СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8862

И.В. Полубаринов

О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ.

4. Представление когерентных состояний

1975

P2 - 8862

И.В. Полубаринов

О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ.

4. Представление когерентных состояний

SUMMARY

Coherent state representation (CSR) in the relativistic field theory is introduced in two forms: without and with using supplementary operation Λ^{-1} (which converts symmetrized products into N-ordered ones ; Λ operates like the Hilbert transform, see eqs.(I)-(3)). The CSR-2 simplifies all the quantities and equations and removes acausality of coefficient functions in N-product decompositions (like transition from "analytical signal" to "real one" does). Λ and Λ^{-1} operate only on initial values (e.g., for a scalar field on two functions $\varphi(\vec{x},t')$ and $\dot{\varphi}(\vec{x},t')$ of $\vec{x}$ or, equivalently, on one function $J(x)$ of 4-argument), see eq.(22).

The field operators in the interaction and Heiseberg pictures are represented as operators in CSR for theories of the scalar field (eqs. (I8) and (39),(40)) and for the electrodynamics (eqs.(67),(68) and (75)-(77)). In terms of the operators we can write in familiar form any other operators, e.g., the energy-momentum tensor and the 4-momentum, the current and the charge (eqs.(57) and (83)). Coherent state expectation values of any operators are obtained simply by application of these representatives to unity (eqs.(45),(56),(58),(88) and so on).

Equations of motion in CSR have usual form of the Yang-Feldman quantum field theory integral equations (eqs.(4I) and (80)-(82)) or of the standard differential equations with non-usual initial values, containing functional derivatives,(eqs.(44) and (85)). For the coherent state expectation values of fields the equations are reduced to eqs. (50),(86) and (87), perturbation series of which contain quantum corrections to the classical Neumann series (see below, p.I4).The equations (9),(27),(28) and (46) in [9] are to be interpreted in the operator sense, otherwise they are valid only for $\hbar=0$(in sense of [7]).

After Λ^{-1} has removed the acausal quantum corrections they are not regenerated in the course of evolution,and the rest quantum corrections (i.e.,all corrections in CSR-2) are causal. For the fields the latter contain only retarded functions. As to coefficient functions of S-matrix in CSR-2 they consist of the half-retarded-half-advanced functions (Sec.2 and eqs.(34)-(36)), like the Fokker-Wheeler-Feynman "action" [12] .

Λ^{-1} operation does not change eigenvalue spectra of operators and the Planck formula (Sec.5). Λ introduces the Gaussian factors (eq.(95)).

Such presentation of the theory may be also considered as one more functional method, when variating classical initial conditions, but not some external sources or external fields.

I. ВВЕДЕНИЕ

Когерентным состояниям и их применениям посвящены многочисленные работы (см.[I-5], где можно найти обширные списки литературы, некоторые ссылки см. также в[6]). Для замкнутых систем полей в релятивистской квантовой теории поля средние от полей в когерентных состояниях изучались в работе[7]. Для исследования перехода к уравнениям классической теории поля ($\hbar\to 0$) и вычисления квантовых поправок использовался функциональный метод произвольных внешних полей.

В настоящей работе релятивистская квантовая теория поля преобразуется в духе теории преобразований Дирака[8] в представление когерентных состояний (ПКС). Средние в когерентных состояниях[x)] рассматриваются как функционалы только от начальных условий (например, для скалярного поля - от двух функций $\varphi(\vec{x},t')$ и $\dot{\varphi}(\vec{x},t')$ от $\vec{x}$ или, эквивалентно, от одной функции $J(x)$ от 4-аргумента), но не от внешних источников или полей (практическая полезность которых, разумеется, бесспорна).

ПКС делает язык квантовой теории близким к языку классической: одновременно используются коммутирующие координата и импульс (на самом деле имеющие смысл средних, а именно средние и следует сопоставлять с классикой[8], стр. 73), а квантовая природа проявляется в том, что также участвуют и производные по этим переменным - в теории поля это, естественно, функциональные производные.

Параллельно с простым переходом в ПКС (ПКС-I) мы обсуждаем также переход в ПКС, сопровождаемый, как в работе[9], применением дополнительной операции Λ^{-1} (ПКС-2). Операция Λ^{-1} превращает симметризованные произведения операторов поля в картине взаимодействия в N-произведения, не изменяя коэффициентных функций. (По сути дела, такой рецепт для ряда величин предлагался в монографии[I0], §I0.4) Коэффициентные функции исходных разложений по симметризованным произведениям, игра-

x) Мы работаем исключительно со средними, а недиагональные матричные элементы являются излишними.

ющих у нас основную роль, обладают причинными свойствами в отличие от обычных разложений по N-произведениям. Применение Λ^{-1}, избавляя, таким образом, от апричинности коэффициентных функций последних, приводит, кроме того, к значительному упрощению различных величин и уравнений. Поэтому мы в основном отдаем предпочтение ПКС-2.

Существенно, что оператор Λ (и Λ^{-1}) представим как оператор, действующий только на начальные условия /9/, манипулируя которыми, мы всегда в принципе можем перейти от ПКС-2 к ПКС-I, и наоборот.

В /6,9,II/ отмечалось, что в наиболее простых теориях квантованного поля с линейными уравнениями: а) теории свободного поля, б) поля, взаимодействующего с внешним током, и в) поля, взаимодействующего с классическим внешним полем, уравнения для средних от полей в когерентных состояниях просто совпадают с уравнениями классической теории поля со свойственной им причинностью, а операция Λ^{-1} ничего не дает. Однако она действует нетривиально на величины, нелинейно построенные из этих полей (тензор энергии-импульса, S-матрица и т.д.).

Отметим, что оператор Λ выполняет роль, аналогичную роли преобразования Гильберта. Если в качестве "вещественного сигнала" взять $\Delta(x-y)$, то преобразование Гильберта приводит к "аналитическому сигналу"

$$\Delta^{(-)}(x-y) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon}\,\Delta(\vec{x}-\vec{y}, x_0-y_0-\tau)\,. \tag{I}$$

Этот же результат можно получить и с помощью оператора Λ . Составим комбинацию

$$\varphi(x)\varphi(y) + \frac{i}{2}\,\Delta(x-y), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ - свободное классическое поле, подчиняющееся тому же уравнению, что и $\Delta(x-y)$. Действуя оператором Λ , найдем

$$\Lambda\left(\varphi(x)\varphi(y) + \frac{i}{2}\Delta(x-y)\right) = \varphi(x)\varphi(y) + \frac{1}{2}\Delta^{(1)}(x-y) + \frac{i}{2}\Delta(x-y) = \varphi(x)\varphi(y) + i\Delta^{(-)}(x-y). \tag{3}$$

Полагая $\varphi=0$ (что не противоречит уравнению), воспроизводим прежний результат. Однако, если преобразование Гильберта существенно-линейное, то оператор Λ позволяет переходить от вещественных функций к комплексным и в нелинейных выражениях. Λ^{-1} осуществляет обратное

преобразование (от "аналитического сигнала" к "вещественному").

В пп. 3 и 4 операторы поля в картине взаимодействия и в гайзенберговской картине представлены как операторы в ПКС в теории скалярного поля (формулы (I8) и (39),(40)) и в квантовой электродинамике (формулы (67),(68) и (75)-(77)). Через эти операторы поля записываются в обычном виде любые другие операторы, например, тензор энергии-импульса и 4-импульс, ток и заряд и т.д. (формулы (57) и (83)). Средние в когерентных состояниях получаются просто применением этих представителей к единице (см. (45),(56),(58),(88) и т.д.).

Уравнения движения в ПКС имеют обычную для квантовой теории поля форму интегральных уравнений Янга-Фелдмана (уравнения (4I) и (80)-(82)) или стандартных дифференциальных уравнений с необычными начальными условиями, содержащими функциональные производные (условия (44) и (85)). Для средних в когерентных состояниях уравнения сводятся к соотношениям (50) , (86) и (87), ряды теории возмущений для которых содержат квантовые поправки к рядам Неймана в классике (см. стр. I4). Уравнения (9),(27),(28) и (46) в работе /9/ должны быть интерпретированы в операторном смысле, а иначе они справедливы только в пределе $\hbar \to 0$ (в смысле работы /7/).

Существенно, что после того, как при помощи Λ^{-1} исключены апричинные квантовые поправки, они не возрождаются в ходе эволюции со временем и остальные квантовые поправки (т.е. все поправки в ПКС-2) являются причинными[x)]. Для полей они составлены лишь из запаздываю-

x) Странные апричинные свойства в обычной форме теории (отличие пропагатора Δ_+ от нуля в пространственноподобной области, с самого начала отмеченное Фейнманом, появление апричинных функций $\Delta^{(1)}$ после N-упорядочивания итераций уравнений Янга-Фелдмана), по-видимому, связаны с использованием в квантовой теории комплексных волновых функций, амплитуд и пропагаторов, т.е. с использованием языка "аналитического сигнала" (ср. Приложение Б в /6/). Оператор Λ^{-1} позволяет перейти на язык "вещественного сигнала".

щих функций Δ_{ret}. Коэффициентные функции S-матрицы в ПКС-2 построены из полусуммы запаздывающей и опережающей функций Δ_{sym} (п. 2 и формулы (34) и (35)). Таким образом, по структуре она оказывается родственной "действию" Фоккера-Уиллера-Фейнмана /I2/.

Переход от комплексных Δ-функций к вещественным, и наоборот, осуществим и прямо в обычной (операторной) форме квантовой теории поля (см. конец п. 3). Подчеркнем, что штрихованные операторы $\hat{\varphi}'(x)$, $\hat{A}'_\mu(x)$, $\hat{\psi}'(x)$, $\hat{U}'$ и др. обладают причинными коэффициентными функциями своих разложений по N-произведениям. С другой стороны, исходные операторы $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{A}_\mu(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ этим свойством не обладают, но в то же время образуют алгебру, в которой причинность присуща основной операции - коммутатору. Это следствие причинности коэффициентных функций разложения их по симметризованным произведениям.

Изменяют ли операция Λ результаты теории? В ряде случаев нет. Во-первых, не меняются спектры собственных значений, в частности, уровни энергии (например, уровни атома водорода). Во-вторых, это преобразование не изменяет формулу Планка. Эти вопросы обсуждаются в п. 5, посвященном ПКС в квантовой механике. Отметим, что действие Λ эквивалентно введению гауссовского множителя (формула (95)).

По-видимому, операция Λ существенна только для обычной схемы вычисления амплитуд и вероятностей переходов.

Отметим, что на ПКС можно смотреть и просто как на еще один функциональный метод, когда варьируются классические начальные условия, в дополнение к методам Фока, внешних полей, источников и другим. Возможно, он окажется полезным в калибровочных теориях.

2. S-МАТРИЦА В ПКС

В том же духе, как ранее определялось поле в ПКС, легко дать определение для S-матрицы:

$$U(t,t') \equiv \Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{U}(t,t')|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{U}'(t,t')|\varphi\rangle . \tag{4}$$

В теории скалярного поля имеем

$$\hat{U}(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t'}^{t} d^4x_1\ldots d^4x_n\, K_{sym}(x_1\ldots x_n)\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\} = \tag{5.а}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t'}^{t} d^4x_1\ldots d^4x_n\, K(x_1\ldots x_n) :\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n): \quad , \tag{5.б}$$

$$\hat{U}'(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t'}^{t} d^4x_1\ldots d^4x_n\, K_{sym}(x_1\ldots x_n) :\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n): \tag{6}$$

и

$$U(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t'}^{t} d^4x_1\ldots d^4x_n\, K_{sym}(x_1\ldots x_n)\,\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n) . \tag{6}$$

В этих выражениях коэффициентные функции K_{sym} построены по правилам Фейнмана, но из вещественных "пропагаторов" $\Delta_{sym}(x-y)$ вместо комплексных фейнмановских $\Delta_+(x-y)$ в K.

В квантовой электродинамике аналогично

$$\hat{U}(t,t') = \sum_{m,n=0}^{\infty}\int_{t'}^{t} d^4x_1\ldots d^4x_n \int_{t'}^{t} d^4y_1\ldots d^4y_m \int_{t'}^{t} d^4z_1\ldots d^4z_m\, K_{sym\,\mu_1\ldots\mu_n}(x_1\ldots x_n, y_1\ldots y_m, z_1\ldots z_m)$$

$$\frac{1}{n!(2m)!}\{\hat{A}_{\mu_1}(x_1)\ldots\hat{A}_{\mu_n}(x_n)\}[\hat{\psi}(y_1)\ldots\hat{\psi}(y_m)\hat{\bar{\psi}}(z_1)\ldots\hat{\bar{\psi}}(z_m)], \tag{8}$$

$$\hat{U}'(t,t') = \sum_{m,n=0}^{\infty}\int_{t'}^{t} d^4x_1\ldots d^4x_n \int_{t'}^{t} d^4y_1\ldots d^4y_m \int_{t'}^{t} d^4z_1\ldots d^4z_m\, K_{sym\,\mu_1\ldots\mu_n}(x_1\ldots x_n, y_1\ldots y_m, z_1\ldots z_m)$$

$$:\hat{A}_{\mu_1}(x_1)\ldots\hat{A}_{\mu_n}(x_n)\hat{\psi}(y_1)\ldots\hat{\psi}(y_m)\hat{\bar{\psi}}(z_1)\ldots\hat{\bar{\psi}}(z_m): \quad , \tag{9}$$

$$U(t,t') \equiv \Lambda_A^{-1}\Lambda_\psi^{-1}\langle\varphi|\hat{U}(t,t')|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{U}'(t,t')|\varphi\rangle =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty}\int_{t'}^{t} d^4x_1\ldots d^4x_n \int_{t'}^{t} d^4y_1\ldots d^4y_m \int_{t'}^{t} d^4z_1\ldots d^4z_m\, K_{sym\,\mu_1\ldots\mu_n}(x_1\ldots x_n, y_1\ldots y_m, z_1\ldots z_m)\cdot$$

$$\cdot A_{\mu_1}(x_1)\ldots A_{\mu_n}(x_n)\,\psi(y_1)\ldots\psi(y_m)\bar{\psi}(z_1)\ldots\bar{\psi}(z_m), \tag{IO}$$

причем K_{sym} построены из $\delta_{\mu\nu}\Delta_{sym}(x-y)$ и $S_{sym}(x-y)$ вместо фейнмановских пропагаторов.

