

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Г-585

30/11-75

P2 - 8812

В.Ш.Гогохия, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов

2301/2-75

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО
КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

1975

P2 - 8812

В.Ш.Гогохия,¹ Д.П.Мавло,² А.Т.Филиппов

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО
КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Направлено в ТМФ

¹ Математический институт АН ГССР

² Киевский государственный университет

В в е д е н и е

В работе [1] был подробно разработан предложенный ранее [2] общий метод исследования квазипотенциальных уравнений Логанова-Тавхелидзе [3], заключающийся в редукции соответствующих интегральных уравнений к дифференциальным краевым задачам в импульсном представлении. Этот метод имеет ряд преимуществ перед методами, основанными на решении интегральных уравнений в импульсном пространстве или интегро-дифференциальных уравнений в координатном представлении. Для дифференциальных краевых задач разработаны мощные аналитические, асимптотические и численные методы, позволяющие изучать поведение решений вблизи особых точек и их зависимость от параметров, что весьма важно для физических приложений [4]. В частности, в данной работе формулируется и применяется к решению конкретной краевой задачи еще один асимптотический метод, так называемый метод эталонного уравнения (МЭУ) [5]. Формулировка квазипотенциального уравнения в дифференциальной форме является также более общей, чем обычная, так как она позволяет корректно поставить задачу о рассеянии и о связанных состояниях в случае ряда сингулярных квазипотенциалов, когда соответствующее интегральное уравнение не имеет решений (см. [1], [2] и [6]).

Различные задачи об описании связанных состояний на языке квазипотенциальных уравнений изучались ранее в ряде работ. Вычисление тонкой и сверхтонкой структур водородоподобных атомов по теории возмущений было выполнено в [7], где также был подробно разработан общий квазипотенциальный подход к задаче о связанных состояниях. В работах [8] для нахождения энергетиче-

ского спектра связанных состояний двух заряженных скалярных частиц использовалось упрощенное квазипотенциальное уравнение, сводящееся к дифференциальному уравнению в координатном пространстве. Кулоновская задача на связанные состояния рассматривалась в статье [9] на основе полной релятивизации квазипотенциального уравнения.

Данная работа посвящена изучению квазипотенциальной задачи о связанных состояниях двух скалярных частиц одинаковой массы в случае квазипотенциала $V(\tau) = -g\tau^{-1}$, который в нерелятивистском пределе $m \rightarrow \infty$ соответствует потенциалу $V(\tau) = -\frac{g}{m}\tau^{-2}$. В § 1 получено дифференциальное квазипотенциальное уравнение второго порядка в импульсном представлении и выведены граничные условия в нуле и на бесконечности. В § 2 задача вычисления энергетического спектра решена в нерелятивистском пределе. В § 3 сформулирован метод эталонного уравнения (МЭУ), который далее в § 4 применяется к вычислению релятивистского спектрального условия.

§ 1. Квазипотенциальная дифференциальная задача в импульсном представлении

Квазипотенциальное уравнение для полной амплитуды рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы m имеет вид

$$(1.1) \quad T(\bar{p}, \bar{p}') = V[(\bar{p} - \bar{p}')^2] + \int \frac{d^3q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \frac{V[(\bar{p} - \bar{q})^2] T(\bar{q}, \bar{p}')}{(K^2 - q^2)},$$

$$(1.2) \quad V[(\bar{p} - \bar{p}')^2] = \int \frac{d^3\tau}{(2\pi)^3} \frac{V(\tau)}{\tau} e^{-i(\bar{p} - \bar{p}')\tau}$$

Здесь \bar{p}, \bar{p}' - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс, энергетическая поверхность определяется условием $p^2 = p'^2 = K^2$, а энергия в системе центра масс равна $W = 2\sqrt{K^2 + m^2}$. Разлагая амплитуду и квазипотенциал $V[(\bar{p} - \bar{p}')^2]$ по парциальным волнам

$$T(\bar{p}, \bar{p}') = \frac{1}{4\pi pp'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_{\ell}(p, p') P_{\ell}(\hat{p}\hat{p}'),$$

$$V[(\bar{p} - \bar{p}')^2] = \frac{1}{4\pi pp'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) V_{\ell}(p, p') P_{\ell}(\hat{p}\hat{p}')$$

(где $\hat{p} \equiv \bar{p}/|\bar{p}|$), получим для парциальных амплитуд следующее уравнение:

$$(1.3) \quad f_{\ell}(p, p') = V_{\ell}(p, p') + \int_0^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{q^2 + m^2}} \frac{V_{\ell}(p, q) f_{\ell}(q, p')}{K^2 - q^2},$$

где

$$(1.4) \quad V_{\ell}(p, p') = \sqrt{pp'} \int_0^{\infty} d\tau V(\tau) J_{\ell+\frac{1}{2}}(p\tau) J_{\ell+\frac{1}{2}}(p'\tau).$$

Воспользовавшись формулой ($n > 0, \text{Re} \ell > n - \frac{3}{2}$)

$$\sqrt{pp'} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-2n+1} J_{\ell+\frac{1}{2}}(p\tau) J_{\ell+\frac{1}{2}}(p'\tau) = \frac{\Gamma(\ell + \frac{3}{2} - n)}{2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma(\ell + \frac{3}{2})}$$

$$\left\{ \theta(p-p') \frac{p'^{\ell+1}}{p^{\ell+2-2n}} \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2} - n, -n+1; \ell + \frac{3}{2}; \frac{p'^2}{p^2}\right) + \theta(p'-p) \frac{p^{\ell+1}}{p'^{\ell+2-2n}} \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2} - n, -n+1; \ell + \frac{3}{2}; \frac{p^2}{p'^2}\right) \right\},$$

