объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-940

В.Г.Кадышевский, Д.В.Фурсаев*

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КАЛИБРОВОЧНОГО ПРИНЦИПА В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

*Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

1988

I. Хорошо известно, что принцип калибровочной инвариантности играет ключевую роль в стандартной полевой теории сильных и электрослабых взаимодействий и во всех ее обобщениях. Цель настоящей работы - показать, что требование калибровочной инвариантности теории может быть совмещено с более общей концепцией самого поля в области высоких энергий. Конкретно речь будет идти о подходе /I-I0/, в котором предполагается, что в импульсном представлении теории в качестве области определения фундаментальных физических полей следует использовать p - пространство де Ситтера. Радиус кривизны M этого пространства трактуется как новая физическая постоянная - "фундаментальная масса". Стандартной теории, в которой областью определения полей в p - представлении служит плоское (псевдо) евклидово p -пространство, отвечает низкоэнергетическое или "плоское" приближение $M \to \infty$. Искривленность p -пространства существенно модифицирует описание взаимодействий полей при высоких энергиях $E \gtrsim M$, и это, в принципе, должно приводить к наблюдаемым эффектам[x)].

Для введения локальных калибровочных преобразований в любой полевой схеме необходимо иметь ее формулировку в конфигурационном представлении. В рассматриваемом случае одним из способов перехода в конфигурационное представление может служить обобщенное преобразование Фурье, основанное на разложении по матричным элементам унитарных представлений группы де Ситтера [xx)]. При этом полевые уравнения становятся дифференциально-разностными с шагом $1/M$. Формулировка калибровочного принципа в таком подходе практически не исследовалась /II/. В данной работе мы в определенной мере восполняем этот пробел. Будет построено калибровочно-инвариантное евклидово действие для системы взаимодействующих скалярных и неабелевых векторных полей. Мы увидим, что из-за наличия в теории "фундаментальной массы" M калибровочные преобразования векторных полей существенно видоизменяются, превращаясь в своеобразную комбинацию стандартных преобразований и преобразований, характерных для теории поля на решетке. Последнее, однако, вовсе не нарушает O(4) - инвариантность новой схемы.

---

x) На основе современных экспериментальных данных можно заключить, что $M \gtrsim 100$ ГэВ.

xx) Второй способ связан с применением стандартного, но пятимерного преобразования Фурье. Поэтому важную роль здесь приобретает конфигурационное псевдоевклидово 5-пространство /I-4/.

2. Импульсное 4-пространство де Ситтера, на базе которого может быть построена наша полевая модель, представляет собой поверхность двуполостного 5-гиперболоида:

$$p_5^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 = M^2. \qquad (2.\mathrm{I})$$

В отличие от /I-4/, мы будем здесь использовать лишь верхнюю полу (2.I), полагая

$$p_5 \geqslant M \, . \qquad (2.2)$$

Это условие сужает де-ситтеровское пространство (2.I) до импульсного 4-пространства Лобачевского. В плоском пределе $M \to \infty$ последнее переходит в четырехмерное евклидово p-пространство, в котором (p_1, p_2, p_3, p_4) являются декартовыми координатами[x)].

Допустим теперь, что в p -пространстве Лобачевского задано некое поле $\phi(\vec{p})$. Подвергнем его интегральному преобразованию, являющемуся 4-аналогом преобразования Шапиро[xx)] /I2-I4/:

$$\int \xi(\vec{p}, r, \vec{n})\, \phi(\vec{p})\, d\Omega_p \equiv \phi(r, \vec{n}), \qquad (2.3)$$

где $d\Omega_p = (1 + \vec{p}^2/M^2)^{-\frac{1}{2}} d^4 p$ – инвариантная мера интегрирования, а ядро $\xi(\vec{p}, r, \vec{n})$ имеет вид

$$\xi(\vec{p}, r, \vec{n}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{p_5 - \vec{p}\vec{n}}{M} \right)^{-\frac{3}{2} - irM}, \qquad (2.4)$$

$$p_5 = (M^2 + \vec{p}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq r < \infty, \quad \vec{n}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = 1 .$$

Компоненты 4-вектора $\vec{n}$ удобно параметризовать сферическими углами θ_1, θ_2 и θ_3 :

x) Здесь и далее евклидовы 4-векторы с компонентами (p_1 , p_2 , p_3 , p_4) будем обозначать символом $\vec{p}$.

xx) В литературе преобразование (2.3) также называют разложением по когерентным состояниям группы де Ситтера $SO(\mathrm{I},4)$ /I6/.

