

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

88-923
Л 869

P2-88-923

И.В.Луценко*, Л.Г.Мардоян*, Г.С.Погосян*,
А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Автонян*

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КУЛОНОВСКАЯ ЗАДАЧА
В ОДНОМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Направлено в "Journal of Physics A"

*Ереванский государственный университет

1988

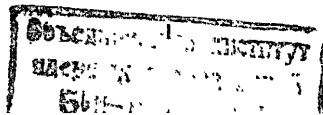
Посвящается памяти жертв
декабрьского 1988 года
страшного землетрясения
в Армении.

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика утверждает, что дискретный спектр одномерных систем обязан быть невырожден ^{1/1}. Тем не менее, есть исключения из этого правила. Мы имеем в виду потенциалы: (а) симметричные относительно инверсии $X \rightarrow -X$; (б) сингулярные в точке $X = 0$, причем природа этой сингулярности такова, что равна нулю вероятность просачивания частицы из левой области в правую и наоборот. Для потенциалов, удовлетворяющих этим довольно общим условиям, энергетический дискретный спектр двукратно вырожден. Частица с данной энергией может находиться либо в правой, либо в левой области, т.е. есть два варианта, и им соответствуют две разные волновые функции. Указанная ситуация моделируется следующим примером ^{2/1}. Рассмотрим одномерную систему с потенциалом взаимодействия $U = Kx^2 + \Omega \delta(x)$, т.е. гармонический осциллятор с дельтаобразной добавкой. Спектроскопия этой системы такова, что есть уровни с четными и с нечетными волновыми функциями, и эти уровни чередуются между собой. Нечетные уровни не зависят от параметра Ω , четные зависят. С ростом Ω каждый четный уровень приближается к находящемуся над ним нечетному уровню, и при $\Omega = \infty$ сливается с ним, порождая двукратно вырожденный энергетический уровень.

Можно вместо двух взять N тождественных ям, отделенных непроницаемыми барьерами, и получить N -кратное вырождение в одномерье. Возникает вопрос: является ли модель сингулярно-симметричного потенциала единственным механизмом, объясняющим вырождение в одномерье?

К этому вопросу имеет непосредственное отношение квантовая система с потенциалом $U(x) = -e^2|x|^{-4}$, т.е. одномерный атом водорода ^{3/1}. Здесь работает модель сингулярного симметричного потенциала,



так как интеграл от функции $|x|^{-4}$ в пределах $(-\varepsilon, \varepsilon)$ расходится, и потому области $x < 0$ и $x > 0$ изолированы друг от друга^{4/}. Вместе с этим работает и другой механизм - скрытая симметрия $O(2)$ ^{5,6/}, из которого также следует факт двукратного вырождения. Итак, налицо две модели, объясняющие одно и то же явление. Очевидно, эти модели друг другу не противоречат. Цель настоящей статьи - обратить внимание на то, что, в отличие от модели сингулярно-симметричного потенциала, $O(2)$ симметрия отвечает не только за двукратное вырождение, но и за всю динамику одномерного атома водорода: явный вид спектра, явный вид волновых функций, добавочный интеграл движения.

Статья нами построена следующим образом. Сначала мы обосновываем тот факт, что в одномерье кулоновский потенциал действительно сингулярен в указанном ранее смысле. Это достигается доказательством того, что задача об одномерном атоме водорода тождественна задаче о движении частицы в поле $U = (\alpha x + \frac{\beta}{x})^2$, представляющем собой две тождественные ямы, разделенные непроницаемым барьером. Следующий наш шаг - попытка выяснить вид добавочного интеграла движений, ответственного за двукратное вырождение. Эта задача решена нами сначала с помощью перехода к одномерью в выражении вектора Рунге-Ленца, затем с помощью весьма искусственного трюка, напоминающего метод разделения переменных.