нетрудно показать, что уравнение (1.3) в случае $V(\tau) = -g\tau^{-1}$ сводится к дифференциальному уравнению второго порядка. Действительно, для этого потенциала выражение (1.4) для $V_e(p, p')$ можно представить в виде

$$(1.5) \quad V_e(p, p') = -\frac{g}{2\ell+1} \left\{ \theta(p-p') \frac{p'^{\ell+1}}{p^\ell} + \theta(p'-p) \frac{p^{\ell+1}}{p'^\ell} \right\},$$

$$\operatorname{Re} \ell > -\frac{1}{2}.$$

Дифференцируя интегральное уравнение (1.3) с ядром (1.5) и подставляя решения дифференциального уравнения в интегральное, нетрудно проверить, что уравнение (1.3) эквивалентно следующей краевой задаче:

$$(1.6) \quad \frac{d^2 f_e(p, p')}{dp^2} - \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{p^2} + \frac{g}{\sqrt{p^2+m^2}(k^2-p^2)} \right\} f_e(p, p') = g\delta(p-p'),$$

$$(1.7) \quad p^{\ell+1} \frac{df_e(p, p')}{dp} - (\ell+1)p^\ell f_e(p, p') \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0,$$

$$p^{-\ell} \frac{df_e(p, p')}{dp} + \ell p^{-(\ell+1)} f_e(p, p') \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

Задача о связанных состояниях ($k^2 = -\alpha^2 < 0$), как известно, сводится к решению однородного интегрального уравнения (1.3) отбрасыванием члена $V_e(p, p')$ и заменой $f_e(p, p')$ на волновую функцию $f_e(p)$. Так как граничные условия (1.7) при этом не изменяются, то для нахождения связанных состояний достаточно решить дифференциальное уравнение

$$(1.8) \quad \frac{d^2 f_e(p)}{dp^2} - \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{p^2} - \frac{g}{\sqrt{p^2+m^2}(p^2+\alpha^2)} \right\} f_e(p) = 0$$

с граничными условиями (1.7). Перепишем уравнение (1.8) и граничные условия (1.7) в безразмерных переменных $x = pm^{-1}$, $f_e(p) = f_e(x)$ и с безразмерными параметрами $\lambda^2 = gm^{-1}$, $E = \alpha m^{-1}$.

$$(1.9) \quad \frac{d^2 f_e(x)}{dx^2} - \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - \frac{\lambda^2}{(x^2+1)^{1/2}(x^2+E^2)} \right\} f_e(x) = 0,$$

$$x^{\ell+1} \frac{df_e(x)}{dx} - (\ell+1)x^\ell f_e(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

$$(1.10) \quad x^{-\ell} \frac{df_e(x)}{dx} + \ell x^{-(\ell+1)} f_e(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

В дальнейшем изложении задача (1.9)-(1.10) на собственные значения подробно изучается для S -волны, но используемые нами методы пригодны и для исследования высших парциальных волн, что, однако, требует отдельного рассмотрения.

В заключение напомним, что уравнение (1.8) в нерелятивистском пределе $m \rightarrow \infty$ сводится к уравнению для шредингеровской волновой функции в импульсном пространстве с потенциалом $V(\tau) = -\frac{g}{m} \tau^{-2}$ (см. [10]).

§ 2. Дискретный спектр квазипотенциальной краевой задачи в нерелятивистском пределе

Для того чтобы найти энергетический спектр в нерелятивистском приближении $E^2 \ll 1$, разобьем область изменения переменной x на два интервала $[0, 1]$ и $[1, \infty)$, в которых найдем приближенные решения задачи (1.9)-(1.10), а затем воспользуемся стандартным приемом сшивания этих решений.

На интервале $[0, 1]$ пренебрежем в "потенциале" корнем $(x^2+1)^{1/2}$, т.е.

$$\Psi(x) \equiv \frac{\lambda^2}{(x^2+1)^{1/2}(x^2+E^2)} \Rightarrow \Psi_<(x) = \frac{\lambda^2}{x^2+E^2}.$$

Тогда уравнение (I.9) с первым из граничных условий (I.10) сводится к следующей краевой задаче:

$$(2.1) \quad \frac{d^2 f_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{x^2+E^2} f_0(x) = 0, \\ x \frac{df_0(x)}{dx} - f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Решение задачи (2.1) можно выразить через гипергеометрическую функцию

$$(2.2) \quad f_0(x) = \text{const} \left(\frac{x^2}{E^2} \right)^{1/2} F(a, b; c; -\frac{x^2}{E^2})$$

с параметрами $a = \frac{1}{4} + \frac{i\nu}{4}$, $b = a^* = \frac{1}{4} - \frac{i\nu}{4}$, $c = \frac{3}{2}$, $\nu = 2\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}$. Это выражение пригодно при $x^2/E^2 < 1$. В окрестности точки сшивания $x=1$ аргумент гипергеометрической функции становится большим ($E^{-2} \gg 1$), и поэтому необходимо воспользоваться известным аналитическим продолжением гипергеометрической функции [II]. Нетрудно убедиться, что аналитически продолженное решение (2.2) в область $x^2/E^2 > 1$ имеет вид

$$(2.3) \quad f_0(x) = \text{const} \left\{ \left(\frac{x^2}{E^2} \right)^{a^*} B_1 F(a, -a^*; 1 + \frac{i\nu}{2}; -\frac{E^2}{x^2}) + \left(\frac{x^2}{E^2} \right)^a B_2 F(a^*, -a; 1 - \frac{i\nu}{2}; -\frac{E^2}{x^2}) \right\},$$

$$\text{где } B_1 = B_2^* = B = \frac{\Gamma(-\frac{i\nu}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{4} - \frac{i\nu}{4}) \Gamma(\frac{5}{4} - \frac{i\nu}{4})}.$$