$$n_1 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3, \quad n_2 = \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3,$$
$$n_3 = \cos\theta_2 \sin\theta_3, \quad n_4 = \cos\theta_3, \qquad (2.5)$$
$$0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 < \theta_2, \theta_3 < \pi .$$

Будем считать далее, что соотношение (2.3) определяет поле в четырехмерном конфигурационном пространстве (к.п.), сопряженном импульсному 4-пространству Лобачевского. При этом параметрам r , θ_1 , θ_2 и θ_3 придается тот же смысл, что и сферическим координатам в четырехмерном евклидовом пространстве. Правомерность такой точки зрения подтверждают следующие свойства ядра (2.4) /I5/:

I. $$\lim_{M \to \infty} \xi(\vec{p}, r, \vec{n}) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\vec{p}\vec{x}}, \quad \vec{x} = r\vec{n} . \qquad (2.6)$$

2. $$\int \xi^*(\vec{p}, r, \vec{n})\, \xi(\vec{p}, r', \vec{n}')\, d\Omega_p = \frac{\delta(r - r')}{|r^{(\frac{3}{2})}|^2}\, \delta(\vec{n}, \vec{n}') \qquad (2.7\text{а})$$

("условие ортогональности"),

$$\int \xi^*(\vec{p}, r, \vec{n})\, \xi(\vec{p}', r, \vec{n})\, d\Omega(r, \vec{n}) = (1 + \vec{p}^2/M^2)^{\frac{1}{2}} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \qquad (2.7\text{б})$$

("условие полноты"),
где использованы обозначения

$$r^{(\lambda)} \equiv \frac{1}{(iM)^\lambda} \frac{\Gamma(irM + \lambda)}{\Gamma(irM)}, \qquad (2.8)$$

$$d\Omega(r, \vec{n}) = |r^{(\frac{3}{2})}|^2 dr\, d\Omega(\vec{n}), \quad d\Omega(\vec{n}) = \sin^2\theta_3 \sin\theta_2\, d\theta_3\, d\theta_2\, d\theta_1 . \qquad (2.9)$$

3. $$\left[-\frac{1}{M^2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 - r^2 \right] \xi(\vec{p}, r, \vec{n}) = \frac{1}{M^2}\left[p_5 \frac{\partial}{\partial p}\left(p_5 \frac{\partial}{\partial p}\right) + 3\frac{p_5^2}{p}\frac{\partial}{\partial p} + M^2 \frac{\Delta\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)}{\vec{p}^2} \right] \xi(\vec{p}, r, \vec{n}) \equiv \Box_p \xi(\vec{p}, r, \vec{n}), \quad p \equiv |\vec{p}| . \qquad (2.\mathrm{I}0)$$

$\widetilde{\Box}_p$ представляет собой оператор Лапласа – Бельтрами в импульсном 4-пространстве Лобачевского. В плоском пределе $M \to \infty$ из (2.II) находим

$$-r^2 e^{i\bar{p}\bar{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{p}}\right)^2 e^{i\bar{p}\bar{x}}. \tag{2.II}$$

4. $$2M(M-p_5)\xi(\bar{p},r,\bar{n}) = \left[-(2M)^2 sh^2\left(\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \right. \tag{2.I2}$$

$$\left. - \frac{3i}{r} sh\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{M\Delta(\bar{n})}{r(rM-i/2)} e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}}\right]\xi(\bar{p},r,\bar{n}) \equiv \widetilde{\Box}_{r,\bar{n}}\xi(\bar{p},r,\bar{n}),$$

где $\Delta(\bar{n})$ – оператор Лапласа – Бельтрами на 4-сфере $\bar{n}^2 = 1$. При $M \to \infty$ уравнение (2.I2) принимает вид

$$-\bar{p}^2 e^{ir(\bar{p}\bar{n})} = \left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta(\bar{n})}{r^2}\right] e^{ir(\bar{p}\bar{n})}. \tag{2.I3}$$