С точки зрения сингулярно-симметричной модели для двукратного вырождения не важен конкретный тип сингулярности, достаточно, чтобы барьер между областями был непроницаем. Поэтому добавочный интеграл движения должен существовать и для полей, отличающихся от чисто кулоновского поля, но сингулярных. В связи с этим возникает вопрос - можно ли каким-либо способом получить явный вид этой сохраняющейся величины. Нами доказано, что для потенциалов $U = -|x|^{-4} + G(x)$, где $G(x) \rightarrow \text{const}$ при $x \rightarrow 0$ и не имеет особенностей, переменные разделяются в "одномерных параболических координатах" и интеграл движения совпадает с интегралом движения для чисто кулоновского поля. Этот результат говорит в пользу модели сингулярно-симметричного потенциала, хотя здесь уместно обратить внимание на момент, о котором мы говорили выше. Информация, которую мы извлекаем из знания этого интеграла движения, весьма скудна, так как все, что мы можем при этом сделать - это объяснить двукратное вырождение. Никаких намеков нет на такие вопросы, как явный вид энергетического спектра и соответствующие волновые функции. Эти вопросы находят однозначные ответы в подходе, основанном на скрытой $O(2)$ симметрии, изложению которой посвящена остальная часть статьи. Чтобы не повторять уже известных вещей^{5/}, мы ниже развиваем подход, основанный на несколько

другой идее^{7/}. Нами получено дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее поведение одномерного атома водорода в импульсном пространстве, и на его основе развита схема $O(2)$ симметрии, предсказывающая как факт двукратного вырождения, так и явный вид энергетического спектра, волновых функций и добавочного интеграла движения.

I. Кулон-осцилляторная аналогия в одномерье

Выше мы отмечали, что потенциал $U = -e^2|x|^{-4}$ делит ось X на две изолированные друг от друга полуоси $X > 0$ и $X < 0$. Сам по себе этот факт не очевиден^{4/}. Здесь мы приводим его простое доказательство, используя преобразование

$$X = \text{sgn} U \cdot u^2.$$

Это преобразование $R^1 \rightarrow R^1$ является тривиальным и в то же время вырожденным (взаимно-однозначным) в серии квадратичных небиективных преобразований, переводящих кулоновские задачи в R^2 , R^3 и R^5 в осцилляторные задачи в R^2 , R^4 и R^8 соответственно^{9,10/}.
Вместе с подстановкой

$$\psi(x) = \sqrt{|u|} \Phi(u)$$

это преобразование переводит уравнение Шредингера ($e = \hbar = \mu = 1$)

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + 2\left(E + \frac{1}{|x|}\right)\psi = 0$$

для одномерного атома водорода в уравнение Шредингера

$$\frac{d^2 \Phi}{du^2} + 2\left(\varepsilon - V(u)\right)\Phi = 0$$

для сингулярного осциллятора. Здесь

$$\varepsilon = 4 + \sqrt{6|E|}$$

$$V(u) = \left(2\sqrt{|E|} \cdot u + \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{u}\right)^2$$

Сказанное иллюстрирует наглядно рис. I. Таким образом, на языке координаты U мы имеем две тождественные по форме ямы, отделенные непроницаемым барьером. Тем самым доказана причастность одномерного атома водорода к модели сингулярно-симметричного потен-

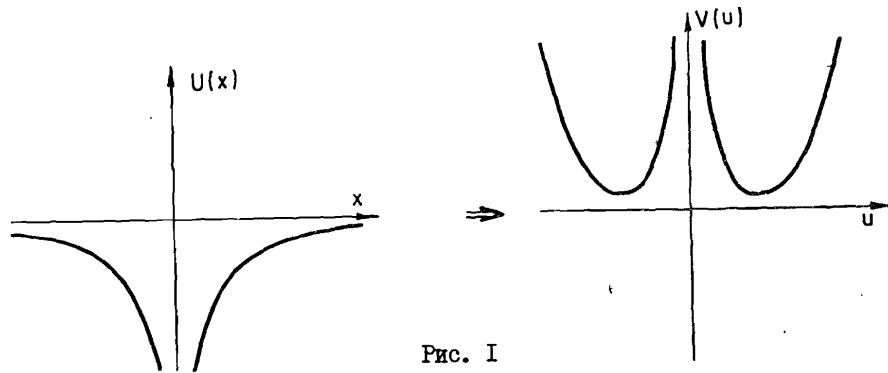


Рис. 1

циала. После этого факт двукратного вырождения энергетического спектра одномерного атома водорода не вызывает сомнения.