Обращает на себя внимание то, что так определенные с-числовые величины $U(t,t')$ построены наподобие "действия" Фоккера-Фейнмана-Уиллера, в котором взаимодействие между классическими частицами осуществляется при помощи Δ_{sym} (а не Δ_{ret}), т.е. в духе электродинамики, сформулированной в терминах полусуммы запаздывающих и опережающих потенциалов[12].

В качестве примеров рассмотрим взаимодействие с внешним током

$$\hat{U}(t,t') = e^{\frac{i}{2}\int_{t'}^{t} d^4x\, d^4y\, j(x)\bar{\Delta}(x-y)j(y)}\; e^{i\int_{t'}^{t} d^4x\, \hat{\varphi}(x)j(x)}, \tag{11.а}$$

$$\hat{U}'(t,t') = e^{\frac{i}{2}\int_{t'}^{t} d^4x\, d^4y\, j(x)\bar{\Delta}(x-y)j(y)}\; :e^{i\int_{t'}^{t} d^4x\, \hat{\varphi}(x)j(x)}:, \tag{11.б}$$

$$U(t,t') = e^{\frac{i}{2}\int_{t'}^{t} d^4x\, d^4y\, j(x)\bar{\Delta}(x-y)j(y)}\; e^{i\int_{t'}^{t} d^4x\, \varphi(x)j(x)} \tag{11.в}$$

(случай электромагнитного поля, взаимодействующего с внешним током, аналогичен) и с внешним полем

$$\hat{U}(t,t') = U_0(S_+) : e^{i\hat{L}_I}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(ie^2\int_{t'}^{t} d^4y\, d^4z\, \hat{\bar{\psi}}(y)\gamma_\mu A_\mu(y) S_+^A(y,z)\gamma_\nu A_\nu(z)\hat{\psi}(z)\right)^m\right) : =$$

$$= U_0(S_{sym})\left(e^{i\hat{L}_I}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(ie^2\int_{t'}^{t} d^4y\, d^4z\, \hat{\bar{\psi}}(y)\gamma_\mu A_\mu(y) S_{sym}^A(y,z)\gamma_\nu A_\nu(z)\hat{\psi}(z)\right)^m\right)\right)_{antisymm.}, \tag{12.а}$$

$$\hat{U}'(t,t') = U_0(S_{sym}) : e^{i\hat{L}_I}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(ie^2\int_{t'}^{t} d^4y\, d^4z\, \hat{\bar{\psi}}(y)\gamma_\mu A_\mu(y) S_{sym}^A(y,z)\gamma_\nu A_\nu(z)\hat{\psi}(z)\right)^m\right) :, \tag{12.б}$$

$$U(t,t') = U_0(S_{sym})\, e^{iL_I}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(ie^2\int_{t'}^{t} d^4y\, d^4z\, \bar{\psi}(y)\gamma_\mu A_\mu(y) S_{sym}^A(y,z)\gamma_\nu A_\nu(z)\psi(z)\right)^m\right), \tag{12.в}$$

где $\hat{L}_I = ie\int_{t'}^{t} d^4x\, \hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)A_\mu(x)$,

$$S_+^A(x,z) = S_+(x-z) - ie\int_{t'}^{t} d^4y\, S_+(x-y)\gamma_\mu A_\mu(y) S_+^A(y,z), \tag{13.а}$$

$$S_{sym}^A(x,z) = S_{sym}(x-z) - ie\int_{t'}^{t} d^4y\, S_{sym}(x-y)\gamma_\mu A_\mu(y) S_{sym}^A(y,z). \tag{13.б}$$

3. ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПКС

Теперь мы рассмотрим различные возможные записи операторов поля, а, следовательно, и любых других операторов как операторов в ПКС. Прежде всего для положительно- и отрицательночастотных частей $\hat{\varphi}^{(-)}(x)$ и $\hat{\varphi}^{(+)}(x)$ оператора поля $\hat{\varphi}(x)$ в картине взаимодействия и для самого этого оператора получаем[x)]

$$\langle\varphi|\hat{\varphi}^{(+)}(x)\hat{Q}|\varphi\rangle = \varphi^{(+)}(x)\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle = \Lambda\left(\varphi^{(+)}(x) - \tfrac{1}{2}\int d^3\xi\, \Delta^{(+)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial_4}\frac{\delta}{\delta J(\xi)}\right)\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle, \tag{14}$$

$$\langle\varphi|\hat{\varphi}^{(-)}(x)\hat{Q}|\varphi\rangle = \left(\varphi^{(-)}(x) - \int d^3\xi\, \Delta^{(-)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial_4}\frac{\delta}{\delta J(\xi)}\right)\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle = \Lambda^2\varphi^{(-)}(x)\Lambda^{-2}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle, \tag{15}$$

$$\langle\varphi|\hat{Q}\hat{\varphi}^{(-)}(x)|\varphi\rangle = \varphi^{(-)}(x)\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle = \Lambda\left(\varphi^{(-)}(x) + \tfrac{1}{2}\int d^3\xi\, \Delta^{(-)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial_4}\frac{\delta}{\delta J(\xi)}\right)\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle, \tag{16}$$

$$\langle\varphi|\hat{Q}\hat{\varphi}^{(+)}(x)|\varphi\rangle = \left(\varphi^{(+)}(x) + \int d^3\xi\, \Delta^{(+)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial_4}\frac{\delta}{\delta J(\xi)}\right)\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle = \Lambda^2\varphi^{(+)}(x)\Lambda^{-2}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle, \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle\varphi|\hat{\varphi}(x)\hat{Q}|\varphi\rangle\\ \langle\varphi|\hat{Q}\hat{\varphi}(x)|\varphi\rangle\end{array}\right\} = \left(\varphi(x) \pm i\int d^3\xi'\, \Delta^{(\mp)}(x-\xi')\frac{\delta}{\delta\varphi^{(\pm)}(\xi')}\right)\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle =$$

$$= \left(\varphi(x) + \int d^3\xi'\, \Delta^{(\mp)}(x-\xi')\left(\frac{\delta}{\delta\varphi(\xi')} + \overleftarrow{\partial_4'}\frac{\delta}{\delta\partial_4\varphi(\xi')}\right)\right)\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle =$$

$$= \left(\varphi(x) \mp \int d^3\xi\, \Delta^{(\mp)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial_4}\frac{\delta}{\delta J(\xi)}\right)\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle =$$

$$= \Lambda\left(\varphi(x) \pm \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle, \tag{18$_{п}^{л}$}$$

где $\hat{Q}$ – произвольный оператор. В формулах (18) знаки согласованы, т.е. следует брать верхние для левого (л) представителя и нижние для правого (п), ξ_0 – произвольное время, а $\xi_0' = t'$. В отличие от $\frac{\delta}{\delta J(\xi)}$ производные $\frac{\delta}{\delta\varphi^{(\pm)}(\xi')} = \frac{\delta}{\delta\varphi^{(\pm)}(\vec{\xi}',t')}$ берутся по функциям $\varphi(\vec{\xi}',t')$ от 3-аргумента $\vec{\xi}'$. То же относится к производным по $\varphi(\xi')$ и $\partial_4\varphi(\xi')$.

Для понимания взаимосвязей между различными выражениями полезно иметь в виду соотношения

$$\Lambda\varphi^{(\mp)}(x)\Lambda^{-1} = \varphi^{(\mp)}(x) \mp \tfrac{1}{2}\int d^3\xi\, \Delta^{(\mp)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial_4}\frac{\delta}{\delta J(\xi)}, \tag{19}$$

$$\Lambda\varphi(x)\Lambda^{-1} = \varphi(x) + \frac{i}{2}\int d^3\xi\, \Delta^{(1)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial_4}\frac{\delta}{\delta J(\xi)}, \tag{20}$$

---

x) Некоторые предварительные формулы см. в Приложении А.

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)} = i\int d^3\xi\, \Delta(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(\xi)} \tag{21}$$

(последнее - следствие способа, которым введен $\mathcal{J}(x)$, см./6/).

Подчеркнем, что Λ представим как оператор, действующий только на начальные значения,x)

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{4}\int d^3\xi\, d^3\zeta\, \frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(\xi)}\overleftrightarrow{\partial}{}^{\xi}_4\,\Delta^{(1)}(\xi-\zeta)\overleftrightarrow{\partial}{}^{\zeta}_4\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(\zeta)}\right)=$$

$$= \exp\left(\frac{1}{4}\int d^3\xi' d^3\zeta'\,\Delta^{(1)}(\xi'-\zeta')\left(\frac{\delta}{\delta\varphi(\xi')}+\overleftarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta\partial_4\varphi(\xi')}\right)\left(\frac{\delta}{\delta\varphi(\zeta')}+\overleftarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta\partial_4\varphi(\zeta')}\right)\right)=$$

$$= \exp\left(\frac{1}{4}\int d^3\xi' d^3\zeta'\,\Delta^{(1)}(\xi'-\zeta')\frac{\delta}{\delta\varphi(\xi')}\frac{\delta}{\delta\varphi(\zeta')}+\partial^{\xi'}_4\partial^{\zeta'}_4\Delta^{(1)}(\xi'-\zeta')\frac{\delta}{\delta\partial_4\varphi(\xi')}\frac{\delta}{\delta\partial_4\varphi(\zeta')}\right), \tag{22}$$

где ξ_0 и ζ_0 -произвольные времена, а $\xi'_0=\zeta'_0=t'$.

Для произвольного оператора $F(\hat\varphi(x_1),\hat\varphi(x_2)\dots)$ имеем

$$\langle\varphi|F(\hat\varphi(x_1),\hat\varphi(x_2)\dots)\hat Q|\varphi\rangle = F((1)_л,(2)_л\dots)\langle\varphi|\hat Q|\varphi\rangle, \tag{23}$$

$$\langle\varphi|\hat Q\, F(\hat\varphi(x_1),\hat\varphi(x_2)\dots)|\varphi\rangle=\tilde F((1)_п,(2)_п\dots)\langle\varphi|\hat Q|\varphi\rangle = F^+((1)_л,(2)_л\dots)\langle\varphi|\hat Q|\varphi\rangle. \tag{24}$$

В (23) операторы $\hat\varphi(x_i)$ замещаются с сохранением порядка их левыми представителями $(i)_л$ в любой форме. Аналогично в (24) операторы замещаются правыми представителями $(i)_п$, но порядок последних противоположен первоначальному (это обозначено тильдой). Оператор $\tilde F((I)_п\dots)$ может рассматриваться как сопряженный (F^+) к $F((I)_л\dots)$.

Перестановочные соотношения в ПКС можно записать в **виде**

$$[\varphi^{(\pm)}(x),\ \Lambda^2\varphi^{(\mp)}(y)\Lambda^{-2}] = \pm i\Delta^{(\pm)}(x-y), \tag{25}$$

$$\left[\varphi(x)\pm\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x)},\ \varphi(y)\pm\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(y)}\right] = \pm i\Delta(x-y), \tag{26}$$

а другие коммутаторы равны нулю, в частности, все левые операторы коммутируют со всеми правыми:

$$[\varphi^{(\pm)}(x),\ \Lambda^2\varphi^{(\pm)}(y)\Lambda^{-2}]=0, \tag{27}$$

$$\left[\varphi(x)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x)},\ \varphi(y)-\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(y)}\right]=0 \tag{28}$$

(знаки всюду следует брать согласованно).

x) Или на значения в любой другой фиксированный момент времени.