Следовательно, применительно к функциям, заданным в к.п., дифференциально-разностный оператор $\widetilde{\Box}_{r,\bar{n}}$ можно рассматривать как аналог евклидова лапласиана, записанного в четырехмерных сферических координатах $u^1 \equiv r$, $u^2 \equiv \theta_3$, $u^3 \equiv \theta_2$, $u^4 \equiv \theta_1$. Заметим, что если бы стандартную евклидову калибровочную теорию поля мы решили формулировать именно в u – координатах, а не в привычных декартовых координатах (x^1 , x^2 , x^3 , x^4), то нам пришлось бы ввести в рассмотрение сферические компоненты векторного поля (A_r, A_{θ_3}, A_{θ_2}, A_{θ_1}) и тензора напряженностей($\mathcal{F}_{\theta_1 r}$, $\mathcal{F}_{\theta_2 r}$, $\mathcal{F}_{\theta_1\theta_2}$ и т.п.). Если условиться обозначать сферические компоненты греческими индексами, а декартовы – латинскими, то, очевидно,

$$A_k = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^k} A_\mu , \quad \mathcal{F}_{k\ell} = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^k}\mathcal{F}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^\ell}, \tag{2.I4}$$

где $\partial x^\mu/\partial u^k$ – матрица преобразования в евклидовом 4-пространстве от декартовой системы координат к сферической, определяемая из соотношения $x^\mu = r n^\mu$ (n^μ – единичный вектор (2.5)).

В дальнейшем будут полезны величины $g_\ell \equiv (g_r, g_{\theta_3}, g_{\theta_2}, g_{\theta_1})$, которые вычисляются по формулам

$$\frac{g_\ell}{r^2}\delta^{k\ell} = \sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial u^k}{\partial x^\mu}\frac{\partial u^\ell}{\partial x^\mu}. \tag{2.I5}$$

3. Пусть $\phi_a(p)$, $a = 1,2, \ldots N$, – набор неэрмитовых скалярных полей с одинаковой массой $m \leqslant M$, заданный в p –пространстве Лобачевского. Согласно /3/ соответствующий ему функционал действия $S[\phi]$ имеет вид

$$S[\phi] = \int d\Omega_p\, \phi_a^*(\bar{p}) 2M(p_5 - M\cos\mu)\phi_a(\bar{p}) =$$

$$= \int d\Omega_p\, \phi_a^*(\bar{p})\left[2M(p_5-M) + 4M^2\sin^2\frac{\mu}{2}\right]\phi_a(\bar{p}), \tag{3.I}$$

$$p_5 = \sqrt{M^2+\bar{p}^2}, \quad \cos\mu = \sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}.$$

Поясним, что использование в (3.I) в качестве волнового оператора выражения $2M(p_5 - M\cos\mu)$ связано с существованием тождества

$$\bar{p}^2 + m^2 = p_5^2 - (M^2 - m^2) = 2M(p_5 - M\cos\mu)\frac{p_5 + M\cos\mu}{2M}.$$

Таким образом, пропагатор скалярной частицы, подобно стандартному пропагатору, имеет полюс на массовой поверхности $p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2$.

Перечислим свойства действия (3.I):

1) $S[\phi] \geqslant 0$,
2) O(4) – инвариантность,
3) глобальная $U(N)$ – инвариантность,
4) при $M \to \infty$ функционал $S[\phi]$ совпадает с евклидовым действием для N – плета скалярных полей массы m.

Используя преобразование Шапиро (2.3), перейдем в (3.I) к конфигурационному представлению. С учетом (2.7а) и (2.I2) будем иметь

$$S[\phi] = \int d\Omega(r,\bar{n})\,\phi_a^*(r,\bar{n})\left[-\widetilde{\Box}_{r,\bar{n}} + 4M^2\sin^2\frac{\mu}{2}\right]\phi_a(r,\bar{n}). \tag{3.2}$$

Как показано в приложении I, на определенном классе функций этому функционалу можно придать явно неотрицательную форму

$$S[\phi]=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dr\int d\Omega(\bar{n})\Big[M^2\left|\frac{r^{(2)}}{r^{(1/2)}}\right|^2\left|2\,sh\left(\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}\right)\phi_a(r,\bar{n})\right|^2+$$

$$+\frac{r^2}{|r^{(\frac{1}{2})}|^2}\sum_{j=1}^{3}g_{\theta_j}\left|e^{\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\phi_a(r,\bar{n})\right|^2+|r^{(\frac{3}{2})}|^2 4M^2\sin^2\frac{\mu}{2}\left|\phi_a(r,\bar{n})\right|^2\Big] \tag{3.3}$$

(величины g_{θ_j} определены в (2.I5)).