Логарифмическая производная решения (2.3) с точностью до членов $\sim E^2 \ll 1$ в точке $x=1$ имеет вид

$$(2.4) \quad \frac{d}{dx} \ln f_0(x) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}} \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}} (\ln E - K) + \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$\text{где } K = \Psi(1) - \frac{1}{2} \Psi(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} \Psi(\frac{5}{4}).$$

На интервале $[1, \infty)$ пренебрежем в "потенциале" квадратом энергии E^2 и заменим $(x^2+1)^{1/2}$ на x , т.е.

$$\Psi(x) \equiv \frac{\lambda^2}{(x^2+1)^{1/2}(x^2+E^2)} \Rightarrow \Psi_>(x) = \frac{\lambda^2}{x^3}.$$

При этом уравнение (I.9) со вторым из граничных условий (I.10) сводится к следующей краевой задаче:

$$(2.5) \quad \frac{d^2 f_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{x^3} f_0(x) = 0, \\ \frac{df_0(x)}{dx} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Решение задачи (2.5) выражается через цилиндрическую функцию

$$(2.6) \quad f_0(x) = \text{const} x^{1/2} J_1 \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{x}} \right).$$

Логарифмическая производная решения (2.6) имеет вид

$$(2.7) \quad \frac{d}{dx} \ln f_0(x) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} - \lambda \frac{J_1'(2\lambda)}{J_1(2\lambda)}.$$

Прежде чем приравнять логарифмические производные, необходимо сделать несколько замечаний по поводу используемого нами при-

ближения для "потенциала" $\Psi(x)$. В точке $x=1$, где ошибка максимальна, приближенный "потенциал" $\Psi_<(x)$, как и $\Psi_>(x)$, заметно отличается от точного $\Psi(x)$. При этом, однако, наше приближение для $\Psi(x)$ сохраняет характер особых точек уравнения ($x=0, x=\infty$). Особенно важно, что при малых x мы сохранили точное выражение для потенциала ($\sim(x^2+E^2)^{-1}$). Именно это и определяет качественный характер поведения собственных значений энергий E при $E \rightarrow 0$. Поправки к полученному нами решению можно учесть по теории возмущений. Нетрудно проверить, что их учет качественно не изменяет основные результаты, полученные в нашем приближении. Заметим также, что в точке $x=1$ разность значений приближенных "потенциалов" $\Psi_>(1)$ и $\Psi_<(1)$ стремится к нулю как $\sim E^2$, т.е. приближенный "потенциал" почти непрерывен.

Приравнивая теперь логарифмические производные (2.4) и (2.7), получим при $E^2 \ll 1$:

$$(2.8) \quad \lambda \frac{J_1'(2\lambda)}{J_1(2\lambda)} = -\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}} \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}} (\ln E - K) + \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Решая это уравнение относительно E , находим

$$(2.9) \quad E_n = E_0 \exp \left\{ -\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} \right\}, \quad n > n_0(\lambda),$$

$$E_0 = \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} \frac{J_1'(2\lambda)}{J_1(2\lambda)} \right] + K \right\}.$$

При $\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}} \ll 1$ энергетический спектр имеет вид

$$(2.10) \quad E_n = \exp \left\{ -\frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} + K \right\},$$

где, как и в (2.4),

$$K = \Psi(1) - \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{5}{4}\right).$$

Формулы (2.9) и (2.10) определяют неаналитическую зависимость уравнений энергий от константы связи λ , так как в пределе $\lambda^2 \rightarrow \frac{1}{4}$ происходит сгущение энергетических уровней, что имеет место также и в нерелятивистской теории в случае потенциала $V(r) = -g'r^{-2}$ [12]. Напомним, однако, что в нерелятивистской теории этот потенциал сингулярен в начале координат, и поэтому значения E_n зависят от произвольного вещественного параметра [12]. В нашем же случае уравнение (1.8), которое послужило исходным пунктом исследования, в нерелятивистском пределе $m \rightarrow \infty$ также соответствует уравнению для шредингеровской "волновой функции" в импульсном пространстве в случае $V(r) = -\frac{g}{m} r^{-2}$, однако в отличие от последнего в нашем решении (формулы (2.9) и (2.10)) отсутствует проблема "падения на центр", что является следствием последовательного релятивистского рассмотрения в рамках квазипотенциального подхода.

Дискретные уровни энергии (массы связанных состояний) определяются соотношением $W_n = 2m\sqrt{1 - E_n^2}$, где $0 \leq E_n \leq 1$. Приближения, использованные выше, справедливы для слабо связанных состояний $E_n^2 \ll 1$, т.е. либо при больших n , либо при малых $\lambda^2 - 1/4$. Сравнение и обсуждение формул (2.9) и (2.10) с релятивистским спектральным условием, пригодным при $0 \leq E_n \leq 1$, проводится в конце § 4.

В следующем пункте в целях замкнутости и полноты изложения сформулирован метод эталонного уравнения (МЭУ), который далее применяется для вывода релятивистского выражения для энергии связанных состояний.

§ 3. Метод эталонного уравнения

Основная идея метода эталонного уравнения весьма проста: приблизительно одинаковые дифференциальные уравнения имеют приблизительно одинаковые решения [13]. Рассмотрим кратко одну из возможных реализаций этой идеи, следуя работе [14]. Пусть нам необходимо решить уравнение

$$(3.1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma(x) u(x) = 0.$$

Уравнение

$$(3.2) \quad \frac{d^2 v}{d\sigma^2} + \Gamma(\sigma) v(\sigma) = 0$$

назовем эталонным по отношению к уравнению (3.1), если 1) решения $v(\sigma)$ известны аналитически (т.е. выражаются через специальные функции) или численно, 2) $\Gamma(\sigma)$ зависит от σ приблизительно так же, как $\gamma(x)$ зависит от x . Наша задача - выразить решения уравнения (3.1) через известные функции $v(\sigma)$.