Из (I8) следует

$$\frac{1}{2^n}\langle\varphi|\{\hat\varphi(x_n)\{\hat\varphi(x_{n-1})\dots\{\hat\varphi(x_1),\hat Q\}\dots\}\}|\varphi\rangle = \Lambda\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat Q|\varphi\rangle, \tag{29}$$

$$\langle\varphi|[\hat\varphi(x_n)[\hat\varphi(x_{n-1})\dots[\hat\varphi(x_1),\hat Q]\dots]]|\varphi\rangle = i^n\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x_n)}\dots\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x_1)}\langle\varphi|\hat Q|\varphi\rangle. \tag{30}$$

Изложенную технику проиллюстрируем следующими примерамиx):

$$\langle\varphi|\hat\varphi(x_1)\dots\hat\varphi(x_n)|\varphi\rangle = \left(\varphi(x_1)-\int d^3\xi_1\Delta^{(-)}(x_1-\xi_1)\overleftrightarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(\xi_1)}\right)\dots\left(\varphi(x_n)-\int d^3\xi_n\Delta^{(-)}(x_n-\xi_n)\overleftrightarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(\xi_n)}\right)\cdot 1= \tag{3I.а}$$

$$=\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{одно\\спаривание}} i\Delta^{(-)}(x_1-x_2)\varphi(x_3)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{два\\спаривания}}\dots+\dots= \tag{3I.б}$$

$$=\Lambda\left(\varphi(x_1)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x_1)}\right)\dots\left(\varphi(x_n)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x_n)}\right)\cdot 1= \tag{3I.в}$$

$$=\Lambda\left(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{одно\\спаривание}}\frac{i}{2}\Delta(x_1-x_2)\varphi(x_3)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{два\\спаривания}}\dots+\dots\right)\cdot 1, \tag{3I.г}$$

$$\frac{1}{n!}\langle\varphi|\{\hat\varphi(x_1)\dots\hat\varphi(x_n)\}|\varphi\rangle = \frac{1}{2^{n-1}}\langle\varphi|\{\hat\varphi(x_n)\{\hat\varphi(x_{n-1})\dots\{\hat\varphi(x_2)\hat\varphi(x_1)\}\dots\}\}|\varphi\rangle=$$

$$=\Lambda\,\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\cdot 1= \tag{32.а}$$

$$=\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{одно\\сваривание}}\frac{1}{2}\Delta^{(1)}(x_1-x_2)\varphi(x_3)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{два\\спаривания}}\dots+\dots\ , \tag{32.б}$$

$$\langle\varphi|T\,\hat\varphi(x_1)\dots\hat\varphi(x_n)|\varphi\rangle=\sum_{\substack{по\ всем\\перестановкам\\1\dots n}}\theta(t_1-t_2)\dots\theta(t_{n-1}-t_n)\langle\varphi|\hat\varphi(x_1)\dots\hat\varphi(x_n)|\varphi\rangle=$$

$$=\sum\theta(t_1-t_2)\dots\theta(t_{n-1}-t_n)\left(\varphi(x_1)-\int d^3\xi_1\Delta^{(-)}(x_1-\xi_1)\overleftrightarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(\xi_1)}\right)\dots\left(\varphi(x_n)-\int d^3\xi_n\Delta^{(-)}(x_n-\xi_n)\overleftrightarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(\xi_n)}\right)\cdot 1= \tag{33.а}$$

$$=\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{одно\\спаривание}}(-i)\Delta_+(x_1-x_2)\varphi(x_3)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{два\\спаривания}}\dots+\dots= \tag{33.б}$$

$$=\Lambda\sum\theta(t_1-t_2)\dots\theta(t_{n-1}-t_n)\left(\varphi(x_1)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x_1)}\right)\dots\left(\varphi(x_n)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x_n)}\right)\cdot 1= \tag{33.в}$$

$$=\Lambda\left(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{одно\\спаривание}}(-i)\Delta_{sym}(x_1-x_2)\varphi(x_3)\dots\varphi(x_n)+\sum_{\substack{два\\спаривания}}\dots+\dots\right)\cdot 1. \tag{33.г}$$

Выражения (3I.б) и (33.б) соответствуют теоремам Дайсона и Вика.

x) Ср. с соответствующими разложениями операторов в Приложении А.

Выражения между Λ и I в (3I.в) и (33.в) суть ПКС-2 соответственно для $\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)$ и $T\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)$, в (3I.г) и (33.г) – средние этих операторов в ПКС-2, и, наконец, в (32.а) – среднее $\frac{1}{n!}\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\}$. Эти выражения причинны в упомянутом смысле в отличие от (3I.б), (32.б) и (33.б). В качестве еще одного примера снова рассмотрим S-матрицу[x)]:

$$\mathcal{U}(t,t')=\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{\mathcal{U}}(t,t')|\varphi\rangle\equiv\Lambda^{-1}\langle\varphi|\,\mathcal{U}(t,t';\hat{\varphi}(y))|\varphi\rangle=$$

$$=\mathcal{U}\left(t,t';\varphi(y)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\cdot 1=$$

$$=\tilde{\mathcal{U}}\left(t,t';\varphi(y)-\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\cdot 1\ . \qquad (34)$$

Работая с этими выражениями, мы можем прямо в ПКС прийти к разложению (7), не обращаясь к обычному операторному формализму. Для краткости введем обозначения

$$\mathcal{U}(t,t';+)\equiv\mathcal{U}\left(t,t';\varphi(y)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)=T\exp i\int_{t'}^{t}d^4x\,\mathcal{L}_I\left(\varphi(x)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right), \qquad (35)$$

$$\tilde{\mathcal{U}}(t,t';-)\equiv\tilde{\mathcal{U}}\left(t,t';\varphi(y)-\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)=\overline{T}\exp i\int_{t'}^{t}d^4x\,\mathcal{L}_I\left(\varphi(x)-\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right). \qquad (36)$$

С учетом соотношений

$$\mathcal{U}^{-1}(t,t';+)\,\mathcal{U}(t,t';+)=1\,,\qquad \tilde{\mathcal{U}}^{-1}(t,t';-)\,\tilde{\mathcal{U}}(t,t';-)=1 \qquad (37)$$

из (34) следует свойство

$$\mathcal{U}^{-1}(t,t';+)\,\tilde{\mathcal{U}}(t,t';-)\cdot 1=1\ , \qquad (38)$$

которое выполняется только в применении к единице.

Теперь обратимся к оператору поля в гайзенберговской картине и представим его как оператор в ПКС:

$$\langle\varphi|\hat{\varphi}(x)\hat{Q}|\varphi\rangle=\langle\varphi|\hat{\mathcal{U}}^{-1}(x_0,t')\hat{\varphi}(x)\,\mathcal{U}(x_0,t')\hat{Q}|\varphi\rangle=$$

$$=\mathcal{U}^{-1}(x_0,t';(\ )_\Lambda)(\ )_\Lambda\,\mathcal{U}(x_0,t';(\ )_\Lambda)\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle=$$

$$=\Lambda\,\mathcal{U}^{-1}(x_0,t';+)\left(\varphi(x)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\mathcal{U}(x_0,t';+)\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle=$$

$$=\Lambda\Phi(x)\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle\ . \qquad (39)$$

Таким образом, представитель $\hat{\varphi}(x)$ в ПКС-2 есть

---

x) $\hat{\mathcal{U}}(t,t')\equiv\mathcal{U}(t,t';\hat{\varphi}(y))$ – обычная S-матрица в картине взаимодействия.

$$\Phi(x)=\mathcal{U}^{-1}(x_0,t';+)\left(\varphi(x)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\mathcal{U}(x_0,t';+)\ . \qquad (40)$$

Из этого определения для оператора $\Phi(x)$ можно получить уравнение, аналогичное уравнению Янга-Фелдмана,

$$\Phi(x)=\varphi(x)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}+\int_{t'}^{t}d^4y\,\Delta_{ret}(x-y)\,j(\Phi(y))\ . \qquad (4I)$$

Если рассмотреть

$$\langle\varphi|\hat{Q}\hat{\varphi}(x)|\varphi\rangle=\Lambda\tilde{\mathcal{U}}(x_0,t';-)\left(\varphi(x)-\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\tilde{\mathcal{U}}^{-1}(x_0,t';-)\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle=$$

$$=\Lambda\Phi^*(x)\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{Q}|\varphi\rangle\ , \qquad (42)$$

придем к соотношениям, комплексно-сопряженным (40) и (4I).

Уравнение (4I) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$(\Box-m^2)\Phi(x)=-j(\Phi(x)) \qquad (43)$$

с начальными условиями, содержащими функциональные производные,

$$\Phi(\vec{x},t')=\varphi(\vec{x},t')+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\dot{\varphi}(\vec{x},t')}\ ,\qquad \dot{\Phi}(\vec{x},t')=\dot{\varphi}(\vec{x},t')-\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{x},t')}\cdot \qquad (44)$$

Из (39) и (42) для введенной в /9/ величины $\varphi(x)$ находим

$$\varphi(x)=\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{\varphi}(x)|\varphi\rangle=\Phi(x)\cdot 1=\Phi^*(x)\cdot 1=\mathrm{Re}\,\Phi(x)\cdot 1\ . \qquad (45)$$

Для связи $\hat{\varphi}^3(x)$ из (40) или итерируя уравнение (4I) находим с точностью до третьего порядка

$$\Phi(1)=\varphi(1)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(1)}+g\int d^4x_2\,\Delta_{ret}(12)\left(\varphi(2)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(2)}\right)^2+$$

$$+g^2\int d^4x_2\,d^4x_3\,\Delta_{ret}(12)\Delta_{ret}(23)\left\{\left(\varphi(2)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(2)}\right),\left(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}\right)^2\right\}+$$

$$+g^3\int d^4x_2\,d^4x_3\,d^4x_4\,\Delta_{ret}(12)\Delta_{ret}(23)\Bigg(\Delta_{ret}(24)\frac{1}{2}\left\{\left(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}\right)^2,\left(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)}\right)^2\right\}+$$

$$+\Delta_{ret}(34)\left\{\left(\varphi(2)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(2)}\right)\left\{\left(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}\right),\left(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)}\right)^2\right\}\right\}\Bigg)+g^4\ldots\ . \qquad (46)$$

Входящие сюда выражения можно записать следующим образом:

$$\left(\varphi(2)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(2)}\right)^2=\varphi^2(2)+i\,\varphi(2)\frac{\delta}{\delta J(2)}-\frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{\delta J(2)}\right)^2\ ,$$

$$\left\{\left(\varphi(2)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(2)}\right),\left(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}\right)^2\right\}=2\varphi(2)\left(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}\right)^2+i\left(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}\right)^2\frac{\delta}{\delta J(2)}\ ,$$

$$\left\{\left(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}\right)^2,\left(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)}\right)^2\right\}=2\varphi^2(3)\left(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)}\right)^2+2i\varphi(3)\left(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)}\right)^2\frac{\delta}{\delta J(3)}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)}\right)^2\left(\frac{\delta}{\delta J(3)}\right)^2-\hbar^2\Delta^2(34)\ ,$$

$$\{(\varphi(2)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(2)})\{(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}),(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)})^2\}\}= \tag{47}$$
$$=2\varphi(2)\{(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}),(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)})^2\}+i\{(\varphi(3)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(3)}),(\varphi(4)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(4)})^2\}\frac{\delta}{\delta J(2)}\,.$$

В применении к единице эти выражения соответственно дают

$$\varphi^2(2),\quad 2\varphi(2)\varphi^2(3),\quad 2\varphi^2(3)\varphi^2(4)-\hbar^2\Delta^2(34),\quad 4\varphi(2)\varphi(3)\varphi^2(4), \tag{48}$$

т.е. то же, что в классике, за исключением добавки $-\hbar^2\Delta^2(34)$ в третьем члене. Эта добавка дает первую квантовую поправку[x)]

$$-g^3\hbar^2\int_{t'}^{t} d^4x_2\,d^4x_3\,d^4x_4\,\Delta_{ret}(12)\Delta_{ret}(23)\Delta_{ret}(24)\Delta^2_{ret}(34) \tag{49}$$

к ряду Неймана в классике. Таким образом, соотношение

$$\Phi(x)\cdot 1=\varphi(x)+\int_{t'}^{t} d^4y\,\Delta_{ret}(x-y)\,j(\Phi(y))\cdot 1 \tag{50}$$

не сводится к классическому уравнению для $\varphi(x)=\Phi(x)\cdot 1$.

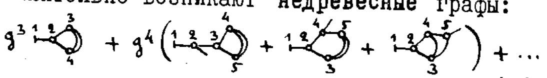
Связь выражений (47) с симметризованными произведениями $\varphi(x_k)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x_k)}$ точно такая же, как для обычных операторов поля $\hat\varphi(x_k)$ (первое, второе и четвертое симметричные, третье становится симметричным за вычетом $-\hbar^2\Delta^2(34)$).

x) Этот и другие квантовые поправки получаются и из формулы (A.I) в /9/, так как не все участвующие там повторные антикоммутаторы прямо сводятся к симметризованным произведениям:

$$\{\hat\varphi^2(3),\hat\varphi^2(4)\}=\frac{1}{12}\{\hat\varphi(3)\hat\varphi(3')\hat\varphi(4)\hat\varphi(4')\}_{3'\to3,4'\to4}-\hbar^2\Delta^2(34)\,,$$

$$\{\hat\varphi(2)\{\hat\varphi^2(4),\hat\varphi^2(5)\}\}=\frac{1}{30}\{\hat\varphi(2)\hat\varphi(4)\hat\varphi(4')\hat\varphi(5)\hat\varphi(5')\}_{4'\to4,5'\to5}-2\hbar^2\Delta^2(45)\hat\varphi(2)\,,$$
$$\{\hat\varphi^2(3)\{\hat\varphi(4),\hat\varphi^2(5)\}\}=\frac{1}{30}\{\hat\varphi(4)\hat\varphi(3)\hat\varphi(3')\hat\varphi(5)\hat\varphi(5')\}_{3'\to3,5'\to5}-2\hbar^2\Delta^2(35)\hat\varphi(4)-4\hbar^2\Delta(34)\Delta(35)\hat\varphi(5)\,,$$
$$\{\hat\varphi(2)\{\hat\varphi(3)\{\hat\varphi(4),\hat\varphi^2(5)\}\}\}=\frac{1}{15}\{\hat\varphi(2)\hat\varphi(3)\hat\varphi(4)\hat\varphi(5)\hat\varphi(5')\}_{5'\to5}\,.$$

Таким образом, после перехода к симметризованным произведениям дополнительно возникают **недревесные** графы:



Поэтому уравнения (9),(27),(28) и (46) в /9/ следует понимать в операторном смысле, а иначе они верны только в пределе $\hbar\to0$.