4. Теперь, отправляясь от (3.3), построим функционал действия для данного скалярного мультиплета, инвариантный относительно локальных $SU(N)$ -преобразований:

$$\phi'(r,\bar{n})=U(r,\bar{n})\phi(r,\bar{n}). \tag{4.I}$$

Соответствующее калибровочное векторное поле нам придется описывать радиальной и угловыми компонентами $A_r(r,\bar{n})$, $A_{\theta_3}(r,\bar{n})$, $A_{\theta_2}(r,\bar{n})$, $A_{\theta_1}(r,\bar{n})$ (см. конец раздела 2). Считая эти поля эрмитовыми, положим, что закон их калибровочного преобразования, отвечающий (4.I), имеет вид

$$e^{-\frac{g}{M}A'_r(r,\bar{n})}=U\left(r-\frac{i}{2M},\bar{n}\right)e^{-\frac{g}{M}A_r(r,\bar{n})}U^{-1}\left(r+\frac{i}{2M},\bar{n}\right), \tag{4.2}$$

$$A'_{\theta_k}(r,\bar{n})=U(r,\bar{n})\left(A_{\theta_k}(r,\bar{n})-\frac{i}{g}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right)U^{-1}(r,\bar{n}). \tag{4.3}$$

В этих выражениях $A_r\equiv A_r^b T_b$, $A_{\theta_k}\equiv A_{\theta_k}^b T_b$, где $T_b=T_b^+$ $(b=1,\dots N^2-1)$ – образующие алгебры Ли группы $SU(N)$, $U(r,\bar{n})=exp(igT_b\omega^b(r,\bar{n}))$, g – калибровочная константа связи. Групповой характер преобразований (4.2),(4.3) очевиден. Ясно также, что $A'_r=A'^+_r$, $A'_{\theta_k}=A'^+_{\theta_k}$.

Преобразование (4.2) напоминает закон преобразования калибровочных векторных полей в теории поля на решетке. В плоском пределе $M\to\infty$ оно принимает такую же форму, как (4.3).

В силу (4.I)-(4.3) калибровочно-инвариантное действие для рассматриваемой системы скалярных полей может быть получено из свободного действия (3.3) с помощью подстановки:

$$\left(e^{\pm\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}}\phi(r,\bar{n})\right)^+\left(e^{\pm\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}}\phi(r,\bar{n})\right)\to$$

$$\to\left(e^{\pm\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}}\phi(r,\bar{n})\right)^+e^{\mp\frac{g}{M}A_r(r,\bar{n})}\left(e^{\pm\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}}\phi(r,\bar{n})\right), \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_k}\to\frac{\partial}{\partial\theta_k}+igA_{\theta_k}(r,\bar{n})\equiv\mathcal{D}_{\theta_k}(r,\bar{n}).$$

Вводя для этого нового функционала обозначение $S[\phi,A]$, будем иметь

$$S[\phi,A]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}dr\int d\Omega(\bar{n})\Big[\left|\frac{r^{(2)}}{r^{(1/2)}}\right|^2M^2\left|\left(e^{-\frac{gA_r}{2M}}e^{\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}}-e^{\frac{gA_r}{2M}}e^{-\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}}\right)\phi\right|^2+$$

$$+\frac{r^2}{|r^{(1/2)}|^2}g_{\theta_k}\left|e^{-\frac{gA_r}{2M}}e^{\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}}\mathcal{D}_{\theta_k}\phi\right|^2+|r^{(\frac{3}{2})}|^2 4M^2\sin^2\frac{\mu}{2}|\phi|^2\Big]. \tag{4.5}$$

Данный функционал, как и действие (3.3), неотрицателен, O(4) – инвариантен, а в плоском пределе $M\to\infty$ совпадает с евклидовым действием массивного скалярного поля, взаимодействующего с внешним полем Янга – Миллса.

5. Задачей этого раздела является построение действия для калибровочного векторного поля, изолированного от материальных полей. Начнем с абелева случая, как более простого. Нетрудно убедиться, что функционал [x)]

$$S[A]=\frac{1}{8}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dr}{|r^{(1/2)}|^2}\int d\Omega(\bar{n})g_k g_e\,\mathcal{F}_{ke}(r,\bar{n})^+\mathcal{F}_{ke}(r,\bar{n}), \tag{5.I}$$

[x)] Интеграл по r в (5.I) следует понимать в смысле главного значения.