Будем искать решение в виде

$$(3.3) \quad u(x) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2} v(\sigma).$$

Подставляя (3.3) в (3.1) и используя (3.2), получаем следующее уравнение для функции $v(\sigma)$:

$$(3.4) \quad \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 \Gamma(\sigma) = \gamma(x) + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2}.$$

Это точное основное уравнение МЭУ. На первый взгляд уравнение (3.4) гораздо сложнее исходного линейного уравнения (3.1). Однако во многих случаях, представляющих значительный интерес для приложений, второй член в правой части (3.4) можно рассмат-

ривать как малую поправку, и на этой основе удается построить приближенный метод решения уравнения (3.4) [14]. Зная такое приближенное выражение для $\sigma(x)$, можно выразить решение исходного уравнения (3.1) через известные функции $v[\sigma(x)]$. Заметим, что поправочный член можно выразить через так называемую производную Шварца [15]:

$$(3.5) \quad \int \Gamma(\sigma, x) = -\frac{1}{2} \langle \sigma; x \rangle \equiv -\frac{1}{2} \left[\frac{\sigma'''}{\sigma'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma'} \right)^2 \right].$$

Такая запись обычно более удобна для оценок поправочного члена и построения итерационной схемы решения уравнения (3.4) [16].

Если поведение $\Gamma(\sigma)$ достаточно мало отличается от поведения $\gamma(x)$, то $\sigma'(x)$ - медленно меняющаяся функция и поправочным членом в первом приближении можно пренебречь ($|\sigma''/\sigma'| \ll 1, |\sigma'''/\sigma'| \ll 1$). Тогда уравнение (3.4) можно заменить приближенным уравнением

$$(3.6) \quad \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 \Gamma(\sigma) \approx \gamma(x),$$

откуда следует

$$(3.7) \quad \int_{\sigma_0}^{\sigma} \Gamma(\tau)^{1/2} d\tau \approx \int_{x_0}^x \gamma(t)^{1/2} dt.$$

Здесь σ_0 и x_0 - "эквивалентные точки" функций $\Gamma(\sigma)$ и $\gamma(x)$, например, точки, где обе эти функции имеют сингулярность или равны нулю. Таким образом, задаче определения $\sigma(x)$ сводится в первом приближении к квадратурам (3.7). Решая уравнение (3.7) относительно σ , получаем в первом приближении

$$\sigma = \sigma^{(1)}(x). \quad \text{Подставляя это решение в (3.5), получаем}$$

поправочный член в первом приближении $\Pi(\sigma^{(1)}, x)$. Для нахождения $\sigma(x)$ во втором приближении необходимо использовать уравнение (3.4):

$$(3.8) \quad \left(\frac{d\sigma^{(2)}}{dx}\right)^2 \Gamma(\sigma^{(2)}) \approx \gamma(x) + \Pi(\sigma^{(1)}, x),$$

которое сводится к квадратурам:

$$(3.9) \quad \int_{\sigma_0}^{\sigma^{(2)}} \Gamma(\tau)^{1/2} d\tau \approx \int_{x_0}^x [\gamma(t) + \Pi(\sigma^{(1)}, t)]^{1/2} dt.$$

Этот процесс нахождения последовательных приближений можно продолжить, используя рекуррентное соотношение

$$(3.10) \quad \int_{\sigma_0}^{\sigma^{(n+1)}} \Gamma(\tau)^{1/2} d\tau = \int_{x_0}^x [\gamma(t) + \Pi(\sigma^{(n)}, t)]^{1/2} dt.$$

Зная $\sigma(x)$, можно получить решение исходного уравнения (3.1) по формуле (3.3). В первом приближении это решение, очевидно, имеет вид

$$(3.11) \quad u(x) \approx \left[\frac{\Gamma(\sigma^{(1)}(x))}{\gamma(x)} \right]^{1/4} \mathcal{V}(\sigma^{(1)}(x)).$$

Таким образом, для успешной реализации МЭУ необходимо выбрать эталонное уравнение из следующих соображений: 1) функция $\Gamma(\sigma)$ должна быть такой, чтобы уравнение (3.2) имело решения в классе специальных функций; 2) функция $\Gamma(\sigma)$ должна быть близка по виду к функции $\gamma(x)$. В этом случае уравнение (3.4) допускает решение $\sigma(x)$, такое, что $\sigma'(x)$ - медленно меняющаяся функция, поэтому $\Pi[\sigma(x), x] \approx 0$ и им можно пренебречь в первом приближении.

При соблюдении этих условий можно добиться, чтобы $\sigma'(x)$ была везде конечной ($\sigma'(x) \neq 0, \infty$). Поэтому явление Стокса не возникает и нет никакой проблемы с формулами связи, возникающей в обычной ВКБ теории [17]. Стандартный ВКБ метод является частным случаем МЭУ, соответствующим простейшему выбору $\Gamma(\sigma) = \pm 1$, который отражает лишь знаковое поведение функции $\gamma(x)$.