Аналогичные вычисления в четвертом порядке дают

$$4\varphi(2)\varphi^2(4)\varphi^2(5)-2\hbar^2\Delta^2(45)\varphi(2),\quad 4\varphi(4)\varphi^2(3)\varphi^2(5)-2\hbar^2\Delta^2(35)\varphi(4)-4\hbar^2\Delta(34)\Delta(35)\varphi(5),$$
$$8\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)\varphi^2(5) \tag{51}$$

и, таким образом, поправки

$$-g^4\hbar^2\int d^4x_2\,d^4x_3\,d^4x_4\,d^4x_5\,\Delta_{ret}(12)\Delta_{ret}(23)\Big(\Delta_{ret}(34)\Delta_{ret}(35)\Delta^2(45)\varphi(2)+$$
$$+\Delta_{ret}(24)\Delta_{ret}(45)\big(2\Delta^2(35)\varphi(4)+4\Delta(34)\Delta(35)\varphi(5)\big)\Big)\,. \tag{52}$$

В качестве примера величин более сложных, чем операторы поля, рассмотрим тензор энергии-импульса. Сперва рассмотрим его в картине взаимодействия

$$\langle\varphi|\hat T_{\mu\nu}(x)|\varphi\rangle=\langle\varphi|-\partial_\mu\hat\varphi(x)\partial_\nu\hat\varphi(x)-\delta_{\mu\nu}\hat{\mathcal L}(x)|\varphi\rangle=$$
$$=\langle\varphi|-\partial_\mu\hat\varphi(x)\partial_\nu\hat\varphi(x)+\delta_{\mu\nu}\Big(\frac12\partial_\lambda\hat\varphi(x)\partial_\lambda\hat\varphi(x)+\frac{m^2}{2}\hat\varphi^2(x)+\frac{f}{3}\hat\varphi^3(x)+\frac{g}{4}\hat\varphi^4(x)\Big)|\varphi\rangle=$$
$$=-\partial_\mu\varphi(x)\partial_\nu\varphi(x)+\frac12\partial_\mu\partial_\nu\Delta^{(1)}(0)+\delta_{\mu\nu}\Big(\frac12\partial_\lambda\varphi(x)\partial_\lambda\varphi(x)+\frac{m^2}{2}\varphi^2(x)-\frac14\underbrace{(\Box-m^2)\Delta^{(1)}(0)}_{=0}+$$
$$+\frac{f}{3}\Big(\varphi^3(x)+\frac32\Delta^{(1)}(0)\varphi(x)\Big)+\frac{g}{4}\Big(\varphi^4(x)+3\Delta^{(1)}(0)\varphi^2(x)+\frac34\Delta^{(1)2}(0)\Big)\Big)\,. \tag{53}$$

Исходное выражение для $\hat T_{\mu\nu}(x)$ подразумевалось симметризованным, и в результате N-упорядочивания появились $\Delta^{(1)}(0)$, причем член $\frac12\partial_\mu\partial_\nu\Delta^{(1)}(0)$ как раз дает энергию нулевых колебаний вакуума

$$\frac12\partial_4^2\Delta^{(1)}(0)=\frac12\int d^3p\,\omega(\vec p)\,. \tag{54}$$

Подействовав Λ^{-1}, мы устраняем все члены с $\Delta^{(1)}(0)$:

$$T_{\mu\nu}(x)=\Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat T_{\mu\nu}(x)|\varphi\rangle=\langle\varphi|\hat T'_{\mu\nu}(x)|\varphi\rangle=$$
$$=-\partial_\mu\varphi(x)\partial_\nu\varphi(x)+\delta_{\mu\nu}\Big(\frac12\partial_\lambda\varphi(x)\partial_\lambda\varphi(x)+\frac{m^2}{2}\varphi^2(x)+\frac{f}{3}\varphi^3(x)+\frac{g}{4}\varphi^4(x)\Big)\,. \tag{55}$$

Если рассмотреть $\langle\varphi|\hat T_{\mu\nu}(x)\hat Q|\varphi\rangle$ и $\langle\varphi|\hat Q\hat T_{\mu\nu}(x)|\varphi\rangle$, то придем к комплексным операторам $\mathcal T_{\mu\nu}(x)$ и $\mathcal T^*_{\mu\nu}(x)$, представляющим $\hat T_{\mu\nu}(x)$ в ПКС, которые получаются из (55) просто заменой $\varphi(x)$ на $\varphi(x)\pm\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}$. При этом

$$T_{\mu\nu}(x)=\mathcal T_{\mu\nu}(x)\cdot 1=\mathcal T^*_{\mu\nu}(x)\cdot 1\,. \tag{56}$$

Аналогично представителем в ПКС-2 для тензора энергии-импульса в гайзенберговской картине будет сохраняющийся комплексный оператор

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu}(x) = -\partial_\mu \Phi(x)\partial_\nu \Phi(x) + \delta_{\mu\nu}\Big(\tfrac{1}{2}\partial_\lambda \Phi(x)\partial_\lambda \Phi(x) + \tfrac{m^2}{2}\Phi^2(x) + $$
$$+ \tfrac{f}{3}\Phi^3(x) + \tfrac{g}{4}\Phi^4(x)\Big), \qquad \partial_\mu \mathfrak{T}_{\mu\nu}(x) = 0 \tag{57}$$

(подразумевается симметризация), а

$$\mathbb{T}_{\mu\nu}(x) = \Lambda^{-1}\langle\varphi|\hat{\mathbb{T}}_{\mu\nu}(x)|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{\mathbb{T}}'_{\mu\nu}(x)|\varphi\rangle = \mathfrak{T}_{\mu\nu}(x)\cdot 1 = \mathfrak{T}^*_{\mu\nu}(x)\cdot 1 . \tag{58}$$

Точно так же в ПКС будут иметь формально свой обычный вид и представители любых других сохраняющихся и несохраняющихся операторов.

Функции Грина можно представить в ПКС следующим образом:

$$\langle\varphi|T(\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi(x_n)\,\hat U(t,t'))|\varphi\rangle_{|J=0} =$$
$$= \Lambda T\Big(\big(\varphi(x_1) + \tfrac{i}{2}\tfrac{\delta}{\delta J(x_1)}\big)\cdots\big(\varphi(x_n) + \tfrac{i}{2}\tfrac{\delta}{\delta J(x_n)}\big)\,U(t,t';+)\Big)\cdot 1_{|J=0} , \tag{59}$$

и можно говорить об операторных представителях

$$\mathcal{G}(x_1\ldots x_n) = T\Big(\big(\varphi(x_1) + \tfrac{i}{2}\tfrac{\delta}{\delta J(x_1)}\big)\cdots\big(\varphi(x_n) + \tfrac{i}{2}\tfrac{\delta}{\delta J(x_n)}\big)\,U(t,t';+)\Big) \tag{60}$$

с причинной структурой.

Обычные амплитуды перехода вычисляются в ПКС, например, так:

$$\langle\varphi|\hat\varphi^{(-)}(y_1)\ldots\hat\varphi^{(-)}(y_{n_f})\,\hat U(t,t')\,\hat\varphi^{(+)}(x_1)\ldots\hat\varphi^{(+)}(x_{n_i})|\varphi\rangle_{J=0} =$$
$$= \Lambda^2\varphi^{(-)}(y_1)\ldots\varphi^{(-)}(y_{n_f})\Lambda^{-1}\,U(t,t';+)\Lambda^{-1}\varphi^{(+)}(x_1)\ldots\varphi^{(+)}(x_{n_i})\cdot 1_{|J=0} = \tag{61.а}$$
$$= \Lambda^2\varphi^{(-)}(y_1)\ldots\varphi^{(-)}(y_{n_f})\,\varphi^{(+)}(x_1)\ldots\varphi^{(+)}(x_{n_i})\Lambda^{-2}\langle\varphi|\hat U(t,t')|\varphi\rangle_{|J=0} = \tag{61.б}$$
$$= \Lambda^2\varphi^{(-)}(y_1)\ldots\varphi^{(-)}(y_{n_f})\,\varphi^{(+)}(x_1)\ldots\varphi^{(+)}(x_{n_i})\Lambda^{-1}\,U(t,t';+)\cdot 1_{|J=0} \tag{61.в}$$

или используя (ср.[II])

$$\langle\varphi|[\hat\varphi(x_n)\ldots[\hat\varphi(x_1),\hat U(t,t')]\ldots]|\varphi\rangle_{|J=0} = i^n\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\langle\varphi|\hat U(t,t')|\varphi\rangle_{|J=0} = \tag{62.а}$$
$$= i^n\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\Lambda U(t,t';+)\cdot 1_{|J=0} . \tag{62.б}$$

Аналогично (6I) можно представить и вероятности

$$\langle\varphi|\hat\varphi^{(-)}(y_1)\ldots\hat\varphi^{(-)}(y_{n_f})\,\hat U^{-1}(t,t')\,\hat\rho_i(t)\hat U(t,t')\,\hat\varphi^{(+)}(x_1)\ldots\hat\varphi^{(+)}(x_{n_f})|\varphi\rangle . \tag{63}$$

Применение обычных амплитуд вероятности подразумевает описание квантов комплексными (положительно- и отрицательночастотными) функциями. Формально, разумеется, нетрудно перейти на язык вещественных функций ($\varphi(x) = 2\,\mathrm{Re}\,\varphi^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(1)}(x) = -2\,\mathrm{Im}\,\varphi^{(-)}(x)$ или $\varphi(x)$ и $\dot\varphi(x)$ для одного кванта, $\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)$ и т.п. для n квантов).

Все применявшиеся в ПКС операции имеют аналоги в обычной операторной форме квантовой теории поля. Дифференцированию по $J(x)$ соответствует коммутатор с оператором поля $\hat\varphi(x)$, и коэффициентные функции разложения по N-произведениям можно находить согласно

$$F(x_1\ldots x_n) = \langle 0|[\hat\varphi(x_n)[\hat\varphi(x_{n-1})\ldots[\hat\varphi(x_1),\hat Q]\ldots]]|0\rangle \tag{64}$$

вместо n-кратного дифференцирования по $J(x)$ и приравнивания $J=0$. Однако нас особенно интересовали коэффициентные функции разложений по симметризованным произведениям ввиду причинного характера таких функций. Операторы можно связать с их штрихованными двойниками, у которых такие коэффициентные функции стоят при N-произведениях, согласно

$$\hat Q = \hat\Lambda\hat Q'\hat\Lambda^{-1} = \hat Q' + \frac{i}{4}\int d^3x'\,[\hat\varphi(x')\overleftrightarrow{\partial}'_4\,[\hat\varphi^{(1)}(x'),\hat Q']] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\Big(\frac{i}{4}\Big)^2\int d^3x'\,d^3x''\,[\hat\varphi(x'')\overleftrightarrow{\partial}''_4\,[\hat\varphi^{(1)}(x'')[\hat\varphi(x')\overleftrightarrow{\partial}'_4[\hat\varphi^{(1)}(x'),\hat Q']]]] + \ldots, \tag{65}$$

где $\hat\varphi^{(1)}(x)$ - оператор поля, подвергнутый преобразованию Гильберта (определение см. в Приложении А). Таким образом, мы можем получить штрихованные операторы $\hat\varphi'(x), \hat U'(t,t')$ и любые другие. В частности,

$$\frac{1}{n!}\{\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi(x_n)\} = \hat\Lambda:\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi(x_n):\hat\Lambda^{-1} . \tag{66}$$

4. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ПКС

У вектор-потенциала $A_\mu(x)$ и у соответствующего $J_\mu(x)$ все отличие от скалярного случая состоит в наличии векторного индекса, и мы не будем повторяться. Для спинорного поля в картине взаимодействия имеем

$$\left.\begin{matrix}\langle A\psi|\hat{\psi}(x)\hat{Q}|A\psi\rangle \\ \langle A\psi|\hat{Q}\hat{\psi}(x)|A\psi\rangle\end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix}1\\ \xi_Q\end{pmatrix}\left(\psi(x) \pm \int d^3\xi\, S^{(\mp)}(x-\xi)\gamma_4\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(\xi)}\right)\langle A\psi|\hat{Q}|A\psi\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\ \xi_Q\end{pmatrix}\Lambda\left(\psi(x) \pm \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)\Lambda^{-1}\langle A\psi|\hat{Q}|A\psi\rangle\,, \qquad (67)$$

$$\left.\begin{matrix}\langle A\psi|\hat{\bar{\psi}}(x)\hat{Q}|A\psi\rangle \\ \langle A\psi|\hat{Q}\hat{\bar{\psi}}(x)|A\psi\rangle\end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix}1\\ \xi_Q\end{pmatrix}\left(\bar{\psi}(x) \pm \int d^3\xi\, \frac{\delta}{\delta\eta(\xi)}\gamma_4 S^{(\pm)}(\xi-x)\right)\langle A\psi|\hat{Q}|A\psi\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\ \xi_Q\end{pmatrix}\Lambda\left(\bar{\psi}(x) \pm \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right)\Lambda^{-1}\langle A\psi|\hat{Q}|A\psi\rangle\,, \qquad (68)$$

где для правых операторов появляется численный множитель ξ_Q, равный +I при четном и -I при нечетном числе спиноров в составе оператора $\hat{Q}$. Оператор Λ имеет вид

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^3\xi\, d^3\zeta\, \frac{\delta}{\delta\eta(\xi)}\gamma_4 S^{(1)}(\xi-\zeta)\gamma_4\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(\zeta)}\right)\,. \qquad (69)$$

Далее отметим соотношения

$$\Lambda\psi(x)\Lambda^{-1} = \psi(x) - \frac{i}{2}\int d^3\xi\, S^{(1)}(x-\xi)\gamma_4\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(\xi)}\,, \qquad (70)$$

$$\Lambda\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1} = \bar{\psi}(x) + \frac{i}{2}\int d^3\xi\, \frac{\delta}{\delta\eta(\xi)}\gamma_4 S^{(1)}(\xi-x)\,, \qquad (71)$$

---

x) Спинорные когерентные состояния записываются в виде

$$|\psi\rangle = \exp(i\eta\cdot\hat{\psi} + i\hat{\bar{\psi}}\cdot\eta)|0\rangle = \exp(i\hat{\psi}_c\cdot\eta_c + i\hat{\psi}\cdot\eta)|0\rangle = \qquad \left(\eta\cdot\hat{\psi} = \int_{t'}^{t} d^4x\,\bar{\eta}(x)\hat{\psi}(x)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, \bar{\eta}(x)S^{(1)}(x-y)\eta(y)\right)\exp\left(i\int_{t'}^{t} d^4x\left(\bar{\eta}(x)\hat{\psi}^{(+)}(x) + \hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)\eta(x)\right)\right)|0\rangle,$$ причем

$$\psi(x) = \int_{t'}^{t} d^4y\, S(x-y)\eta(y)\,, \qquad \bar{\psi}(x) = -\int_{t'}^{t} d^4y\,\bar{\eta}(y)S(y-x)$$

подчиняются алгебре Грассмана и

$\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\bar{\psi}(y)\cdot 1 = \frac{\delta}{\delta\eta(y)}\psi(x)\cdot 1 = -S(x-y)$ ($\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}$ действует направо, а $\frac{\delta}{\delta\eta}$ - налево!)