2. Аналог вектора Рунге-Ленца

Из теории атома водорода известно, что в кулоновском поле наряду с моментом импульса сохраняется оператор Рунге-Ленца^[8]

$$\hat{\vec{A}} = -\frac{\vec{z}}{z} + \frac{1}{2} \left\{ [\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}] - [\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}] \right\}. \quad (2.1)$$

Есть ли интеграл подобного типа в одномерье? В одномерье $\vec{L} = 0$ и вместо \vec{z} в (2.1) следует подставить вектор $(X, 0, 0)$. Тогда отличной от нуля останется лишь X -компонента, которую мы обозначим буквой A . Итак, эти naive рассуждения приводят к величине

$$\hat{A} = -\frac{x}{|x|} = -\text{sgn } x. \quad (2.2)$$

Перед тем, как проверить, коммутирует ли A из (2.2) с гамильтонианом

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{|x|}, \quad (2.3)$$

отметим одно важное обстоятельство. Точка $X = 0$ не входит в область определения оператора (2.3). Это так называемое регуляризованное кулоновское поле. Оно может быть получено из потенциала

$$u(x, \alpha) = -\frac{1}{|x| + \alpha}$$

при $\alpha \rightarrow 0$. Именно в таком регуляризованном кулоновском поле мы имеем двукратное вырождение, о котором говорилось выше. Итак, мы ниже везде считаем, что $X \neq 0$. С учетом этого замечания имеем

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}] = \delta'(x) = 0, \quad (2.4)$$

т.е. оператор (2.2) действительно является интегралом движения. Запишем задачу на собственные значения и собственные функции оператора (2.2)

$$\hat{A}\psi = A\psi. \quad (2.5)$$

Во-первых, из (2.5) ясно, что $A = \pm 1$, т.к. $A^2 = 1$. Далее, собственному значению $A = +1$ соответствует собственная функция $\psi_R = \theta(x)q(x)$, а собственному значению $A = -1$ - собственная функция $\psi_L = \theta(-x)q(x)$, где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Из непрерывности волновых функций в точке $X = 0$ следует, что $q(+0) = 0$, $q(-0) = 0$. Функции ψ_R и ψ_L должны быть собственными функциями гамильтониана (2.3) при $x \neq 0$, и поэтому $q(x) = q(-x)$. Из финитности движения следует, что $q(\infty) = q(-\infty) = 0$. Базису (ψ_R, ψ_L) соответствует полный набор операторов $(\hat{\mathcal{H}}, A)$. Качественный график функций ψ_R и ψ_L изображен на рис. 2 (число узлов, конечно, зависит от номера уровня).

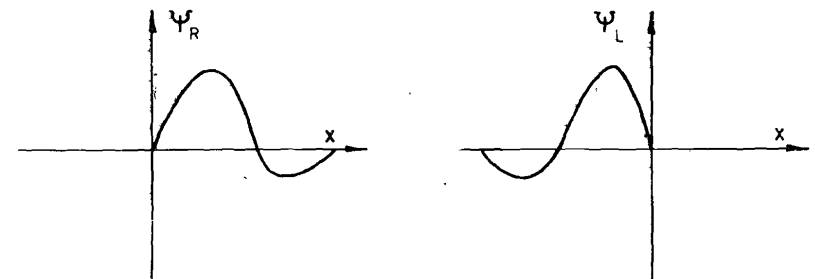


Рис. 2

Есть и другой, альтернативный набор $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{S})$, где \hat{S} - оператор четности. Этому набору соответствует базис $(\psi^{(+)}, \psi^{(-)})$:

$$\psi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R + \psi_L), \quad \psi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R - \psi_L). \quad (2.6)$$

Операторы \hat{A} и \hat{S} антикоммутируют, а коммутатор $[\hat{S}, \hat{A}] = -2\hat{A}$ не приводит к новому интегралу движения.

3. Спекуляция с разделением переменных

Можно ли получить вид оператора (2.2), не обращаясь к трехмерью? Заметим, что в квантовой механике уравнение Шредингера для атома водорода поддается разделению переменных в параболических координатах. Пользуясь этим обстоятельством, можно вывести явный вид \hat{X} -проекции оператора \hat{A}^{-1} . Таким же образом можно получить A_x и A_y , если "ориентировать" параболические координаты вдоль осей x и y соответственно.

