в СЦМ, причем ось z выберем вдоль оси столкновения. При высоких энергиях из-за лоренцевского сокращения продольные размеры рассматриваемых частиц становятся исчезающе малыми. Предположим, что других параметров с L_z-размерностью в теории нет. Тогда продольная размерность физических величин может определяться лишь зависимостью от z-компонент импульсов. Или по-другому: физические величины при преобразовании (5) ведут себя как однородные функции p_z -компонент, причем степень однородности равна продольной размерности этих величин.

В [3-4] можно найти большое количество примеров, иллюстрирующих применение данного принципа. Приведем два из них:

I. Полное сечение $\sigma_{tot}(s)$ процесса множественного рождения при столкновении двух адронов имеет чисто поперечную размерность:

$$[\sigma_{tot}(s)] = L_\perp^2 . \qquad (6)$$

Полагая

$$p_1 = (p_0, 0, 0, p_z)$$
$$p_2 = (p_0, 0, 0, -p_z) \qquad (7)$$

и учитывая, что при высоких энергиях

$$s = 4p_0^2 \simeq 4p_z^2 , \qquad (8)$$

можно придти к выводу о постоянстве σ_{tot} .

2. Размерность одночастичной инклюзивной функции распределения $E\frac{d\sigma}{d\vec{q}} = f(s, p_1 q, p_2 q)$ равна $L_\perp^4$ ($q = (q_0, q_\perp, q_z)$ - 4-импульс выделенной частицы). Отсюда следует, что в области фрагментации первой частицы $(q_z \to \infty)$

$$f = f(x, q_\perp) , \qquad (9)$$

где $x = \frac{q_z}{p_z}$ – фейнмановская переменная.

Вернемся теперь к схеме с р-пространством де Ситтера и рассмотрим в ее рамках процесс столкновения двух частиц при высоких энергиях. По-прежнему из-за лоренцевского сокращения вдоль оси столкновения продольными размерами частиц можно пренебречь. При этом совершенно несущественно, как зависели исходные продольные размеры от фундаментальной длины ℓ_0. Это дает нам право предполагать, что фундаментальная длина в рассматриваемом процессе может выступать лишь как константа поперечной размерности*)

$$[\ell_0] = L_\perp . \qquad (10)$$

Но в таком случае мы вправе потребовать инвариантность теории относительно независимого изменения единиц измерения продольных компонент импульсов, т.е. преобразования (5). Однако преобразование (5) не согласовано с геометрией р-пространства де Ситтера. Это можно усмотреть, например, из вида инвариантного элемента объема р-пространства (2):

$$d\Omega_p = \frac{dp_0\, dp_1\, dp_z}{\sqrt{1 - \frac{p_0^2 - p_1^2 - p_z^2}{M^2}}} .$$

По-видимому, в кривом импульсном пространстве необходимо найти такую группу преобразований, которая бы в плоском пределе (I) переходила в (5). С этой целью введем на поверхности (2) псевдо-орисферические координаты (q_0, q_1, ζ) (ср. с[5])

$$\left(p_v + p_z/M\right)^2 = e^{2\zeta/M}$$

$$\frac{p_v - p_z/M}{p_v + p_z/M} = e^{-2\zeta/M} - \tilde{q}^2/M^2 \ ; \quad \tilde{q} = (q_0, q_1) \qquad (11)$$

$$\tilde{p} = (p_0, p_1) = (p_v + p_z/M)\,\tilde{q} .$$

*) Ниже мы приведем дополнительные аргументы в пользу соотношения (10).

В плоском пределе, очевидно,

$$p_z \simeq \zeta \quad , \ \tilde{p} = \tilde{q} . \qquad (12)$$

В переменных $(\tilde{q}, \zeta)$ элемент объема $d\Omega_p$ принимает вид:

$$d\Omega_p = d^3\tilde{q}\; e^{3\zeta/M}\, d\zeta . \qquad (13)$$

Нетрудно убедиться, что в группе де Ситтера $SO(2,3)$, являющейся группой движений р-пространства (2), содержится четырехпараметрическая подгруппа "сдвигов" $(\tilde{q}', \zeta') = T_{(\tilde{\kappa}, \xi)}(\tilde{q}, \zeta)$ со следующим правилом композиции:

$$\begin{aligned} \tilde{q}' &= e^{-\xi/M}\,\tilde{q} + \tilde{\kappa} \\ \zeta' &= \zeta + \xi . \end{aligned} \qquad (14)$$

В плоском пределе эти преобразования совпадают с группой трансляций р-пространства Минсковского

$$p' = p + \ell \qquad (\tilde{\ell} \simeq \tilde{\kappa} \ , \ \ell_3 \simeq \zeta) . \qquad (15)$$

Заметим теперь, что между "плоскими" преобразованиями растяжения (4) и (5) и трансляциями (15) существует определенная связь. В самом деле, рассмотрим функцию $f(\vec{\kappa})$, разложимую в ряд Тейлора. Легко видеть, что

$$f(\vec{\kappa} + \vec{p}') = f(\vec{\kappa} + \lambda\vec{p}) = e^{\lambda \vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{\kappa}}} f(\vec{\kappa}) = \left(e^{\vec{p}\frac{\partial}{\partial\vec{\kappa}}}\right)^{\lambda} f(\vec{\kappa}) . \qquad (16)$$

Следовательно, оператор сдвига на вектор $\lambda\vec{p}$ является λ-степенью оператора сдвига на вектор $\vec{p}$.