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} = -i\int d^3\xi\, S(x-\xi)\gamma_4\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(\xi)}\,, \qquad \frac{\delta}{\delta\eta(x)} = -i\int d^3\xi\,\frac{\delta}{\delta\eta(\xi)}\gamma_4 S(\xi-x)\,. \qquad (72)$$

Положительно- и отрицательночастотные части можно выделить с помощью формул

$$\psi^{(\mp)}(x) = -i\int d^3\xi\, S^{(\mp)}(x-\xi)\gamma_4\psi(\xi) = \int_{t'}^{t} d^4y\, S^{(\mp)}(x-y)\eta(y)\,, \qquad (73)$$

$$\bar{\psi}^{(\mp)}(x) = -i\int d^3\xi\,\bar{\psi}(\xi)\gamma_4 S^{(\pm)}(\xi-x) = -\int_{t'}^{t} d^4y\,\bar{\eta}(y)S^{(\pm)}(y-x)\,. \qquad (74)$$

Легко проверить, что полученные представители операторов поля имеют те же перестановочные соотношения, что и исходные операторы поля, и что снова все левые представители коммутируют со всеми правыми.

Далее, как и для скалярного поля, можно получить комплексные представители гайзенберговских операторов:

$$\mathcal{A}_\mu(x) = U^{-1}(x_0,t';+)\left(A_\mu(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)U(x_0,t';+)\,, \qquad (75)$$

$$\Psi(x) = U^{-1}(x_0,t';+)\left(\psi(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)U(x_0,t';+)\,, \qquad (76)$$

$$\bar{\Psi}(x) = U^{-1}(x_0,t';+)\left(\bar{\psi}(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right)U(x_0,t';+)\,, \qquad (77)$$

где $U(t,t';+)$ - обычная электродинамическая S-матрица, записанная в ПКС-2,

$$U(t,t';+) = T\exp\left(i\int_{t'}^{t} d^4x\,\mathcal{L}_I(x;+)\right)\,, \qquad (78)$$

$$\mathcal{L}_I(x;+) = \frac{ie}{2}\left(A_\mu(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\left[\left(\bar{\psi}(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right), \gamma_\mu\left(\psi(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)\right]. \qquad (79)$$

Из (75)-(77) мы можем прийти к уравнениям движения, например, в форме уравнений Янга-Фелдмана:

$$\mathcal{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} + \int_{t'} d^4y\,\Delta_{ret}(x-y)\mathcal{J}_\mu(y)\,, \qquad (80)$$

$$\Psi(x) = \psi(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} - ie\int_{t'} d^4y\, S_{ret}(x-y)\gamma_\mu\mathcal{A}_\mu(y)\Psi(y)\,, \qquad (81)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \bar{\psi}(x) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\eta(x)} - ie\int_{t'}^{t} d^4y\,\bar{\Psi}(y)\gamma_\mu\mathcal{A}_\mu(y)S_{adv}(y-x) \qquad (82)$$

(где $\mathcal{J}_\mu(x)$ – представитель гайзенберговского тока

$$\mathcal{J}_\mu(x)=\frac{ie}{2}\left[\overline{\Psi}(x),\gamma_\mu\Psi(x)\right]\quad), \tag{83}$$

или в форме обычных дифференциальных уравнений электродинамики:

$$\Box\mathcal{A}_\mu(x)=-\mathcal{J}_\mu(x)\,,\qquad \left(\gamma_\mu(\partial_\mu-ie\mathcal{A}_\mu(x))+m\right)\Psi(x)=0\,, \tag{84}$$

но с необычными начальными условиями, содержащими функциональные производные.

$$\mathcal{A}_\mu(\vec{x},t')=A_\mu(\vec{x},t')+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\dot{A}_\mu(\vec{x},t')}\,,\qquad \dot{\mathcal{A}}_\mu(\vec{x},t')=\dot{A}_\mu(\vec{x},t')-\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta A_\mu(\vec{x},t')}\,,$$

$$\Psi(\vec{x},t')=\psi(\vec{x},t')+\frac{1}{2}\gamma_4\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(\vec{x},t')}\,,\qquad \overline{\Psi}(\vec{x},t')=\overline{\psi}(\vec{x},t')-\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\psi(\vec{x},t')}\gamma_4\,. \tag{85}$$

Применяя уравнения (80) и (8I) к единице, получим соотношения

$$A_\mu(x)=\Lambda_A^{-1}\Lambda_\psi^{-1}\langle A\psi|\hat{A}_\mu(x)|A\psi\rangle=\langle A\psi|\hat{A}'_\mu(x)|A\psi\rangle=\mathcal{A}_\mu(x)\cdot 1=A_\mu(x)+\int_{t'}d^4y\,\Delta_{ret}(x-y)\mathcal{J}_\mu(y)\cdot 1\,, \tag{86}$$

$$\psi(x)=\Lambda_A^{-1}\Lambda_\psi^{-1}\langle A\psi|\hat{\psi}(x)|A\psi\rangle=\langle A\psi|\hat{\psi}'(x)|A\psi\rangle=\Psi(x)\cdot 1=\psi(x)-ie\int_{t'}d^4y\,S_{ret}(x-y)\gamma_\mu\mathcal{A}_\mu(y)\Psi(y)\cdot 1\,, \tag{87}$$

разложения которых по теории возмущений, помимо членов, обычных для рядов Неймана в "классике", содержат квантовые поправки, однако явно причинные (апричинность исключена при помощи Λ^{-1}).

В терминах полученных представителей в обычной форме записываются все сохраняющиеся и несохраняющиеся операторы, например, 4-вектор тока, заряд, тензор энергии-импульса, 4-импульс, 4-момент и т.д. Средние в когерентных состояниях получаются путем применения этих операторов к единице, например,

$$j_\mu(x)=\Lambda_A^{-1}\Lambda_\psi^{-1}\langle A\psi|\hat{j}_\mu(x)|A\psi\rangle=\langle A\psi|\hat{j}'_\mu(x)|A\psi\rangle=\mathcal{J}_\mu(x)\cdot 1\,. \tag{88}$$

Отметим, что в обычной операторной теории поля связь между операторами и их штрихованными двойниками можно записать в виде

$$\hat{Q}=\hat{\Lambda}_A\hat{\Lambda}_\psi\hat{Q}'\hat{\Lambda}_\psi^{-1}\hat{\Lambda}_A^{-1}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_\psi\hat{Q}\hat{\Lambda}_\psi^{-1}=\hat{Q}&-\frac{i}{2}\int d^3\xi\left[\overline{\eta}\hat{\overline{\psi}}(\xi)\gamma_4\left[\eta\hat{\psi}^{(1)}(\xi),\hat{Q}\right]\right]+\\&+\frac{1}{2!}\left(\frac{-i}{2}\right)^2\int d^3\xi_1\,d^3\xi_2\left[\overline{\eta}\hat{\overline{\psi}}(\xi_2)\gamma_4\left[\eta\hat{\psi}^{(1)}(\xi_2)\left[\overline{\eta}\hat{\overline{\psi}}(\xi_1)\gamma_4\left[\eta\hat{\psi}^{(1)}(\xi_1),\hat{Q}\right]\right]\right]\right]+\dots\end{aligned} \tag{89}$$

где $\hat{\psi}^{(1)}(x)$ – преобразование Гильберта от поля $\hat{\psi}(x)$, а η и $\overline{\eta}$ – константные антикоммутирующие спиноры со свойством $\overline{\eta}\eta=1$.

5. ПРИМЕРЫ ИЗ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Приведем простейшие примеры из квантовой механики, которые еще раз проиллюстрируют роль операции Λ и позволят сопоставить две формы ПКС (без исключения Λ и с исключением).[x)]

I) Свободная нерелятивистская частица $\left(\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}\right)$

$$\left.\begin{matrix}\langle xp|\hat{H}\hat{Q}|xp\rangle\\ \langle xp|\hat{Q}\hat{H}|xp\rangle\end{matrix}\right\}=\frac{\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}{2m}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle=\Lambda\frac{\left(p\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}{2m}\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle,$$

так что

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{H}\\ \mathcal{H}^*\end{matrix}\right\}=\frac{\left(p\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}{2m}\,,\qquad H=\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{H}|xp\rangle=\mathcal{H}\cdot 1=\frac{p^2}{2m}\,,$$

тогда как

$$\langle xp|\hat{H}|xp\rangle=\Lambda H=\frac{(\Lambda p\Lambda^{-1})^2}{2m}1=\frac{\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2}{2m}1=\frac{p^2}{2m}+\frac{A}{4m}\,.$$

Для эволюции среднего от координаты имеем

$$x(t)=\langle xp|\hat{x}(t)|xp\rangle=\langle xp|\hat{x}(0)+\frac{\hat{p}}{m}t\rangle=x(0)+\frac{p}{m}t\quad\left(=\mathcal{X}(t)\cdot 1\right).$$

Из определения

$$\langle xp|\hat{x}(t)\hat{Q}|xp\rangle=\Lambda\mathcal{X}(t)\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle \tag{90}$$

находим

$$\mathcal{X}(t)=x+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}+\frac{t}{m}\left(p-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)=x(t)+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta f(t)}\,.$$

2) Осциллятор $\left(\hat{H}=\frac{\omega}{2}\left(A^{-1}\hat{p}^2+A\hat{x}^2\right),\ A=m\omega\right)$

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix}\langle xp|\hat{H}\hat{Q}|xp\rangle\\ \langle xp|\hat{Q}\hat{H}|xp\rangle\end{matrix}\right\}&=\frac{\omega}{2}\left(A^{-1}\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+A\left(x+\frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle=\\&=\frac{\omega}{2}\Lambda\left(A^{-1}\left(p\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+A\left(x\pm\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2\right)\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{H}\\ \mathcal{H}^*\end{matrix}\right\}=\frac{\omega}{2}\left(A^{-1}\left(p\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+A\left(x\pm\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2\right),\ H=\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{H}|xp\rangle=\mathcal{H}\cdot 1=\frac{\omega}{2}\left(A^{-1}p^2+Ax^2\right),$$

$$\langle xp|\hat{H}|xp\rangle=\frac{\omega}{2}\left(A^{-1}\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2+A\left(x+\frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right)\cdot 1=\frac{\omega}{2}\left(A^{-1}p^2+Ax^2\right)+\frac{\omega}{2}\,,$$

---

x) Основные формулы, необходимые для перехода в ПКС в квантовой механике как в одномерном, так и в многомерных случаях, приведены в Приложении Б.

$$\langle xp|\hat{x}(t)|xp\rangle = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m}\,\frac{\sin\omega t}{\omega}\ .$$

3) Атом водорода $\left(\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\hat{\vec{x}}|}\right)$

$$\left.\begin{matrix}\langle xp|\hat{H}\hat{Q}|xp\rangle \\ \langle xp|\hat{Q}\hat{H}|xp\rangle\end{matrix}\right\} = \left(\frac{\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}{2m} - \frac{e^2}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2}}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle$$

$$= \Lambda\left(\frac{\left(p\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}{2m} - \frac{e^2}{\sqrt{\left(x\pm\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2}}\right)\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\ ,$$

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{H} \\ \mathcal{H}^*\end{matrix}\right\} = \frac{\left(p\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}{2m} - \frac{e^2}{\sqrt{\left(x\pm\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2}}\ ,\quad H = \Lambda^{-1}\langle xp|\hat{H}|xp\rangle = \mathcal{H}\cdot 1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{|x|}\ .$$

4) Свободная релятивистская частица $\left(\hat{H} = \sqrt{\hat{\vec{p}}^2+m^2}\right)$

$$\left.\begin{matrix}\langle xp|\hat{H}\hat{Q}|xp\rangle \\ \langle xp|\hat{Q}\hat{H}|xp\rangle\end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+m^2}\,\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = \Lambda\sqrt{\left(p\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+m^2}\,\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle,$$

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{H} \\ \mathcal{H}^*\end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(p\mp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+m^2}\ ,\ H = \Lambda^{-1}\langle xp|\hat{H}|xp\rangle = \mathcal{H}\cdot 1 = \sqrt{p^2+m^2}\ ;$$

$$\langle xp|\hat{H}|xp\rangle = \sqrt{\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2+m^2}\cdot 1\ .$$

В релятивистском случае величина $\vec{p}(t)\hat{\vec{x}}(t) - \vec{x}(t)\hat{\vec{p}}(t)$ не сохраняется, и поэтому когерентное состояние

$$|xp\rangle = \exp i\left(\vec{p}(t)\hat{\vec{x}}(t) - \vec{x}(t)\hat{\vec{p}}(t)\right)|0\rangle$$

зависит от времени (в отличие от всех обсуждавшихся нами до сих пор случаев из квантовой теории поля и квантовой механики). Пусть $|xp\rangle$ отнесено к моменту времени $t=0$. Тогда

$$\langle xp|\hat{x}_n(t)|xp\rangle = \langle xp|\hat{x}_n(0) + \frac{\hat{p}_n}{\hat{H}}t\,|xp\rangle = x_n(0) + \frac{\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)_n}{\sqrt{\left(p+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2+m^2}}\cdot 1t\ (x_n \equiv x_n(0)).$$

Закону эволюции можно вернуть классическую форму, если применить операцию Λ^{-1}

$$x_n(t) = \langle xp|\hat{x}_n'(t)|xp\rangle = \Lambda^{-1}\langle xp|\hat{x}_n(t)|xp\rangle = x_n(0) + \frac{p_n}{H}t\ .$$

Операция Λ^{-1} понадобилась из-за нелинейной зависимости скорости от импульса, чего не было в нерелятивистском случае. Из определения

(90) находим операторный представитель.

$$\mathcal{X}_n(t) = \left(x+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)_n + t\,\frac{\left(p-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)_n}{\sqrt{\left(p-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+m^2}}\qquad (x_n \equiv x_n(0))\ .$$

Задачи на собственные значения можно формулировать в НКС следующим образом:

$$\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{H}\hat{Q}|xp\rangle = \mathcal{H}\,\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = E\,\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\ , \tag{91}$$

или

$$\mathcal{H}Q = EQ\ ,$$

где $\hat{Q}$ имеет смысл матрицы плотности, а $Q = \langle xp|\hat{Q}'|xp\rangle = \Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle$.