В этом параграфе мы приводим спекулятивные соображения, заменяющие метод разделения переменных в случае одномерья. Начнем с того, что для задания положения частицы в одномерье достаточно задать модуль координаты X и ее знак. Такой способ аналогичен заданию положения точки в двумерье с помощью полярных координат. Координаты $|x|$ и $\text{sgn } x$ независимы. Существует ли в таком же случае одномерный аналог параболических координат? В двумерье параболические координаты, "ориентированные" вдоль оси X , имеют вид

$$\mu = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} + x), \quad \nu = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} - x).$$

В пределе $y \rightarrow 0$ отсюда имеем

$$\mu = \theta(x)|x|, \quad \nu = \theta(-x)|x|. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что

$$\mu + \nu = |x|, \quad \mu - \nu = x. \quad (3.2)$$

В отличие от координат $|x|$ и $\text{sgn } x$, координаты (3.1) нельзя считать независимыми. Если $\mu \neq 0$, то $\nu = 0$, и наоборот, если $\nu \neq 0$, то $\mu = 0$ (см. рис. 3). Далее, произведение $\mu\nu = 0$.

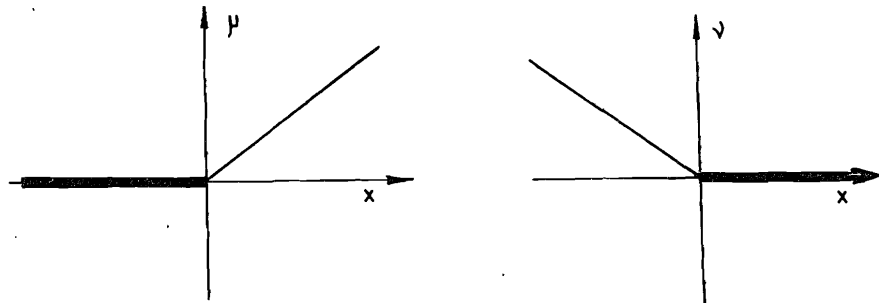


Рис. 3

При $x \neq 0$ справедливо тождество

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \theta(x) \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \theta(-x) \frac{\partial^2\psi}{\partial\nu^2}. \quad (3.3)$$

Из (3.2) следует, что

$$\theta(x) = \frac{\mu}{\mu + \nu}, \quad \theta(-x) = \frac{\nu}{\mu + \nu}$$

и поэтому формулу (3.3) можно представить в терминах координат μ и ν :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{\mu}{\mu + \nu} \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \frac{\nu}{\mu + \nu} \frac{\partial^2\psi}{\partial\nu^2}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu + \nu} \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{\mu + \nu} \frac{\partial^2\psi}{\partial\nu^2} - \frac{1}{\mu + \nu} \psi = E\psi. \quad (3.5)$$

Представим функцию ψ в виде произведения $\psi_1(\mu)\psi_2(\nu)$ и будем действовать в духе метода разделения переменных. Тогда вместо (3.5) получаются два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} \mu\psi_1'' + 2E\mu\psi_1 + \psi_1 &= -\lambda\psi_1, \\ \nu\psi_2'' + 2E\nu\psi_2 + \psi_2 &= \lambda\psi_2, \end{aligned}$$

в которых параметр λ - это константа разделения. Исключая из этих уравнений энергию E , приходим к уравнению

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi,$$

где оператор \hat{A} имеет вид

$$\hat{A} = -\frac{\mu\nu}{\mu + \nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} \right) + \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu}. \quad (3.6)$$

Теперь, вспомнив, что

$$\frac{\mu\nu}{\mu + \nu} = |x| \theta(x) \theta(-x) = 0$$

и

$$(\mu - \nu)(\mu + \nu)^{-1} = \text{sgn } x,$$

приходим к формуле (2.2).

Итак, если не обращать внимания на некорректность математических операций, разделяющих формулы (3.5) и (3.6), то можно считать,

что в одномерье есть метод, заменяющий метод разделения переменных в параболических координатах и приводящий к тому же результату (2.2), что и наивная точка зрения, принятая в параграфе 2.