Следует отметить, что во многих задачах уравнение (3.1) зависит от некоторого большого параметра λ^2 , т.е. основные уравнения имеют вид:

$$(3.12) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 \gamma(x) u(x) = 0,$$

$$(3.13) \quad \frac{d^2 \mathcal{V}}{d\sigma^2} + \lambda^2 \Gamma(\sigma) \mathcal{V}(\sigma) = 0.$$

Тогда уравнение (3.4) можно представить в виде:

$$(3.14) \quad \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 \Gamma(\sigma) = \gamma(x) + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2}.$$

Отсюда следует, что вне зависимости от того, насколько удачно подобрано эталонное уравнение, поправочный член будет тем меньше, чем больше λ^2 , и, таким образом, при достаточно больших λ^2 приближение (3.6) можно сделать сколь угодно точным. Это подтверждает хорошо известный факт: асимптотические методы (например, ВКБ) дают более точные результаты для больших значений λ^2 . Подчеркнем, однако, что МЭУ в принципе может давать достаточно точные результаты и для малых λ^2 , так как при удачном выборе эталонного уравнения можно добиться того, чтобы поправочный член $\Pi(x)$ был настолько мал, что $\lambda^{-2} \Pi(x) \approx 0$ даже при малых λ^2 .

§ 4. Применение метода эталонного уравнения к квазипотенциальной краевой задаче в импульсном представлении

Квазипотенциальную краевую задачу (I.9), (I.10) для S -волны ($\ell=0$) можно представить в форме

$$(4.1) \quad \frac{d^2 f_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{(x^2+1)^{1/2} (x^2+E^2)} f_0(x) = 0,$$

$$(4.2) \quad f_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x,$$

$$(4.3) \quad f_0(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \text{const.}$$

Основываясь на соображениях предыдущего раздела, выбираем эталонное уравнение в следующем виде:

$$(4.4) \quad \frac{d^2 \mathcal{U}(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{(\sigma+a)^3} \mathcal{U}(\sigma) = 0.$$

Константу a можно исключить тривиальной заменой переменной $\sigma \rightarrow \sigma - a$, т.е. a можно считать просто равной нулю. Из дальнейшего видно, что при этом автоматически выполняется условие $\mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \text{const} \neq 0$. В качестве эквивалентных точек естественно выбрать

$$(4.5) \quad \sigma_0 = x_0 = \infty.$$

Тогда уравнение первого приближения для $\mathcal{O}(x)$ принимает следующий вид:

$$(4.6) \quad \int_{\sigma}^{\infty} \sigma^{-3/2} d\sigma \approx \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{1/4} (t^2+E^2)^{1/2}}.$$

Отсюда получаем

$$(4.7) \quad \mathcal{O}(x) = 4 \Phi^{-2}(x, E),$$

где функция $\Phi(x, E)$ определяется следующим интегралом:

$$(4.8) \quad \Phi(x, E) = \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{1/4} (t^2+E^2)^{1/2}}.$$

Общее решение уравнения (4.4) имеет вид

$$(4.9) \quad \mathcal{U}(\sigma) = C_1 \sigma^{1/2} J_1\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\sigma}}\right) + C_2 \sigma^{1/2} N_1\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\sigma}}\right),$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, а $J_1(z)$ и $N_1(z)$ - функции Бесселя первого и второго рода. Нетрудно найти поведение $\mathcal{O}(x)$ при больших x :

$$(4.10) \quad \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x + \frac{(1+2E^2)}{10x} + O(x^{-3}).$$

Используя эту асимптотику, а также граничное условие (4.3), получаем, что $C_2 = 0$ и общее решение краевой задачи (4.1)-(4.3), полученное с помощью эталонного уравнения (4.4), имеет вид (см. (3.II)):

$$(4.11) \quad f_0(x) = C_1 [\mathcal{O}^3(x) \chi(x)]^{-1/4} \mathcal{O}^{1/2}(x) J_1\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\mathcal{O}(x)}}\right).$$

Сравним поведение этого решения в особых точках уравнения (4.1) с поведением точного решения. Легко видеть, что при $E \neq 0$ уравнение (4.1) имеет при $x \geq 0$ только одну особую точку $x = +\infty$, причем и точное и приближенное (4.11) решения ведут себя при $x \rightarrow \infty$ одинаково: $f_0(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \text{const} \neq 0$. При $E = 0$ возникает регулярная особая точка при $x \rightarrow 0$.

Нетрудно показать, что при $x \rightarrow 0$ точное решение уравнения (4.1) ведет себя как:

$$(4.12) \quad f_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} A \cos \left[\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}} \ln x + B \right],$$

где A, B - произвольные постоянные. С другой стороны, полагив в (4.8) $E=0$ и используя асимптотическое разложение для функции $J_1(z)$ при больших z , легко показать, что приближенное (4.11) решение имеет следующее поведение при

$$(4.13) \quad f_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} C \cos \left[\lambda \ln x - \frac{3}{4} \pi \right].$$

Таким образом, чтобы обеспечить правильное поведение приближенного решения (4.11) в особой точке $x=0$ при $E=0$, необходимо в (4.11) сделать замену

$$(4.14) \quad \lambda \rightarrow \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}.$$

Эта замена аналогична известной замене Крамерса [17]:

$\ell(\ell+1) \rightarrow (\ell + \frac{1}{2})^2$, которая делается при решении ВКБ методом радиального уравнения Шредингера, чтобы ВКБ решения имели правильное поведение в особой точке $r=0$ и правильную фазу при $r \rightarrow \infty$ [18]. Очевидно, что замена (4.14), которую мы далее будем называть аналогом замены Крамерса, существенна лишь при малых λ^2 ($E \rightarrow 0$) т.е. вне пределов формальной области применимости асимптотического по своей природе МЭУ.