Возможные варианты уравнений на собственные значения

$$\mathcal{H}^*Q = EQ\ ,$$

$$\Lambda^{-1}\langle xp|\{\hat{H},\hat{Q}\}|xp\rangle = 2\lambda\,\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle,\ \text{или}\ (\mathrm{Re}\,\mathcal{H})Q = \lambda Q\ ,$$

$$\Lambda^{-1}\langle xp|[\hat{H},\hat{Q}]|xp\rangle = 2i\lambda\,\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle,\ \text{или}\ (\mathrm{Im}\,\mathcal{H})Q = \lambda Q\ .$$

Очевидно, что этим путем при соответствующих условиях можно получить обычные спектры собственных значений.

Отметим также, что условия инвариантности оператора $\hat{Q}$, например, относительно 3-мерных вращений $\left([\hat{J}_{mn},\hat{Q}]=0\right)$ приобретают естественный вид после применения операции Λ^{-1}:

$$J_{mn}Q = 0\ ,\qquad J_{mn} = x_m\frac{\partial}{\partial x_n} - x_n\frac{\partial}{\partial x_m} + p_m\frac{\partial}{\partial p_n} - p_n\frac{\partial}{\partial p_m}\ , \tag{92}$$

но выглядят сложнее, если просто расписать $\langle xp|[\hat{J}_{mn},\hat{Q}]|xp\rangle = 0$.

Операция Λ^{-1} не изменяет формулу Планка. Действительно, и

$$\langle xp|e^{-\beta\hat{H}}|xp\rangle = e^{-\gamma H}\qquad \left(\gamma = \frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{\hbar\omega}\right)$$

и $\Lambda^{-1}\langle xp|e^{-\beta\hat{H}}|xp\rangle =$

$$= \exp\left(-\beta\frac{\omega}{2}\left(A\left(p-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + A\left(x+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2\right)\right)\cdot 1 = \Lambda^{-1}e^{-\gamma H}\cdot 1 = \frac{2}{2-\gamma\hbar\omega}\,e^{-\frac{2\gamma}{2-\gamma\hbar\omega}H} \tag{93}$$

дают одно и то же значение для статистического интеграла

$$Z = \frac{1}{2\pi}\int dx\,dp\,\langle xp|e^{-\beta\hat{H}}|xp\rangle = \frac{1}{2\pi}\int dx\,dp\,\Lambda^{-1}\langle xp|e^{-\beta\hat{H}}|xp\rangle = \frac{1}{\gamma\hbar\omega} \tag{94}$$

и, таким образом, ведут к одним и тем же $\overline{E}$, $\overline{E^2}$ и т.д.

Отметим, что если ту или иную функцию $f(x,p)$ (например, $f(x,p) = \langle xp|\hat{Q}'|xp\rangle$) разложить в интеграл Фурье по x и p, то действие оператора Λ на нее эквивалентно введению в подынтегральное выражение гауссовского множителя

$$\Lambda f(x,p) = \Lambda \int d\xi\, d\eta\, e^{i\xi x + i\eta p} \tilde{f}(\xi,\eta) = \int d\xi\, d\eta\, e^{-\frac{1}{4}(A^{-1}\xi^2 + A\eta^2)} e^{i\xi x + i\eta p} \tilde{f}(\xi,\eta) \tag{95}$$

Интересно, что, взяв в ПКС-2 $Q = \delta(\vec{x} - \frac{\vec{p}}{m}t)$, получаем в ПКС-I

$$\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = \Lambda Q = \Lambda \delta(\vec{x} - \tfrac{\vec{p}}{m}t) =$$

$$= \pi^{-3/2} \det^{-\frac{1}{2}} \| A^{-1} + A(\tfrac{t}{m})^2 \| \cdot \exp\left(-\left(A^{-1} + A(\tfrac{t}{m})^2\right)^{-1} (\vec{x} - \tfrac{\vec{p}}{m}t)^2\right) \tag{96}$$

(аналогично для осциллятора). Для $Q(t') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(\vec{p} - \vec{p}')$

$$Q(t) = e^{i\frac{(p' - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x'})^2}{2m}(t-t')} e^{-i\frac{(p' + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x'})^2}{2m}(t-t')} Q(t') = \delta(\vec{x} - \vec{x}' - \tfrac{\vec{p}'}{m}(t-t'))\,\delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\Lambda Q(t) = \pi^{-3} e^{-A(\vec{x} - \vec{x}' - \frac{\vec{p}'}{m}(t-t'))^2 - A^{-1}(\vec{p} - \vec{p}')^2} \tag{97}$$

Для представителя гайзенберговского оператора, очевидно, имеем

$$\mathcal{X}(t) = U^{-1}(t,t';+)\left(x(t) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta f(t)}\right) U(t,t';+) \tag{98}$$

$$\mathcal{X}(t) = x(t) + \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta f(t)} + \int_{t'}^{t} d\tau\, G_{ret}(t-\tau) F(\mathcal{X}(\tau)) \tag{99}$$

$$\check{x}(t) = \Lambda^{-1}\langle xp|\hat{x}(t)|xp\rangle = \langle xp|\hat{x}'(t)|xp\rangle = \mathcal{X}(t)\cdot 1 = x(t) + \int_{t'}^{t} d\tau\, G_{ret}(t-\tau) F(\mathcal{X}(\tau))\cdot 1 \tag{100}$$

Уравнения движения можно записать также и в дифференциальной форме (уравнения Ньютона)

$$m\ddot{\mathcal{X}}(t) = F(\mathcal{X}(t)) \tag{101}$$

с необычными (для классики) начальными условиями, в которые входят производные,

$$\mathcal{X}(t') = x(t') + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p(t')}, \qquad m\dot{\mathcal{X}}(t') = p(t') - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x(t')} \tag{102}$$

Разумеется, ту же форму имеют уравнения и в многомерном случае и в случае, когда параметром эволюции служит параметр типа собственного времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Из определения когерентных состояний для скалярного поля следует

$$\langle\varphi|\hat{\varphi}^{(-)}(x) = \left(\frac{1}{2}\varphi^{(-)}(x) + i\int d^3\xi\, \Delta^{(-)}(x-\xi')\frac{\delta}{\delta\varphi^{(+)}(\xi')}\right)\langle\varphi| =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varphi^{(-)}(x) + \int d^3\xi\, \Delta^{(-)}(x-\xi')\left(\frac{\delta}{\delta\varphi(\xi')} + \overleftrightarrow{\partial}_4^{\xi'}\frac{\delta}{\delta\partial_4\varphi(\xi')}\right)\right)\langle\varphi| =$$

$$= \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)} + \frac{i}{2}\int_{t'}^{t''} d^4y\, \Delta^{(1)}(x-y)\, J(x)\right)\langle\varphi| =$$

$$= \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)} + \frac{1}{2}\varphi^{(-)}(x) - \frac{1}{2}\varphi^{(+)}(x)\right)\langle\varphi| =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varphi^{(-)}(x) - \int d^3\xi\, \Delta^{(-)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta J(\xi)}\right)\langle\varphi|, \tag{A.I}$$

$$\langle\varphi|\varphi(x) = \left(\varphi^{(+)}(x) + \frac{1}{2}\varphi^{(-)}(x) - \int d^3\xi\, \Delta^{(-)}(x-\xi)\overleftrightarrow{\partial}_4\frac{\delta}{\delta J(\xi)}\right)\langle\varphi| =$$

$$= \left(\varphi^{(+)}(x) + \ldots\right), \tag{A.2}$$

где вместо троеточия может быть подставлено любое выражение, стоящее перед $\langle\varphi|$ в (A.I).

Для сравнения с формулами (3I)-(33) приводим обычные разложения по N-произведениям, анти-N-произведениям и симметризованным произведениям

$$\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n) = :\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n): + \sum_{\substack{\text{одно}\\ \text{спаривание}}} i\Delta^{(-)}(x_1-x_2) :\hat{\varphi}(3)\ldots\hat{\varphi}(x_n): + \sum_{\substack{\text{два}\\ \text{спаривания}}} \ldots + \ldots =$$

$$= \vdots\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\vdots + \sum_{\substack{\text{одно}\\ \text{спаривание}}} i\Delta^{(+)}(x_1-x_2) \vdots\hat{\varphi}(x_3)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\vdots + \sum_{\substack{\text{два}\\ \text{спаривания}}} \ldots + \ldots =$$

$$= \frac{1}{n!}\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\} + \sum_{\substack{\text{один}\\ \text{коммутатор}}} \frac{1}{2}[\hat{\varphi}(x_1),\hat{\varphi}(x_2)]\frac{1}{(n-2)!}\{\hat{\varphi}(x_3)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\} +$$

$$+ \sum_{\substack{\text{два}\\ \text{коммутатора}}} \frac{1}{2}[\hat{\varphi}(x_1),\hat{\varphi}(x_2)]\frac{1}{2}[\hat{\varphi}(x_3),\hat{\varphi}(x_4)]\frac{1}{(n-4)!}\{\hat{\varphi}(x_5)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{n!}\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\} + \sum_{\substack{\text{одно}\\ \text{спаривание}}} \frac{i}{2}\Delta(x_1-x_2)\frac{1}{(n-2)!}\{\hat{\varphi}(x_3)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\} + \sum_{\substack{\text{два}\\ \text{спаривания}}} \ldots + \ldots, \tag{A.3}$$

$$\frac{1}{n!}\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\} = :\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n): + \sum_{\substack{\text{одно}\\ \text{спаривание}}} \frac{1}{2}\Delta^{(1)}(x_1-x_2) :\hat{\varphi}(x_3)\ldots\hat{\varphi}(x_n): + \sum_{\substack{\text{два}\\ \text{спаривания}}} \ldots + \ldots \tag{A.4}$$

$$= \vdots\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\vdots + \sum\left(-\tfrac{1}{2}\right)\Delta^{(1)}(x_1-x_2) \vdots\hat{\varphi}(x_3)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\vdots + \sum \ldots + \ldots,$$

$$T\,\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi(x_n) = :\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi(x_n): + \sum_{\substack{\text{одно}\\ \text{спаривание}}}(-i)\Delta_+(x_1-x_2):\hat\varphi(x_3)\ldots\hat\varphi(x_n): + \sum_{\substack{\text{два}\\ \text{спаривания}}}\cdots + \cdots =$$

$$= \vdots\,\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi(x_n)\,\vdots + \sum_{\substack{\text{одно}\\ \text{спаривание}}}(-i)\Delta_-(x_1-x_2)\,\vdots\,\hat\varphi(x_3)\ldots\hat\varphi(x_n)\,\vdots + \sum_{\substack{\text{одно}\\ \text{спаривание}}}\cdots + \cdots =$$

$$= \frac{1}{n!}\{\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi(x_n)\} + \sum_{\substack{\text{одно}\\ \text{спаривание}}}(-i)\Delta_{sym}(x_1-x_2)\frac{1}{(n-2)!}\{\hat\varphi(x_3)\ldots\hat\varphi(x_n)\} + \sum_{\substack{\text{два}\\ \text{спаривания}}}\cdots + \cdots\,. \qquad (\text{А.5})$$

В отличие от разложения $ab = \frac{1}{2}\{ab\} + \frac{1}{2}[a,b]$, (А.6)

верного всегда, остальные в общем случае отличались бы от приведенных, например,

$$abc = \frac{1}{6}\{abc\} + \frac{1}{4}\{a[bc]\} + \frac{1}{4}\{b[ac]\} + \frac{1}{4}\{c[a,b]\} +$$

$$+ \frac{1}{6}[a[bc]] + \frac{1}{6}[c[ba]]\,. \qquad (\text{А.7})$$

Преобразование Гильберта определяется

$$\varphi^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}P\int\frac{dt'}{t-t'}\varphi(\vec{x},t') =$$

$$= i\int d^3x'\,\Delta^{(1)}(x-x')\overleftrightarrow{\partial}'_4\varphi(x') = i\left(\varphi^{(-)}(x) - \varphi^{(+)}(x)\right) \qquad (\text{А.8})$$

$$\left(= -\int_{t'}^{t} d^4y\,\Delta^{(1)}(x-y)J(y)\right); \qquad \varphi^{(\mp)}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) \mp \frac{i}{2}\varphi^{(1)}(x),$$

то есть работает как оператор знака энергии. В частности,

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}P\int\frac{dt'}{t-t'}\Delta(\vec{x},t')\,. \qquad (\text{А.9})$$