4. Разделение переменных и сингулярно-симметричная модель

Из (2.4) следует, что оператор (2.2) коммутирует с \hat{H} при любом потенциале $U(x)$, а не только в случае кулоновского поля. Как это понять? Во-первых, $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$ не при любом, а только при сингулярном в начале координат потенциале, т.к. в противном случае области $x > 0$ и $x < 0$ связаны, и точку $x = 0$ нельзя не учитывать. При этом "работает" сингулярная функция $\delta'(x)$, и коммутация нарушается. Во-вторых, $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$ для любого сингулярного потенциала, так как при этом точка $x = 0$ исключается из рассмотрения. Итак, оператор (2.2) является интегралом движения для любого сингулярного потенциала. Как это объяснить с точки зрения изложенного в предыдущем параграфе метода?

Рассмотрим потенциал

$$U(x) = -\frac{1}{|x|} + G(|x|). \quad (4.1)$$

Здесь $G(|x|)$ — несингулярная при $x = 0$ функция, например, $G = |x|$ или $G = x^2$. На языке введенных выше координат μ и ν для уравнения Шредингера имеем

$$-\frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} - \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \nu^2} - \psi - (\mu + \nu) G(\mu + \nu) \psi = (\mu + \nu) E \psi. \quad (4.2)$$

Из равенства $\mu\nu = 0$ следует, что

$$(\mu + \nu) G(\mu + \nu) = \mu G(\mu) + \nu G(\nu). \quad (4.3)$$

Это свойство легко доказать, разлагая функцию $G(\mu + \nu)$ в ряд и учитывая, что

$$(\mu + \nu)^n = \mu^n + \nu^n.$$

Из (4.3) следует, что переменные в (4.2) разделяются. Легко показать, что при этом вместо формулы (3.6) мы приходим к результату

$$A = -\frac{\mu\nu}{\mu + \nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \right) + \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} + \frac{4\mu\nu}{\mu + \nu} G(\mu) + \frac{4\mu\nu}{\mu + \nu} G(\nu).$$

Так как $\mu\nu = 0$, то мы приходим опять к интегралу движения (2.2). Итак, метод разделения переменных не противоречит тому, что оператор (2.2) является интегралом движения для любого сингулярного потенциала.

5. Метод Хиллерааса

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о скрытой симметрии одномерного атома водорода. В трехмерье скрытая симметрия атома водорода выявляется при переходе к импульсному представлению II' . При этом приходится иметь дело с интегральным уравнением, т.к. модулю радиус-вектора $\vec{\Sigma}$ соответствует в импульсном представлении не дифференциальный, а интегральный оператор. То же самое справедливо в отношении величины $(x|^{1/5}$. И все же, нет ли возможности описывать атом водорода в импульсном представлении не интегральным, а дифференциальным уравнением? Понятно, что для этого нужно провести ряд манипуляций в исходном уравнении Шредингера в надежде получить из него уравнение, в которое входили бы только члены $\vec{\Sigma}$, $\vec{\Sigma}^2$, $\vec{p}\vec{\Sigma}$ и т.д., т.е. члены, к которым применим известный анзац

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \rightarrow \vec{p}, \quad \hat{\Sigma} = i\hbar \vec{\nabla}_p = \vec{\Sigma}, \quad (5.1)$$

переводящий физику из координатного представления в импульсное. Нужный трюк в трехмерье был придуман до того, как была открыта скрытая симметрия атома водорода III' . В применении к одномерью этот трюк сводится к следующему.