Чтобы получить спектральное условие для краевой задачи (4.1)-(4.3), необходимо воспользоваться граничным условием в нуле (4.2). Для этого найдем поведение функции $\phi(x)$ при $x \rightarrow 0$. Из (4.8) нетрудно получить, что

$$(4.15) \quad \phi(x, E) = F(E) - \frac{x}{E} + \frac{(2+E^2)}{12E^3} x^3 + O(x^5),$$

где мы ввели обозначение

$$(4.16) \quad F(E) \equiv \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{1/4} (t^2+E^2)^{1/2}}.$$

Интеграл (4.16) можно выразить через гипергеометрическую функцию:

$$(4.17) \quad F(E) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 1-E^2\right),$$

где $B(x, y)$ - функция Эйлера.

Используя (4.11) и граничное условие (4.2), получаем с учетом (4.14) искомое спектральное условие:

$$(4.18) \quad J_1 \left[2 \left(\frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{\sigma(0)} \right)^{1/2} \right] = 0 \quad \text{или} \quad \sigma(0) = \frac{4(\lambda^2 - \frac{1}{4})}{\mathcal{E}_n^2},$$

где \mathcal{E}_n - нули функций Бесселя $J_1(z)$ и $\sigma(0) = 4F(E)$. Таким образом, дискретный спектр краевой задачи (4.1)-(4.3) определяется уравнением

$$(4.19) \quad \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{2 \mathcal{E}_n}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 1-E^2\right)},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Это спектральное условие очень удобно тем, что оно дает простую аналитическую зависимость дискретных значений константы связи $\lambda_n(E)$ во всей области изменения энергии $0 \leq E \leq 1$ и, следовательно, однозначно определяет обратную зависимость $E_n(\lambda)$, т.е. энергетические уровни рассматриваемой связанной системы $W_n(\lambda) = 2m\sqrt{1-E_n^2(\lambda)}$

во всей области изменения константы связи $\frac{1}{4} \leq \lambda^2 < \infty$.

Рассмотрим частные случаи релятивистского спектрального условия (4.19). При $E=1$ (ультрарелятивистский предел) имеем:

$$(4.20) \quad \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{2 \mathcal{X}_n}{B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})}.$$

При $E \rightarrow 0$ (нерелятивистский предел) гипергеометрический ряд (4.17) расходится, и поэтому необходимо воспользоваться следующей формулой аналитического продолжения [II]:

$$(4.21) \quad F(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n (\frac{1}{4})_n}{(n!)^2} [k_n - \ln E^2] E^{2n},$$

где $k_n = 2\psi(n+1) - \psi(n+\frac{1}{2}) - \psi(n+\frac{1}{4})$.

Оставляя лишь главный член разложения (4.18), получаем, что в нерелятивистском пределе $E \rightarrow 0$ собственные значения краевой задачи (4.1)-(4.3) ведут себя следующим образом:

$$(4.22) \quad E_n = \exp \left\{ -\frac{\mathcal{X}_n}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} + \frac{k_0}{2} \right\},$$

обнаруживая неаналитическую зависимость от λ^2 при $\lambda^2 \rightarrow \frac{1}{4}$. Как уже отмечалось, асимптотический по своей природе МЭУ обеспечивает хорошую точность при больших λ^2 независимо от величины E . Качественно правильное описание спектра при малых $\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}$ возможно лишь при удачном выборе эталонного уравнения. Поэтому представляет интерес сравнить МЭУ формулы для спектра (4.19), (4.22) с результатами, полученными сшиванием решений в § 3. Сам метод получения спектрального условия (3.9) ограничивает область его применимости малыми значениями E , т.е. при фиксированном не-

малом значении λ^2 величина n должна быть достаточно большой ($n \geq n_0(\lambda)$), а при уменьшении λ^2 величина $n_0(\lambda)$ уменьшается и возрастает точность приближения. Поэтому в некотором смысле результаты, полученные в § 3 сшиванием решений, являются дополнительными по отношению к спектральным результатам, полученным в настоящем параграфе асимптотическим методом эталонного уравнения. Используя асимптотическую формулу для корней функций Бесселя \mathcal{X}_n при больших n , получаем следующее выражение для МЭУ нерелятивистского спектра:

$$(4.23) \quad E_n = \exp \left\{ -\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} + K' \right\},$$

$$(4.24) \quad K' = \psi(1) - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{2}),$$

справедливое при больших n . Формуле (4.23) *a priori* нельзя доверять при малых $\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}$, так как это формально выходит за пределы применимости асимптотических методов. Соответствующий результат, полученный сшиванием решений, имеет вид (см. (3.10):

$$(4.25) \quad E_n = \exp \left\{ -\frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} + K \right\},$$

$$(4.26) \quad K = \psi(1) - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2}\psi(\frac{5}{4}).$$

Точность формулы (4.25) *a priori* тем выше, чем меньше $\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}$. Близость этих результатов (4.23)-(4.26) достаточно убедительно говорит в пользу МЭУ. Удивительным является тот факт, что МЭУ правильно предсказывает существенную особенность при $\lambda^2 = \frac{1}{4}$

и величины коэффициентов в (4.23). Общая картина дискретного спектра квазипотенциальной краевой задачи (4.1)-(4.3) приведена на рисунке.