Отметим перестановочные соотношения

$$[\hat\varphi(x),\hat\varphi(y)] = i\Delta(x-y)\,,\ [\hat\varphi^{(1)}(x),\hat\varphi(y)] = i\Delta^{(1)}(x-y)\,,\ [\hat\varphi^{(1)}(x),\hat\varphi^{(1)}(y)] = i\Delta(x-y)\,. \qquad (\text{А.10})$$

К формулам (Б.2) в работе /II/ для нормы N добавим выражения

$$N = \frac{i}{2}\int d^3x\,\varphi^{(1)}(x)\overleftrightarrow{\partial}_4\varphi(x) = \frac{1}{2}\int d^3x\,d^3x'\,\varphi(x)\overleftrightarrow{\partial}_4\Delta^{(1)}(x-x')\overleftrightarrow{\partial}'_4\varphi(x') = \frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\,J(x)\Delta^{(1)}(x-y)J(y). \qquad (\text{А.11})$$

Проиллюстрируем взаимосвязь различных определений для нормы (интенсивности) еще на простейшем примере монохроматических колебаний ($E = \omega I$ – энергия)

$$I = \frac{1}{2\omega}(\omega^2\varphi^2 + \dot\varphi^2) = \frac{\omega}{2}(\varphi^2 + \varphi^{(1)2}) = \frac{1}{2}\varphi^{(1)}\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\varphi = \varphi^{(+)}\overleftrightarrow{\partial}_4\varphi^{(-)} =$$

$$= \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(+)}\sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)} = |\psi|^2 = |\alpha|^2 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\left(\sqrt{\omega}\,\varphi(t)\right)^2, \qquad (\text{А.12})$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right), \quad \psi(t) = \alpha e^{-i\omega t} = \sqrt{2\omega}\,\varphi^{(-)}(t)\,.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Интересующие нас когерентные состояния в квантовой механике определяются следующим образом:

$$|xp\rangle = e^{i(p\hat{x} - x\hat{p})}|0\rangle = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha\hat{a}^+}|0\rangle\,. \qquad (\text{Б.I})$$

Из соотношений x)

$$\langle xp|\hat{a}^+ = \alpha^*\langle xp|\,, \qquad \langle xp|\hat{a} = \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle xp|\,,$$

$$\langle xp|\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2A}}\left(\frac{1}{2}\alpha + \alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle xp|\,, \quad \langle xp|\hat{p} = -i\sqrt{\frac{A}{2}}\left(\frac{1}{2}\alpha - \alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle xp| \qquad (\text{Б.2})$$

получаются соотношения

$$\langle xp|\hat{a}^+\hat{Q}|xp\rangle = \alpha^*\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,,$$

$$\langle xp|\hat{a}\hat{Q}|xp\rangle = \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = \Lambda^2\alpha\Lambda^{-2}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,,$$

$$\langle xp|\hat{Q}\hat{a}|xp\rangle = \alpha\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,,$$

$$\langle xp|\hat{Q}\hat{a}^+|xp\rangle = \left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = \Lambda^2\alpha^*\Lambda^{-2}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,, \qquad (\text{Б.3})$$

$$\langle xp|\hat{x}\hat{Q}|xp\rangle = \frac{1}{\sqrt{2A}}\left(\alpha + \alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = \left(x + \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \Lambda\left(x + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,,$$

$$\langle xp|\hat{Q}\hat{x}|xp\rangle = \frac{1}{\sqrt{2A}}\left(\alpha + \alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = \left(x + \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \Lambda\left(x - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,,$$

$$\langle xp|\hat{p}\hat{Q}|xp\rangle = -i\sqrt{\frac{A}{2}}\left(\alpha - \alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = \left(p + \frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \Lambda\left(p - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,,$$

$$\langle xp|\hat{Q}\hat{p}|xp\rangle = i\sqrt{\frac{A}{2}}\left(\alpha^* - \alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle = \left(p + \frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \Lambda\left(p + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle\,. \qquad (\text{Б.4})$$

Оператор Λ записывается в виде

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{4}\left(A\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p} + A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right) \qquad (\text{Б.5.а})$$

или для зависящих от времени величин – в виде

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{4}\frac{\delta}{\delta f(\tau)}\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau}}D^{(1)}(\tau,\tau')\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau'}}\frac{\delta}{\delta f(\tau')}\right) = \qquad (\tau,\tau' \text{ – любые})$$

$$= \exp\left(\frac{1}{4}D^{(1)}(\tau,\tau')\left(\frac{\partial}{\partial x(t')} + \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\tau}}\frac{\partial}{\partial\dot{x}(t')}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x(t')} + \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau'}}\frac{\partial}{\partial\dot{x}(t')}\right)\right) \quad (\tau = \tau' = t'), \qquad (\text{Б.5.б})$$

---

x) $\alpha = \sqrt{\frac{A}{2}}\,x + \frac{i}{\sqrt{2A}}\,p$, $\alpha^* = \sqrt{\frac{A}{2}}\,x - \frac{i}{\sqrt{2A}}\,p$, $\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2A}}\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{\frac{A}{2}}\frac{\partial}{\partial p}$, $\frac{\partial}{\partial\alpha^*} = \frac{1}{\sqrt{2A}}\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{\frac{A}{2}}\frac{\partial}{\partial p}$.

где для свободной нерелятивистской частицы

$$D^{(1)}(\tau,\tau') = A^{-1} + A\frac{(\tau-t')(\tau'-t')}{m^2} \qquad (Б.6)$$

(в ф-ле (В.I.а) в[9] должна стоять правая часть (Б.6), умноженная на m).

Эти формулы без труда переносятся на многомерный случай, когда имеется несколько координат $\hat{x}_\mu$ и сопряженных им импульсов $\hat{p}_\mu$:

$$[\hat{x}_\mu,\hat{x}_\nu]=0, \quad [\hat{x}_\mu,\hat{p}_\nu]=i\delta_{\mu\nu}, \quad [\hat{p}_\mu,\hat{p}_\nu]=0 \qquad (Б.7)$$

В этом случае $A=\|\alpha_{\mu\nu}\|$ – симметричная матрица, а I/A – матрица, обратная ей. Расстановка индексов (если это потребуется) очевидна. Чтобы избежать операции извлечения корня из матрицы, удобно ввести операторы "уничтожения" и "рождения" по-другому:

$$\hat{a}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_\mu + \alpha^{-1}_{\mu\nu}\hat{p}_\nu\right), \qquad \hat{a}^\dagger_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\hat{p}_\mu + \alpha_{\mu\nu}\hat{x}_\nu\right), \qquad (Б.8)$$

так, что они связаны не просто эрмитовским сопряжением, а операцией

$$\hat{a}^\dagger_\mu = \alpha_{\mu\nu}a^+_\nu, \qquad (Б.9)$$

где + обозначает обычное эрмитовское сопряжение (аналогично для a_μ и $a^\dagger_\mu$). Перестановочные соотношения для $\hat{a}_\mu$ и $\hat{a}^\dagger_\mu$ обычные

$$[\hat{a}_\mu,\hat{a}_\nu]=0, \quad [\hat{a}_\mu,\hat{a}^\dagger_\nu]=\delta_{\mu\nu}, \quad [a^\dagger_\mu,a^\dagger_\nu]=0. \qquad (Б.10)$$

Определим следующие четыре полные системы состояний:

I) $\hat{x}_\mu|x'\rangle = x'_\mu|x'\rangle$, $\qquad \langle x''|x'\rangle = \delta(x''-x')$, (Б.II)

2) $\hat{p}_\mu|p'\rangle = p'_\mu|p'\rangle$, $\qquad \langle p''|p'\rangle = \delta(p''-p')$. (Б.I2)

3) Когерентные состояния. Многомерные когерентные состояния, простые и обобщенные, рассматривались многими авторами. В работе[13] многомерные когерентные состояния были выведены как минимизирующие пакеты (причем особое внимание уделялось 4-мерному случаю: $\mu,\nu=1,2,3,4$; $x_4=it$). В качестве уравнения, определяющего когерентные состояния, было получено

$$[\hat{x}_\mu-x_\mu+ic_{\mu\nu}(\hat{p}_\nu-p_\nu)]|xpA\rangle=0. \qquad (Б.I3)$$

Такое когерентное состояние характеризуется средними

$$x_\mu=\langle xpA|\hat{x}_\mu|xpA\rangle, \qquad p_\mu=\langle xpA|\hat{p}_\mu|xpA\rangle \qquad (Б.I4)$$

и матрицами корреляций $A=\|\alpha_{\mu\nu}\|$ и $C=\|c_{\mu\nu}\|$ (обобщение дисперсии)

$$\alpha_{\mu\nu}=2\overline{\Delta p_\mu\Delta p_\nu} \equiv 2\langle xpA|(\hat{p}_\mu-p_\mu)(\hat{p}_\nu-p_\nu)|xpA\rangle, \quad (\Delta p_\mu\equiv\hat{p}_\mu-p_\mu), \qquad (Б.I5)$$
$$c_{\mu\nu}=2\overline{\Delta x_\mu\Delta x_\nu} \equiv 2\langle xpA|(\hat{x}_\mu-x_\mu)(\hat{x}_\nu-x_\nu)|xpA\rangle, \quad (\Delta x_\mu\equiv\hat{x}_\mu-p_\mu).$$

В то время как x_μ и p_μ суть совершенно произвольные и независимые переменные, матрицы корреляций удовлетворяют[13]

а) условию минимизации неопределенностей (обобщение одномерного соотношения $4\overline{(\Delta x)^2}\,\overline{(\Delta p)^2}=1$)

$$4\,\overline{\Delta x_\mu\Delta x_\nu}\,\overline{\Delta p_\nu\Delta p_\lambda}=\delta_{\mu\lambda}, \quad \text{т.е.} \quad C=A^{-1}; \qquad (Б.I6)$$

б) условиям, гарантирующим положительность квадратичных форм

$$\overline{\Delta x_\mu\Delta x_\nu}\,\eta_\mu\eta_\nu \quad \text{и} \quad \overline{\Delta p_\mu\Delta p_\nu}\,\xi_\mu\xi_\nu \qquad (Б.I7)$$

(что нетривиально для псевдоевклидова пространства, см.[13]).

Когерентные состояния (Б.I) в обсуждаемом случае подробнее запишутся в виде

$$|xpA\rangle = e^{i(p_\mu\hat{x}_\mu-x_\mu\hat{p}_\mu)}|00A\rangle=$$
$$=\exp\left(\tfrac{1}{2}(x_\mu+2i\overline{\Delta x_\mu\Delta x_\lambda}p_\lambda)(-i\hat{p}_\mu+2\overline{\Delta p_\mu\Delta p_\nu}\hat{x}_\nu)-\tfrac{1}{2}(-ip_\mu+2\overline{\Delta p_\mu\Delta p_\nu}x_\nu)(\hat{x}_\mu+2i\overline{\Delta x_\mu\Delta x_\lambda}\hat{p}_\lambda)\right)|00A\rangle=$$
$$=\exp\left(-\tfrac{1}{2}\overline{\Delta p_\mu\Delta p_\nu}x_\mu x_\nu-\tfrac{1}{2}\overline{\Delta x_\mu\Delta x_\nu}p_\mu p_\nu\right)\exp\left(\tfrac{1}{2}(x_\mu+2i\overline{\Delta x_\mu\Delta x_\nu}p_\nu)(-i\hat{p}_\mu+2\overline{\Delta p_\mu\Delta p_\nu}\hat{x}_\nu)\right)|00A\rangle=$$
$$=e^{a_\mu\hat{a}^\dagger_\mu-a^\dagger_\mu\hat{a}_\mu}|00A\rangle=e^{-\frac{1}{2}a^\dagger_\mu a_\mu}\,e^{a_\mu\hat{a}^\dagger_\mu}|00A\rangle. \qquad (Б.I8)$$

В x- и p-представлениях они принимают вид

$$\langle x'|xpA\rangle = N_1\,e^{-\overline{\Delta p_\mu\Delta p_\nu}(x'_\mu-x_\mu)(x'_\nu-x_\nu)+ip_\nu x'_\nu-\frac{i}{2}p_\nu x_\nu}, \qquad (Б.I9)$$

$$\langle p'|xpA\rangle = N_2\,e^{-\overline{\Delta x_\mu\Delta x_\nu}(p'_\mu-p_\mu)(p'_\nu-p_\nu)-ip'_\nu x_\nu+\frac{i}{2}p_\nu x_\nu}. \qquad (Б.20)$$

Эти состояния нормируемы на I (в отличие от состояний (Б.II)и(Б.I2))

$$\langle xpA|xpA\rangle=\int dx'\,\langle xpA|x'\rangle\langle x'|xpA\rangle=1 \qquad (Б.2I)$$

и удовлетворяют соотношению полноты (Б.29.г), которое легко проверить непосредственно, например для псевдоевклидова пространства ($N_1=\pi^{-1}(-\det A)^{\frac{1}{4}}$) в x-представлении

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\,d^4p\,\langle x''|xpA\rangle\langle xpA|x'\rangle=\langle x''|x'\rangle\equiv\delta^4(x''-x'). \qquad (Б.22)$$

Подчеркнем, что полную систему образуют когерентные состояния со всеми возможными x_μ и p_μ при той или иной фиксированной матрице корреляций A (что подразумевается, когда мы сокращенно пишем $|xp\rangle$ вместо $|xpA\rangle$).