где использованы обозначения

$$\mathcal{F}_{\theta_k r}(r,\bar{n}) = e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \theta_k} A_r(r,\bar{n}) + iM e^{\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}} \left(e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}} - 1\right) A_{\theta_k}(r,\bar{n}),$$

$$\mathcal{F}_{\theta_k \theta_j}(r,\bar{n}) = e^{\frac{3i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_k} A_{\theta_j}(r,\bar{n}) - \frac{\partial}{\partial \theta_j} A_{\theta_k}(r,\bar{n}) \right), \tag{5.2}$$

обладает всеми требуемыми свойствами. Эта величина неотрицательна, O(4) – инвариантна и не меняется при абелевых калибровочных преобразованиях (4.2)-(4.3):

$$A_r'(r,\bar{n}) = A_r(r,\bar{n}) + 2Mi\, sh\left(\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}\right) \omega(r,\bar{n}),$$

$$A_{\theta_k}'(r,\bar{n}) = A_{\theta_k}(r,\bar{n}) - \frac{\partial}{\partial \theta_k} \omega(r,\bar{n}). \tag{5.3}$$

Кроме того, в пределе $M \to \infty$ величины (5.2) совпадают со сферическими компонентами максвеллова тензора напряженностей в евклидовом 4-пространстве, а функционал (5.I) – с евклидовым максвелловым действием.

Наконец, переходя к импульсному пространству Лобачевского с помощью обращения преобразования (2.3), действие (5.I) можно записать в виде, аналогичном (3.I) при $\mu = 0$:

$$S[A] = \frac{1}{2} \int d\Omega_p\, \tilde{A}_\nu(\bar{p})^* \left(2M(p_5 - M)\right) \tilde{A}_\nu(\bar{p}), \tag{5.4}$$

где $\tilde{A}_\nu(\bar{p})$ – декартовы компоненты калибровочно-инвариантного векторного поля, построенного из исходного абелева поля (см. приложение 2).

Адекватным обобщением (5.I) на неабелев случай является функционал

$$S[A] = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{|\Gamma(1/2)|^2} \int d\Omega(\bar{n})\, Sp\left(g_k g_e\, e^{\frac{g}{M} A_r(r,\bar{n})} \times \right.$$

$$\left. \times\ \mathcal{F}_{ke}(r,\bar{n})^+ e^{-\frac{g}{M} A_r(r,\bar{n})} \mathcal{F}_{ke}(r,\bar{n}) \right). \tag{5.5}$$

Здесь $\mathcal{F}_{ke}(r,\bar{n})$ – сферические компоненты тензора напряженностей Янга – Миллса

$$\mathcal{F}_{\theta_k r}(r,\bar{n}) = \frac{1}{g} e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}} \left[e^{-\frac{g}{M} A_r(r,\bar{n})} \frac{\partial}{\partial \theta_k} e^{\frac{g}{M} A_r(r,\bar{n})} + \right.$$

$$\left. + ig\left(e^{-\frac{g}{M} A_r(r,\bar{n})} A_{\theta_k}\left(r + \frac{i}{2M}, \bar{n}\right) e^{\frac{g}{M} A_r(r,\bar{n})} - A_{\theta_k}\left(r - \frac{i}{2M}, \bar{n}\right) \right) \right], \tag{5.6}$$

$$\mathcal{F}_{\theta_k \theta_e}(r,\bar{n}) = e^{-\frac{g}{M} A_r\left(r + \frac{i}{M}, \bar{n}\right)} \frac{1}{ig} \left(e^{\frac{3i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}} [\mathcal{D}_{\theta_k}, \mathcal{D}_{\theta_e}] \right) e^{\frac{g}{M} A_r\left(r + \frac{i}{M}, \bar{n}\right)}, \tag{5.7}$$

подчиняющиеся следующему закону калибровочного преобразования:

$$\mathcal{F}_{ke}'(r,\bar{n}) = U\left(r + \frac{i}{2M}, \bar{n}\right) \mathcal{F}_{ke}(r,\bar{n}) U^{-1}\left(r + \frac{i}{2M}, \bar{n}\right). \tag{5.8}$$

Функционал (5.5) обладает теми же свойствами, что и абелево действие (5.I). При $M \to \infty$ он переходит в евклидово действие неабелевых калибровочных полей с группой симметрии $SU(N)$, а величины (5.6) и (5.7) превращаются в обычные сферические компоненты неабелева тензора напряженностей.

Теперь мы можем представить полное действие нашей модели как сумму двух калибровочно- и O(4) – инвариантных функционалов (4.5) и (5.5):

$$S_{tot}[\phi, A] = S[\phi, A] + S[A], \tag{5.9}$$

и завершить ее общее описание. Конкретные применения этой схемы будут рассмотрены в отдельной работе.