Хорошую точность МЭУ спектральных результатов можно понять, если оценить величину поправочного члена $\Pi(x)$, что проще всего сделать на концах интервала изменения независимой переменной $x \in [0, \infty)$. Используя (3.5) и (4.8), нетрудно показать, что

$$(4.27) \quad \Pi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3(1+2E^2)}{10x^4} + O(x^{-6}),$$

$$(4.28) \quad \Pi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3 + (2+E^2)F^2(E)}{4E^2F^2(E)} + O(x).$$

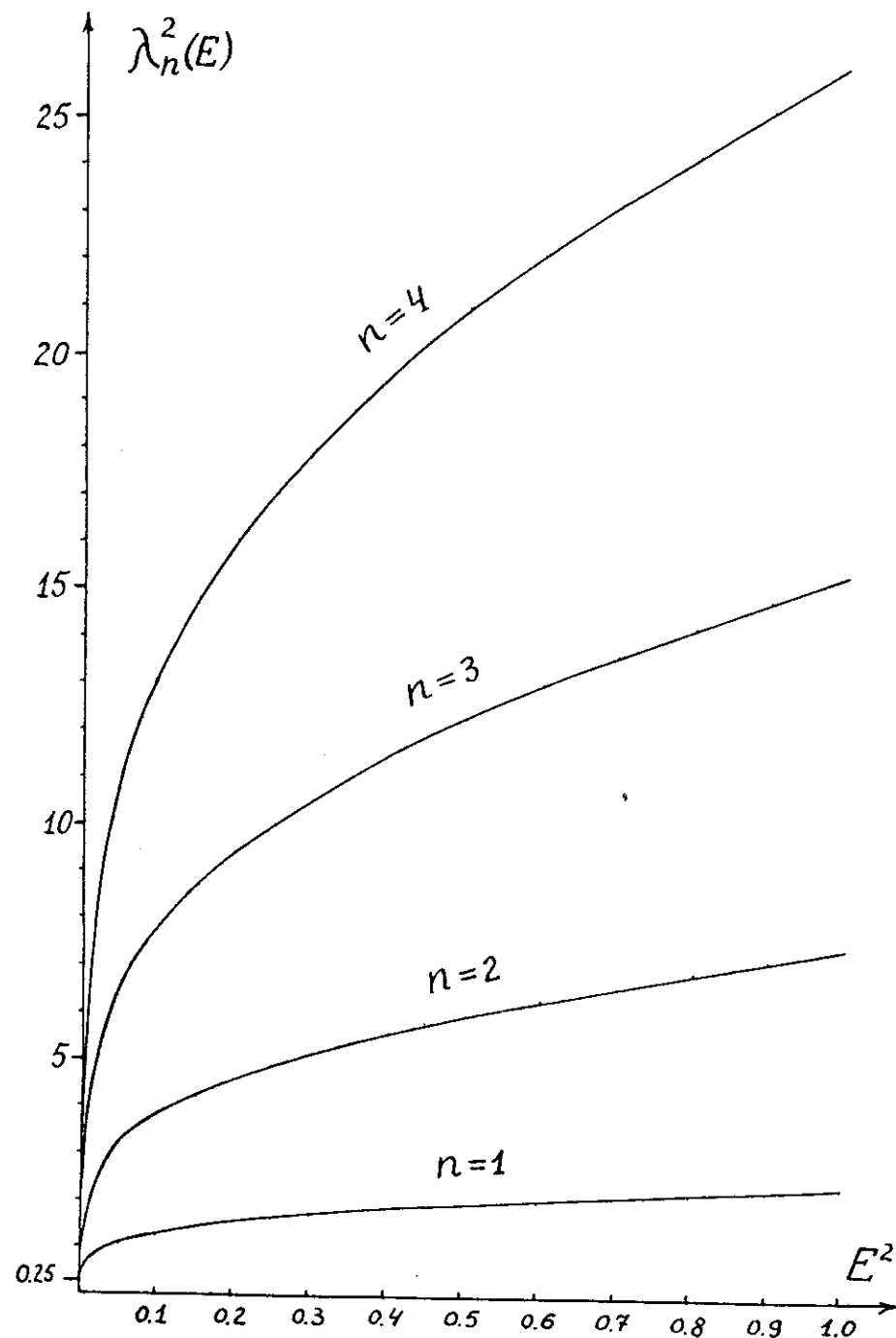
Таким образом, условие применимости первого приближения (4.6)

$$(4.29) \quad \Pi(x) \ll \lambda^2 \gamma(x)$$

всегда выполняется при достаточно больших $x > x_{\min}$ ($\gamma(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^{-3}$), т.е. в широкой области изменения $x \in [x_{\min}, \infty)$. При малых x условие (4.29) выполнено, если $\lambda^2 \gg \frac{1}{2}$.

З а к л ю ч е н и е

Многие задачи квантовой механики, квантовой теории поля и физики элементарных частиц сводятся к интегральным уравнениям в импульсном пространстве (например, уравнения Липпмана-Швингера, Бете-Солпитера, Логанова-Тавхелидзе и др.). Извлечение конкретной физической информации из этих уравнений обычно осложняется серьезными математическими трудностями, поскольку стандарт-



ные методы математической физики оказываются малоэффективными.

Основная цель этой статьи заключается в разработке нового подхода к математическим проблемам, возникающим при решении релятивистской задачи о связанных состояниях в квазипотенциальном формализме Логунова-Тавхелидзе [3]. Преимущества квазипотенциального уравнения по сравнению с уравнением Бете-Солпитера неоднократно обсуждались в литературе [3, 7, 19]. В случае задачи о связанных состояниях это отсутствие аномальных состояний и "духов", а также возможность последовательной вероятностной трактовки квазипотенциальной волновой функции. Следует отметить, что рассмотрению теории и методов решения уравнения Бете-Солпитера посвящена обширная литература (см., например, обзор [20]), в то время как для квазипотенциального уравнения, которое с физической точки зрения значительно более привлекательно, арсенал методов решения, достаточно эффективных и простых в использовании, значительно более ограничен. Такое положение вещей вряд ли можно считать удовлетворительным, поэтому в настоящей работе предпринята попытка частично восполнить этот пробел.