4) n-квантовые (фоковские) состояния – собственные функции оператора "числа квантов"

$$\hat{n} = \overline{\Delta x_\mu \Delta x_\nu}\,\hat{p}_\mu \hat{p}_\nu + \overline{\Delta p_\mu \Delta p_\nu}\,\hat{x}_\mu \hat{x}_\nu - 2 = \hat{a}^\dagger_\mu \hat{a}_\mu . \tag{Б.23}$$

Наименьшее из них совпадает с $|00A\rangle$. Остальные суть[x)]

$$|\mu_1 \cdots \mu_n A\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mu_1} \cdots \hat{a}^\dagger_{\mu_n} |00A\rangle . \tag{Б.24}$$

(Эти состояния не нормированные. Нормированными были бы, например

$$|jk\ell m A\rangle = \sqrt{\frac{j!\,k!\,\ell!\,m!}{(j+k+\ell+m)!}}\,(\hat{a}^\dagger_1)^j (\hat{a}^\dagger_2)^k (\hat{a}^\dagger_3)^\ell (\hat{a}^\dagger_4)^m |00A\rangle , \tag{Б.25}$$

но с точки зрения ковариантности первые удобнее). Состояния (Б.24) в x- и p-представлениях имеют вид

$$\langle x'|\mu_1 \cdots \mu_n A\rangle = \left(-\frac{\partial}{\partial x'_{\mu_1}} + 2\overline{\Delta p_{\mu_1} \Delta p_{\lambda_1}}\, x'_{\lambda_1}\right) \cdots \left(-\frac{\partial}{\partial x'_{\mu_n}} + 2\overline{\Delta p_{\mu_n} \Delta p_{\lambda_n}}\, x'_{\lambda_n}\right) \langle x'|00A\rangle , \tag{Б.26}$$

$$\langle p'|\mu_1 \cdots \mu_n A\rangle = \left(-i p'_{\mu_1} + 2\overline{\Delta p_{\mu_1} \Delta p_{\lambda_1}}\, i\frac{\partial}{\partial p'_{\lambda_1}}\right) \cdots \left(-i p'_{\mu_n} + 2\overline{\Delta p_{\mu_n} \Delta p_{\lambda_n}}\, i\frac{\partial}{\partial p'_{\lambda_n}}\right) \langle p'|00A\rangle . \tag{Б.27}$$

К функциям преобразования (Б.I9), (Б.20), (Б.26) и (Б.27) добавим еще

$$\langle \mu_1 \cdots \mu_n A | x p A\rangle = e^{-a^\dagger_\mu a_\mu}\, a_{\mu_1} \cdots a_{\mu_n} , \tag{Б.28}$$

которую легко получить с помощью формулы (Б.I8).

Отметим, что одно и то же состояние $|00A\rangle$ ("вакуум") дополняется до двух разных полных систем 3) и 4).

Наконец, в терминах этих четырех полных систем состояний запишем соотношение полноты

$$1 = \int d^4x'\, |x'\rangle\langle x'| = \tag{Б.29.а}$$

$$= \int d^4p'\, |p'\rangle\langle p'| = \tag{Б.29.б}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, a^\dagger_{\mu_1} \cdots a^\dagger_{\mu_n} |00A\rangle\langle 00A| a_{\mu_1} \cdots a_{\mu_n} = \tag{Б.29.в}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x\, d^4p\, |x p A\rangle\langle x p A| . \tag{Б.29.г}$$

До сих пор мы не касались динамики, и операторы и их представители выше относились к какому-то одному моменту времени или значению параметра типа собственного времени s (например, к начальному s'). Теперь запишем соотношения для зависящих от времени операторов в свободном случае, т.е. для операторов в картине взаимодействия ($\hat{\mathcal{L}}(s) = \frac{m}{2}\dot{\hat{x}}_\mu(s)\dot{\hat{x}}_\mu(s)$, $\hat{p}_\mu = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_\mu} = m\dot{\hat{x}}_\mu$, $\hat{\mathcal{H}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\hat{x}}_\mu}\dot{\hat{x}}_\mu - \hat{\mathcal{L}} = \frac{\hat{p}_\mu^2}{2m}$):

$$\hat{x}_\mu(s) = \hat{x}_\mu(s') + \frac{\hat{p}_\mu}{m}(s-s') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{i}{m}(s-s')a_{\mu\nu}\right)\hat{a}_\nu + \left(c_{\mu\nu} + \frac{i}{m}(s-s')\delta_{\mu\nu}\right)\hat{a}^\dagger_\nu\right] , \tag{Б.30}$$

$$\hat{x}^{(-)}_\mu(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{i}{m}(s-s')a_{\mu\nu}\right)\hat{a}_\nu , \quad \hat{x}^{(+)}_\mu(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{\mu\nu} + \frac{i}{m}(s-s')\delta_{\mu\nu}\right)\hat{a}^\dagger_\nu , \tag{Б.3I}$$

$$\left[\hat{x}^{(\mp)}_\mu(s_1), \hat{x}^{(\pm)}_\nu(s_2)\right] = i D^{(\mp)}_{\mu\nu}(s_1, s_2) , \tag{Б.32}$$

$$\left[\hat{x}_\mu(s_1), \hat{x}_\nu(s_2)\right] = i D_{\mu\nu}(s_1 - s_2) , \tag{Б.33}$$

$$D^{(\mp)}_{\mu\nu}(s_1, s_2) = -\frac{s_1 - s_2}{2m}\delta_{\mu\nu} \mp \frac{i}{2}\left(c_{\mu\nu} + \frac{(s_1 - s')(s_2 - s')}{m^2}a_{\mu\nu}\right) , \tag{Б.34}$$

$$D_{\mu\nu}(s_1 - s_2) = D^{(-)}_{\mu\nu}(s_1, s_2) + D^{(+)}_{\mu\nu}(s_1, s_2) = -\frac{s_1 - s_2}{m}\delta_{\mu\nu} , \tag{Б.35}$$

$$D^{(1)}_{\mu\nu}(s_1, s_2) = i\left(D^{(-)}_{\mu\nu}(s_1, s_2) - D^{(+)}_{\mu\nu}(s_1, s_2)\right) = c_{\mu\nu} + \frac{(s_1 - s')(s_2 - s')}{m^2}a_{\mu\nu} , \tag{Б.36}$$

$$\langle xp|\hat{x}^{(+)}_\mu(s) = x^{(+)}_\mu(s)\langle xp| , \tag{Б.37}$$

$$\begin{aligned}
\langle xp|\hat{x}^{(-)}_\mu(s) &= \left(\frac{1}{2}x^{(-)}_\mu(s) + i D^{(-)}_{\mu\nu}(s, s')\frac{\partial}{\partial x^{(+)}_\nu(s')}\right)\langle xp| = \\
&= \left(\frac{1}{2}x^{(-)}_\mu(s) + D^{(-)}_{\mu\nu}(s, s')\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu(s')} + m\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s'}\frac{\partial}{\partial p_\nu(s')}\right)\right)\langle xp| = \\
&= \left(i\frac{\delta}{\delta f_\mu(s)} + \frac{i}{2}\int d\tau\, D^{(1)}_{\mu\nu}(s, \tau) f_\nu(\tau)\right)\langle xp| = \\
&= \left(i\frac{\delta}{\delta f_\mu(s)} + \frac{1}{2}x^{(-)}_\mu(s) - \frac{1}{2}x^{(+)}_\mu(s)\right)\langle xp| = \\
&= \left(\frac{1}{2}x^{(-)}_\mu(s) + i D^{(-)}_{\mu\nu}(s, \tau)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \tau}\frac{\delta}{\delta f_\nu(\tau)}\right)\langle xp| ,
\end{aligned} \tag{Б.38}$$

$$\begin{aligned}
\langle xp|\hat{x}_\mu(s) &= \left(x^{(+)}_\mu(s) + \frac{1}{2}x^{(-)}_\mu(s) + i D^{(-)}_{\mu\nu}(s, \tau)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \tau}\frac{\delta}{\delta f_\nu(\tau)}\right)\langle xp| = \\
&= \left(x^{(+)}_\mu(s) + \dots\right)\langle xp| ,
\end{aligned} \tag{Б.39}$$

куда вместо троеточия можно подставить любое выражение, стоящее перед $\langle xp|$ в (Б.38). Функция $f_\nu(\tau)$ вводится согласно

$$m^{-1}x_\mu(s) = D_{\mu\nu}(s - s')\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial s'}x_\nu(s') = -\int_{t'}^{t} du\, D_{\mu\nu}(s - u) f_\nu(u) . \tag{Б.40}$$

---

x) Состояния I)–4) – собственные функции соответственно полных наборов коммутирующих операторов $\hat{x}_\mu$, $\hat{p}_\mu$, $\hat{a}_\mu$ и $\hat{a}^\dagger_1\hat{a}_1, \dots \hat{a}^\dagger_4\hat{a}_4$.

Далее

$$\langle xp|\hat{x}^{(+)}_\mu(s)\hat{Q}|xp\rangle = x^{(+)}_\mu(s)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle \quad ,$$

$$\langle xp|\hat{x}^{(-)}_\mu(s)\hat{Q}|xp\rangle = \left(x^{(-)}_\mu(s) + iD^{(-)}_{\mu\nu}(s,\tau)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau}}\frac{\delta}{\delta f_\nu(\tau)}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \Lambda^2 x^{(-)}_\mu(s)\Lambda^{-2}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle \quad ,$$

$$\langle xp|\hat{Q}\,\hat{x}^{(-)}_\mu(s)|xp\rangle = x^{(-)}_\mu(s)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle \quad ,$$

$$\langle xp|\hat{Q}\,\hat{x}^{(+)}_\mu(s)|xp\rangle = \left(x^{(+)}_\mu(s) - iD^{(+)}_{\mu\nu}(s,\tau)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau}}\frac{\delta}{\delta f_\nu(\tau)}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \Lambda^2 x^{(+)}_\mu(s)\Lambda^{-2}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle \quad , \qquad (Б.4I)$$

$$\left.\begin{matrix}\langle xp|\hat{x}_\mu(s)\hat{Q}|xp\rangle \\ \langle xp|\hat{Q}\,\hat{x}_\mu(s)|xp\rangle\end{matrix}\right\} = \left(x_\mu(s) \pm iD^{(\mp)}_{\mu\nu}(s,s')\frac{\partial}{\partial x^{(+)}_\nu(s')}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \left(x_\mu(s) + D^{(\mp)}_{\mu\nu}(s,s')\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu(s')} + m\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial s'}}\frac{\partial}{\partial p_\nu(s')}\right)\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \left(x_\mu(s) \pm iD^{(\mp)}_{\mu\nu}(s,\tau)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\tau}}\frac{\delta}{\delta f_\nu(\tau)}\right)\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle =$$

$$= \Lambda\left(x_\mu(s) \pm \frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta f_\mu(s)}\right)\Lambda^{-1}\langle xp|\hat{Q}|xp\rangle \quad . \qquad (Б.42)$$

Другие правила: обращение с функциями от операторов $\hat{x}_\mu(s)$, конструкция представителей для S -матрицы, гайзенберговских операторов поля и уравнений движения для них, запись различных других операторов - те же, что и в п. 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В /9/, кроме исправлений, отмеченных выше, на стр. I4 и 28 , нужно сделать следующие переобозначения и поправки:

ф-ла (3.а) $\sum\int \quad \longrightarrow \quad \sum\frac{1}{n!}\int$,

ф-ла (4) исключить $\frac{1}{n!}$,

ф-ла (5) $\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{n!}\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\}$,

ф-ла (I9.а) $\{\hat{A}_{\mu_1}(x_1)\ldots \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{n!\,(2m)!}\{\hat{A}_{\mu_1}(x_1)\ldots$,

ф-ла (20.а) $\{\hat{A}_{\mu_1}(x_1)\ldots \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{n!\,(2m+1)!}\{\hat{A}_{\mu_1}(x_1)\ldots$,

ф-ла (38) $x(t) \quad \longrightarrow \quad \hat{x}(t)$,

ф-ла (40.а) $\sum\int \quad \longrightarrow \quad \sum\frac{1}{n!}\int$,

ф-ла (50) $D^{(1)}(\tau-\tau') \quad \longrightarrow \quad D^{(1)}(\tau,\tau')$,

стр. 27 $t'=const,\ t''=const \longrightarrow t=t'\ ,\ t=t''$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Я.Перина. Когерентность света, М., Мир, 1974.

2. М.Лэкс. Флуктуации и когерентные явления, М., Мир, 1974.

3. Ф.Арекки, М.Скалли, Г.Хакен, В.Вайдлих. Квантовые флуктуации излучения лазера, М., Мир, 1974.

4. V.V.Dodonov, I.A.Malkin, V.I.Man'ko. Препринт ФИАН № I06, Москва, 1974.

5. А.М.Переломов. Препринт ИТЭФ № 46, Москва, 1974.

6. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ Р2-7896, Дубна, 1974.

7. I.Bialynicki-Birula. Ann.Phys.(New York) 67, 252, 1971.

8. П.А.М.Дирак. Принципы квантовой механики, М., ГИФМЛ, 1960.

9. I.V.Polubarinov. Communication of JINR E2-8506, Dubna, 1974.

I0. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1973.

II. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ Р2-8362, Дубна, 1974.

I2. **K.Schwarzschild. Göttinger Nachrichten 128, 132, 1903;**
H.Tetrode. Zeits.f.Physik 10, 317, 1922 ;
J.Frenkel. Zeits.f. Physik 32, 518, 1925;
A.D.Fokker. Zeits.f.Physik 58, 386, 1929; Physica 9, 33, 1929; 12, 145, 1932 ;
P.A.M.Dirac. Proc.Roy.Soc. (London) A167, 148, 1938;
J.A.Wheeler, R.P.Feynman. Rev.Mod.Phys. 17, 157, 1945; 21, 425, 1949;
P.C.W.Davies. Proc.Camb.Phil.Soc. 68, 751, 1970.

I3. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ Р-269I, Дубна, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
II мая 1975 года.