Авторы выражают искреннюю благодарность А.Д. Донкову, Р.М. Ибадову, Р.М. Кашаеву, Р.М. Мир-Касимову и В.И. Саврину за полезные обсуждения.

Приложение I

Для доказательства представления (3.3) распространим определение (2.3) полей $\phi_a(r,\vec{n})$ на все вещественные значения параметра r и рассмотрим функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

I) являются мероморфными по переменной $z = r + i\sigma$,
2) аналитическими в полосе $|Im z| \leqslant 1/M$,
3) при больших $|z|$ имеют степень роста не выше, чем $\left(|z|^{2+\delta}\right)^{-1}$, где $\delta > 0$.

На этом классе функций функционал (3.2) можно представить в виде

$$S[\phi] = \int d\Omega(\vec{n}) \oint_C dz \, \frac{\Gamma(izM + \frac{3}{2})\Gamma(-izM + \frac{3}{2})}{\Gamma(izM)\Gamma(-izM)} \times$$
$$\times \frac{1}{2} \phi_a^*(z,\vec{n})\left(-\widetilde{\Box}_{r,\vec{n}} + 4M^2 \sin^2\frac{\mu}{2}\right)\phi_a(z,\vec{n}), \qquad (I)$$

где C - замкнутый контур, содержащий дугу бесконечно большого радиуса в верхней (или нижней) полуплоскости z. Пользуясь этим представлением и деформируя контур C в полосе $|\sigma| \leqslant 1/M$, нетрудно получить формулу (3.3).

Интересно отметить, что элемент объема $d\Omega(r,\vec{n})$ имеет простые полюса по z и поэтому дает вклад в (I) вида

$$S'[\phi] = \int d\Omega(\ell,\vec{n}) \, \overline{\phi}_a(\ell,\vec{n})\left(-\widetilde{\Box}_{\ell,\vec{n}} - 4M^2 \sin^2\frac{\mu}{2}\right)\phi_a(\ell,\vec{n}). \qquad (2)$$

В этом выражении

$$\phi(\ell,\vec{n}) \equiv \phi(z,\vec{n})\Big|_{z = i(\ell + \frac{3}{2M})}, \quad \overline{\phi}(\ell,\vec{n}) \equiv \phi^*(z,\vec{n})\Big|_{z = i(\ell + \frac{3}{2M})}, \quad \ell M = 0,1,2,\ldots,$$

символ $\int d\Omega(\ell,\vec{n})$ означает $\int d\Omega(\vec{n}) \sum\limits_{\ell M = 0}^{\infty} \frac{1}{M^3}\left(\ell M + \frac{3}{2}\right)\frac{(\ell M + 2)!}{(\ell M)!}$,
а оператор $\widetilde{\Box}_{\ell,\vec{n}}$ аналогичен $\widetilde{\Box}_{r,\vec{n}}$ и выглядит так:

$$\widetilde{\Box}_{\ell,\vec{n}} = (2M)^2\left(sh\left(\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial \ell}\right)\right)^2 + \frac{6M^2}{2\ell M + 3} sh\left(\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial \ell}\right) +$$
$$+ \frac{2M^2}{(\ell M + 1)(2\ell M + 3)} \Delta(\vec{n}) \, e^{\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial \ell}}. \qquad (3)$$

$S'[\phi]$ напоминает функционал действия в теории поля на решетке. Далее его можно преобразовать к виду

$$S'[\phi] = \int \frac{d^4 p}{(1 - \vec{p}^2/M^2)^{\frac{1}{2}}} \, \overline{\phi}_a(\vec{p})\left(2M(M - p_5) - 4M^2 \sin^2\frac{\mu}{2}\right)\phi_a(\vec{p}), \qquad (4)$$

в котором поля $\phi_a(\vec{p})$ и $\overline{\phi}_a(\vec{p})$ заданы на поверхности 4-мерной сферы

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = M^2$$

и связаны с $\phi_a(\ell,\vec{n})$ и $\overline{\phi}_a(\ell,\vec{n})$ соотношениями

$$\phi_a(\vec{p}) = \int d\Omega(\ell,\vec{n}) \, \widetilde{\xi}'(\ell,\vec{n},\vec{p}) \, \phi_a(\ell,\vec{n}), \qquad (5)$$

$$\overline{\phi}_a(\vec{p}) = \int d\Omega(\ell,\vec{n}) \, \xi'(\ell,\vec{n},\vec{p}) \, \overline{\phi}_a(\ell,\vec{n}). \qquad (6)$$

Последние представляют аналог интеграла Фурье (2.3) для случая сферического импульсного пространства, а базисные функции имеют вид

$$\xi'(\ell,\vec{n},\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{p_5 + i\vec{p}\vec{n}}{M}\right)^{\ell M}, \quad \widetilde{\xi}'(\ell,\vec{n},\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{p_5 + i\vec{p}\vec{n}}{M}\right)^{-3-\ell M}.$$

Справедливость (4) следует из соотношений анализа Фурье на 4-мерной сфере /I7/.