Умножим уравнение Шредингера

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2} - \frac{1}{|x|} \right) \psi = E \psi$$

на $2|x|$ и приведем его к виду

$$|x| (\hat{p}^2 - 2E) \psi = 2\psi. \quad (5.2)$$

Поддействуем на уравнение (5.2) слева оператором

$$\hat{Q} = (\hat{p}^2 - 2E) |x| (\hat{p}^2 - 2E)$$

и перейдем от $\psi(x)$ к новой функции

$$\chi(x) = (\hat{p}^2 - 2E) \psi(x).$$

Тогда вместо (5.2) получим уравнение

$$(\hat{p}^2 - 2E)|x|(\hat{p}^2 - 2E)|x| \chi(x) = 4\chi(x). \quad (5.3)$$

Далее, легко убедиться, что

$$|x| \hat{p}^2 - \hat{p}^2 |x| = 2i \operatorname{sign} x - 2\delta(x).$$

Отсюда следует, что

$$|x|(\hat{p}^2 - 2E)|x| = (\hat{p}^2 - 2E)x^2 - 2i\hat{p}x. \quad (5.4)$$

Учитывая (5.4), получаем вместо (5.3) уравнение

$$[(\hat{p}^2 - 2E)^2 x^2 + 2i(\hat{p}^2 - 2E)\hat{p}x] \chi(x) = 4\chi(x).$$

Теперь можно использовать анзац (5.1). Если от $\chi(x)$ перейти к ее фурье-образу $\Phi(p)$, связанному с фурье-образом $a(p)$ волновой функции $\psi(x)$ соотношением

$$\Phi(p) = (p^2 - 2E)a(p), \quad (5.5)$$

то на этом пути мы приходим к дифференциальному уравнению

$$(p^2 - 2E)^2 \frac{d^2 \Phi}{dp^2} + 2(p^2 - 2E)p \frac{d\Phi}{dp} + 4\Phi = 0. \quad (5.6)$$

Мы получили уравнение второго порядка. Это говорит о том, что в сравнении с изначальным уравнением (5.2) — тоже второго порядка — мы ничего не потеряли и вместе с тем не приобрели новой нефизической информации.

В литературе известен также подход, в котором вместо (5.6) получаются два дифференциальных уравнения первого порядка^{/12/}. Несмотря на простоту и элегантность, этот подход не является последовательным, т.к. основывается на анзаце

$$|x| \rightarrow \begin{cases} i \frac{d}{dp} & , x > 0 \\ -i \frac{d}{dp} & , x < 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Ясно, что правило (5.7) законно только в одном случае. Рассмотрим функции $R(x)$ и $L(x)$, такие, что $R(x) = 0$ при $x < 0$ и

$L(x) = 0$ при $x > 0$. Тогда и только тогда легко доказать, что

$$\langle R | x | R \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}^*(p) \left[i \frac{d}{dp} \right] \tilde{R}(p) dp$$

$$\langle L | x | L \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}^*(p) \left[-i \frac{d}{dp} \right] \tilde{L}(p) dp,$$

и поэтому справедливо (5.7). Под $\tilde{R}(p)$ и $\tilde{L}(p)$ принимаются фурье-образы функций $R(x)$ и $L(x)$. На любом другом классе функций трюк с преобразованием (5.7) не проходит. Таким образом, в этом подходе заранее неявно предполагается, что решения должны быть из класса $R(x)$ и $L(x)$ и только из этого класса. Поэтому не удивительно, что указанный подход приводит к весьма странным выводам об отсутствии в одномерном атоме водорода состояний с данной четностью и о правилах суперотбора^{/13/}.

6. Скрытая симметрия $O(2)$

Уравнение (5.6) кажется на первый взгляд более сложным, чем уравнение Шредингера (5.2). Но это все не так. Есть замечательная подстановка, которая сильно упрощает уравнение (5.6). Мы имеем в виду подстановку^{/5/}:

$$p = p_0 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} ; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi ; \quad p_0 = \sqrt{-2E}, \quad (6.1)$$

которая устанавливает взаимно-однозначное соответствие между прямой $(-\infty < p < \infty)$ и окружностью радиуса P_0 :