Эти рассуждения непосредственно обобщаются на случай р-пространства де Ситтера, причем роль группы трехмерных сдвигов теперь выполняют соответствующие преобразования из (I5):

$$q'_\perp = e^{-\xi/M} q_\perp + \ell_\perp$$
$$\zeta' = \zeta + \xi . \qquad (I7)$$

В итоге можно получить "кривые" аналоги масштабных преобразований (4) и (5). В частности, вместо (5) будем иметь:

$$\zeta \to \lambda \zeta$$
$$q_\perp \to e^{(\lambda-1)\zeta/M} q_\perp . \qquad (I8)$$

В силу (II) преобразование (I8) эквивалентно следующему:

$$\zeta \to \lambda \zeta$$
$$p_\perp \to p_\perp . \qquad (I9)$$

Нетрудно убедиться, что элемент объема (I3) при замене переменных (I8) преобразуется по закону

$$d\Omega_p \to \lambda\, d\Omega_p . \qquad (20)$$

Обратим теперь внимание на следующее важное обстоятельство. Переменная ζ, играющая у нас роль продольной компоненты импульса, имеет евклидову природу. Сдвиги вдоль "оси" ζ являются обычными абелевыми трансляциями

$$\zeta' = \zeta + \xi .$$

Поэтому генераторы этих преобразований имеют вид:

$$i\frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \hat{z} . \qquad (21)$$

Ясно, что величина $\hat{z}$ является аналогом продольной компоненты оператора пространственной координаты, которая в случае "плоской" теории есть $i\frac{\partial}{\partial p_z}$. При масштабных преобразованиях (I8)-(I9), очевидно,

$$\hat{z} \to \lambda^{-1} \hat{z} . \qquad (22)$$

Таким образом, если в новой схеме зависимость от продольных переменных выражать в терминах ζ, то с математической точки зрения это будет тождественно описанию в терминах p_z обычной "плоской" теории, не содержащей фундаментальную длину. Эти соображения являются доводом в пользу гипотезы (I0).

Вспоминая теперь сказанное выше, мы можем сформулировать следующую версию принципа автомодельности в p-пространстве де Ситтера: все физические величины, характеризующие процесс соударения двух частиц[ж)] при высоких энергиях в СЦМ, являются однородными функциями продольных переменных типа ζ со степенью однородности, определяемой продольной размерностью.

Проиллюстрируем применение данного принципа на тех же примерах, которые рассматривались выше.

I. Полное сечение σ_{tot}. Теперь, очевидно, мы должны писать:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s, \ell_0) , \qquad (23)$$

где по-прежнему $s \simeq 4p_z^2$. В силу (2) и (II)

$$\zeta = \frac{M}{2} \ln\left(p_4 + p_z/M\right)^2 \approx M \ln\left(\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}} + \frac{p_z}{M}\right), \quad (p_z > 0) \qquad (24)$$

где m - масса частицы. Современные экспериментальные данные указывают, что для всех адронов (а тем более, для лептонов)

$$m^2 << M^2 . \qquad (25)$$

ж) Эти частицы не обязательно должны быть адронами, а могут быть, например, электроном и позитроном. Дело в том, что различие в поперечных размерах адронов и лептонов теперь не имеет принципиального значения, ибо "поперечную" масштабную инвариантность во всех взаимодействиях нарушает фундаментальная длина ℓ_0.

Поэтому

$$\zeta = M \ln\left(1+\frac{p_z}{M}\right) \simeq M \ln\left(1+\frac{\sqrt{s}}{2M}\right). \qquad (26)$$

Поскольку соотношение (6) остается в силе, то сечение σ_{tot} не должно зависеть от переменной ζ. Следовательно, оно не зависит и от s. Таким образом,

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(\ell_0) = \mathrm{const}\, \ell_0^2 \qquad (27)$$

Если фундаментальная длина ℓ_0 есть величина порядка фермиевской длины $\sqrt{\frac{G_F}{\hbar c}}$ /6/, то в применении к процессу e^+e^--аннигиляции полученный результат не кажется абсурдным.

2. Формула (9) для инклюзивной функции распределения обобщается следующим образом:

$$f = f(\hat{x}, q_\perp, \ell_0), \qquad (28)$$

где

$$\hat{x} = \frac{\ln\left(1+\frac{p_z q}{\sqrt{s}}\right)}{\ln\left(1+\frac{\sqrt{s}\,\ell_0}{2}\right)}. \qquad (29)$$

Разлагая $\hat{x}$ по степеням ℓ_0 и вводя параметр x, получим в первом приближении

$$\hat{x} = x\left(1+\frac{1}{2}(1-x)\sqrt{s}\,\ell_0\right), \qquad (30)$$

так что

$$E\frac{d\sigma}{d\vec{q}} = f\left[x\left(1+\frac{1-x}{2}\sqrt{s}\,\ell_0\right), q_\perp, \ell_0\right]. \qquad (31)$$

Сопоставляя формулу (31) с экспериментальными данными, можно оценить величину ℓ_0.

Соотношения типа (31) получаются и для других инклюзивных распределений.

В заключение мы бы хотели отметить, что масштабные преобразования в теории с p-пространством де Ситтера могут быть использованы не только для феноменологических целей, но и в духе строго математического подхода конформно инвариантной квантовой теории поля.

Л и т е р а т у р а

1. A.D.Donkov, V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov, Preprint JINR, E2-6992, Dubna, 1973.
2. A.D.Donkov, V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov, Preprint JINR, E2-7936, Dubna, 1974 and in Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics, London, p.I 267, 1974.
3. В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, Препринт ОИЯИ, Р2-4572, Дубна, 1969; ЭЧАЯ, т.3, вып. I, 1972.
4. В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, Препринт ОИЯИ, Е2-4572, Дубна, 1971; ТМФ, 15, 332, 1973.
5. В.Г.Кадышевский, Сообщение ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.
6. В.Г.Кадышевский, ЖЭТФ, 41, 1885, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 мая 1975 года.