Приложение 2

Определим операторы

$$\hat{p}_\mu = \frac{\partial r}{\partial x^\mu}(\rho,\vec{n})\left(-\frac{\widetilde{\Box}_{r,\vec{n}}}{2M} + M\left(1 - e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}}\right)\right) + \frac{\partial \theta_K}{\partial x^\mu}(\rho,\vec{n})\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \theta_K} e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}}, \qquad (I)$$

$\rho \equiv r - i/2M$, для которых базисные функции $\xi(\vec{p},r,\vec{n})$ являются собственными:

$$\hat{p}_\mu \xi(\vec{p},r,\vec{n}) = p_\mu \xi(\vec{p},r,\vec{n}),$$

и введем следующие поля:

$$A_\mu(r,\bar n)=\frac{\partial r}{\partial x^\mu}(\rho,\bar n)\Big[\frac{rM-\frac{3i}{2}}{rM}\,ch\Big(\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}\Big)A_r(r,\bar n)-$$

$$-\frac{i}{2rM(rM-\frac{i}{2})}\,\frac{1}{\sin^2\theta_3\sin\theta_2}\,e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big(\sin^2\theta_3\sin\theta_2\, g_{\theta_k}A_{\theta_k}(r,\bar n)\Big)\Big]+ \quad (2)$$

$$+\frac{\partial\theta_k}{\partial x^\mu}(\rho,\bar n)\,e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}}A_{\theta_k}(r,\bar n),$$

$$D(r,\bar n)=2\Big[\frac{1}{r}\Big(\frac{3}{2}ch\Big(\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}\Big)-irM\,sh\Big(\frac{i}{2M}\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big)A_r(r,\bar n)+ \quad (3)$$

$$+\frac{M}{2r(rM-\frac{i}{2})}\,\frac{1}{\sin^2\theta_3\sin\theta_2}\,e^{\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big(\sin^2\theta_3\sin\theta_2\, g_{\theta_k}A_{\theta_k}(r,\bar n)\Big)\Big].$$

Тогда фурье-образ поля $\tilde A_\mu(r,\bar n)$ можно представить в виде

$$\tilde A_\mu(\bar p)=A_\mu(\bar p)+\frac{ip_\mu D(\bar p)}{2M(p_s-M)}. \quad (4)$$

При абелевых калибровочных преобразованиях A_r и A_{θ_k} эти величины изменяются следующим образом:

$$A'_\mu(r,\bar n)=A_\mu(r,\bar n)-i\hat p_\mu\,\omega(r,\bar n), \quad (5)$$

$$D'(r,\bar n)=D(r,\bar n)-\tilde\Box_{r,\bar n}\,\omega(r,\bar n), \quad (6)$$

и $\tilde A_\mu(r,\bar n)$ оказывается калибровочно-инвариантным. Оно также удовлетворяет условию

$$\Big[\frac{i}{r}\Big(e^{-\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}}-1\Big)r\Big((rM)^2+\frac{1}{4}\Big)\frac{\partial x^\mu}{\partial r}(\rho,\bar n)+$$

$$+\frac{M}{\sin^2\theta_3\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\Big(\sin^2\theta_3\sin\theta_2\, g_{\theta_k}\frac{\partial x^\mu}{\partial\theta_k}(\rho,\bar n)\Big)\Big]\tilde\Box_{r,\bar n}\tilde A_\mu(r,\bar n)=0. \quad (7)$$

В плоском пределе операторы $\hat p_\mu$ превращаются в $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, соотношения (2) и (3) принимают вид

$$A_\mu=\frac{\partial u^k}{\partial x^\mu}A_k, \qquad D=\frac{\partial}{\partial x^\mu}A^\mu,$$

а $\tilde A_\mu$ становится поперечной компонентой декартова поля A_μ.