Основной нашего подхода [1, 2, 4, 6] является сведение интегральных уравнений к дифференциальным краевым задачам в импульсном пространстве с последующим решением этих задач аналитическими, асимптотическими (методом ВКБ [4], методом эталонного уравнения) и численными (континуальный аналог метода Ньютона [4]) методами. В данной работе рассмотрена конкретная реализация этого подхода на примере интегрального квазипотенциального уравнения, описывающего связанные состояния двух скалярных частиц одинаковой массы в случае потенциалов, имеющих в координатном представлении вид $V(r) = g r^{-2n+1}$.

Исходное интегральное уравнение для парциальных амплитуд сведено к дифференциальному уравнению порядка $2n$ с n граничными условиями при $x \rightarrow 0$ и n граничными условиями при $x \rightarrow \infty$. Ограничиваясь для простоты лишь S -волной, мы подробно рассмотрели задачу о связанных состояниях для квазипотенциала $V(r) = -g r^{-1}$ ((1.9), (1.10)). Аппроксимируя точный потенциал приближенными выражениями в областях $[0, 1]$ и $[1, \infty)$ и сшивая полученные решения в точке $x = 1$, мы получили спектральное условие (2.9), справедливое для слабо связанных состояний ($E \ll 1$). В качестве метода, адекватного дифференциальным краевым задачам достаточно обширного класса, предлагается использовать метод эталонного уравнения (МЭУ). Изложив основные идеи МЭУ, мы применили его для получения релятивистского спектрального условия (4.19) краевой задачи (4.1)-(4.3). Для того, чтобы приближенные собственные функции имели правильное поведение в окрестности особой точки $x = 0$ ($E = 0$), оказалось необходимым использовать аналог замены Крамерса: $\lambda \rightarrow \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}$. При учете этого спектральные результаты, полученные МЭУ при $E \rightarrow 0$, с хорошей точностью совпадают с релятивистскими спектральными результатами, полученными методом сшивания. Оценки поправочного члена при $x \rightarrow 0, \infty$ показывают, что приближение первого порядка (4.6) является весьма точным. Таким образом, МЭУ, будучи эффективным и удобным в применении к конкретным задачам, обеспечивает достаточную точность даже в той области, где формальные условия его применимости нарушены. Представляется целесообразным применить МЭУ для рассмотрения задачи (1.9), (1.10) при $l \neq 0$ и для других дифференциальных краевых задач подобного типа, например, для исследования поведения траекторий Редже. Таковы основные методические результаты настоящей работы.

Остановимся кратко на физических результатах. Характерной чертой дискретного спектра рассматриваемого квазипотенциального уравнения является наличие точки сгущения энергетических уровней при $E \rightarrow 0$, полностью аналогичное сгущению уровней энергетического спектра уравнения Шредингера с потенциалом $V(r) = -9r^{-2}$ [12]. Однако, в отличие от последнего, в рассматриваемой нами квазипотенциальной задаче не возникает проблемы "падения из центра", что определяет существенное преимущество последовательного релятивистского рассмотрения задачи с связанными состояниями в рамках квазипотенциального подхода.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить А.Н.Тавхелидзе за плодотворные обсуждения, поддержку и интерес к работе. Один из авторов (Д.П.М.) признателен С.Ю.Славянову за обсуждение некоторых вопросов асимптотических методов, а также Р.Б.Динглу и Ф.Оливеру за плодотворную переписку.

Л и т е р а т у р а

1. В.Ш.Гогохия, А.Т.Филиппов, ТМФ, 21 (1974), 37.
2. В.А.Арбузов, А.Т.Филиппов, Phys. Lett., 13 (1964), 95.
3. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, Nuovo Cimento, 29 (1963), 380.
4. Д.П.Мовло, И.В.Пузыкин, А.Т.Филиппов, препринт ОИЯИ, P2-8609, Дубна, 1975.
5. R.Langer, Trans Am. Math. Soc., 33(1931)23; ibid. 34(1932)447; ibid. 36(1934)90.
6. А.Т.Филиппов, preprint JINR, E2-6937, 1973; E2-7929, 1974; Б.С.Гетманов, А.Т.Филиппов, ТМФ, 8 (1971), 3.
7. Р.Н.Фаустов, ЭЧАЯ, 3 (1972), 238.

8. I.F.Fodorov, preprint Trieste Ic/69/96;
В.Б.Крещев, В.А.Ризов, И.Т.Тодоров, препринт ОИЯИ, P2-7311, Дубна, 1973.

9. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, И.Фриман, ЯФ, 9 (1969), 646.

10. А.Т.Филиппов. Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ, Дубна, 1964, т. 2.

11. Г.Бейтман, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. I, "Наука", Москва, 1965.

12. K.M.Case, Phys. Rev. 80(1950)797.

13. T.M.Cherry, Trans. Am. Math. Soc., 68(1950)224.

14. R.B.Dingle, Appl. Sci. Res. B5 (1955)345.

15. A.R.Forsyth, A treatise on Differential Equations, 6-th. ed. Macmillan, London, 1929.

16. C.E. Necht, J.E. Mayer, Phys. Rev., 106 (1957)1156.

M.J.Richardson. Phys. Rev., 88 (1973), 781.

17. Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), "Мир", Москва, 1965.

18. Д.И.Пономарев. Лекции по квазиклассике, препринт ИТФ-67-53, Киев, 1968.

19. А.Н.Тавхелидзе, Lectures on Quasipotential Method in Field Theory. Bombay, Tata Institute of Fundamental Research, 1964;

В.Г.Кадышевский, А.Н.Тавхелидзе. Проблемы теоретической физики, "Наука", М., 1969.

20. N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys., 41 (1969), 233.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 апреля 1975 г.