Литература

1. Kadyshevsky V.G.- Nucl. Phys., 1978, B141, p. 477; Kadyshevsky V.G.- In: Proc. of Intern. Integrat. Conf. on Group Theory and Math. Physics, Austin, Texas, 1978; Кадышевский В.Г. - ЭЧАЯ, 1980, II, в. 1, с. 5.
2. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. - Phys. Lett., 1981, 106B, p.139.
3. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. - Nuovo Cimento, 1985, v.87A, No 3, p. 324.
4. Донков А.Д. и др. Труды УП Межд. сов. по пробл. квантовой теории поля. Алушта, 1984. ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с.172; Chizhov M.V. et al. - Nuovo Cimento, 1985, v. 87A, No 3, p. 350; 1985, v. 87A, No 4, p. 373.
5. Донков А.Д. и др. - Известия АН СССР, сер. физ., 1982, 46, № 9, с. 1772; Ибадов Р.М., Чижов М.В. - Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1983, № 5, с. 38.
6. Ибадов Р.М. - Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1984, № 3, с. 44.
7. Кадышевский В.Г. Квантовая теория поля и "максимон" Маркова, доклад на Ш Межд. семинаре "Квантовая теория гравитации". (Москва, 1984), ОИЯИ, 1984, Р2-84-753, Дубна.
8. Ибадов Р.М., Кадышевский В.Г. ОИЯИ,Р2-86-830, Дубна, 1986.
9. Ибадов Р.М., Кадышевский В.Г. ОИЯИ,Р2-86-835, Дубна, 1986.
10. Кадышевский В.Г., Фурсаев Д.В. - ОИЯИ,Р2-87-913, Дубна, 1987.
11. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. JINR, E2-8892, Dubna, 1975.
12. Шапиро И.С. - ДАН СССР, 1956, 106, с. 647; ЖЭТФ, 1962, 43, с. 1727.
13. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B.- Nuovo Cim., 1968, v. 55A, p. 233.
14. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. - ЭЧАЯ, 1972, т. 2, в. 3, с. 635.
15. Виленкин И.Я. - Специальные функции и теория представлений групп. М., Физматгиз, 1965.

16. Переломов А.М. - Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., "Наука", 1987.

17. Sherman T.O. Transactions of the American Mathematical Society, 1975, v. 209, p. 1.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1988 года.

Кадышевский В.Г., Фурсаев Д.В. P2-88-940
Об одном обобщении калибровочного принципа в области высоких энергий

Построена модель евклидовой калибровочной теории, описывающая систему взаимодействующих скалярных и векторных полей и основанная на более общей концепции самого поля в области высоких энергий. Ключевая роль здесь принадлежит импульсному 4-пространству Лобачевского с радиусом кривизны M, причем параметр M трактуется как новая физическая постоянная /"фундаментальная масса"/. В качестве преобразования Фурье используется разложение по унитарным представлениям группы движений p-пространства Лобачевского. После перехода в соответствующее новое конфигурационное представление основные уравнения теории становятся дифференциально-разностными с шагом ~1/M. В этом представлении определяются локальные калибровочные преобразования материальных и векторных полей. Из-за наличия в теории "фундаментальной массы" M закон калибровочного преобразования векторного поля оказывается существенно модифицированным и выглядит как комбинация стандартных янг-миллсовских преобразований и калибровочных преобразований, характерных для теории векторного поля на решетке. Последнее, однако, не нарушает евклидову O(4)-инвариантность модели. В низкоэнергетическом приближении /M → ∞/ рассматриваемая теория эквивалентна стандартной.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Г.Г.Сандуковской

Kadyshevsky V.G., Fursaev D.V. P2-88-940
On a Generalization of the Gauge Principle at High Energies

The model of the Euclidean gauge theory is constructed for the system of interacting scalar and vector fields which is based on a generalised concept of the field itself in the region of high energies. The key role is played by the momentum Lobachevsky four-space with the curvature radius M as a new physical constant ("fundamental mass"). As a Fourier transform we use the expansion over unitary representations of the group of motions of the Lobachevsky p-space. Upon going to the corresponding new configurational representation the basic equations of the theory become differential-difference ones with the step ~1/M. In this representation, local gauge transformations of material and vector fields are defined. Due to the presence of the "fundamental mass" M in the theory, the gauge transformation law of the vector field turns out to be essentially modified and is a combination of the standard Yang-Mills transformations and gauge vector field transformations specific of the theory on the lattice. However, the latter does not break the Euclidean O(4) invariance of the model. In the low-energy approximation (M → ∞) this theory is equivalent to the standard one.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988