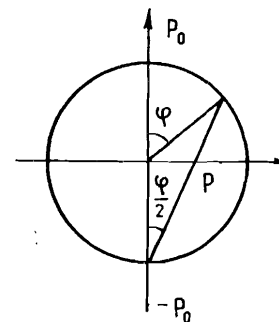


Рис. 4

Эта подстановка есть одномерный аналог стереографической проекции, используемой в теории атома водорода¹⁴. Введем обозначение $\Phi(p) = G(\varphi)$. Из (6.1) следует, что

$$\frac{d}{d\varphi} = \frac{p^2 + p_0^2}{2p_0} \frac{d}{dp}. \quad (6.2)$$

Учитывая (6.2), переводим уравнение (5.6) на язык переменной φ :

$$\frac{d^2 G}{d\varphi^2} + \frac{1}{p_0^2} G = 0. \quad (6.3)$$

Мы видим, что движение частицы в одномерном кулоновском поле равносильно равномерному движению частицы по окружности радиуса p_0 . Уравнение (6.3) имеет два независимых решения ($n = 1, 2, \dots$):

$$G_n^{(R)} = C \cdot e^{-in\varphi}, \quad G_n^{(L)} = C \cdot e^{in\varphi}, \quad (6.4)$$

описывающих вращение по и против часовой стрелке соответственно. Энергетический спектр описывается знаменитой формулой Бора

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Другой эквивалентный базис — это функции

$$G_n^{(+)} = C \cdot \cos n\varphi, \quad G_n^{(-)} = C \cdot \sin n\varphi. \quad (6.6)$$

В каждом из состояний (6.6) наряду с энергией имеет определенное значение и четность \mathcal{S} . Действительно, инверсия $X \rightarrow -X$ равносильна инверсии $p \rightarrow -p$, а последняя, согласно (6.1), эквивалентна инверсии $\varphi \rightarrow -\varphi$.

Состояния (6.4) являются собственными функциями генератора группы $O(2)$, т.е. (с точностью до постоянного множителя) оператора

$$\hat{L} = -\frac{i}{n} \frac{d}{d\varphi}, \quad (6.7)$$

причем функциям $G_n^{(R)}$ и $G_n^{(L)}$ соответствуют собственные значения (-1) и $(+1)$. В задаче о равномерном движении по окружности оператор (6.7) играет фундаментальную роль, т.к. объясняет двукратное вырождение спектра. Иначе говоря — это интеграл движения, ответственный за скрытую симметрию $O(2)$. Важно, что оператор (6.7) однознач-

но определяет явный вид функций (6.4). Ясно, что оператор (6.7) должен быть связан с оператором Рунге-Ленца. Выясним характер этой связи.

Начнем с уравнений

$$\hat{L} G_n^{(R)} = -G_n^{(R)}, \quad \hat{L} G_n^{(L)} = G_n^{(L)}. \quad (6.8)$$

Перейдем от переменной φ к переменной p . Для этого введем функции $\alpha_n^{(R)}(p)$ и $\alpha_n^{(L)}(p)$ согласно формулам

$$G_n^{(R)} = (p^2 + p_0^2) \alpha_n^{(R)}(p), \quad G_n^{(L)} = (p^2 + p_0^2) \alpha_n^{(L)}(p).$$

Тогда уравнения (6.8) можно представить в виде

$$\hat{A} \alpha_n^{(R)} = -\alpha_n^{(R)}, \quad \hat{A} \alpha_n^{(L)} = \alpha_n^{(L)},$$

где новый оператор \hat{A} определяется следующим образом:

$$\hat{A} = (p^2 + p_0^2)^{-1} \hat{L} (p^2 + p_0^2).$$

Из (6.1) следует, что

$$\hat{L} = -\frac{i}{2} \frac{p^2 + p_0^2}{p_0 n} \frac{d}{dp},$$

и поэтому

$$\hat{A} = -\frac{i}{2p_0 n} \frac{d}{dp} (p^2 + p_0^2). \quad (6.9)$$

Этот оператор и есть аналог интеграла движения Рунге-Ленца.

Переведем представленные выше простые и красивые результаты на менее удобный язык координатного представления. С технической точки зрения здесь важна формула

$$e^{in\varphi} = (-1)^n \left(\frac{p - ip_0}{p + ip_0} \right)^n.$$

Из этой формулы следует, что

$$a_n^{(L)}(p) = C \cdot (-1)^n \left(\frac{p - ip_0}{p + ip_0} \right)^n \frac{1}{p^2 + p_0^2}$$

$$a_n^{(R)}(p) = C \cdot (-1)^n \left(\frac{p + ip_0}{p - ip_0} \right)^n \frac{1}{p^2 + p_0^2}$$

Фурье-образы этих функций вычисляются методом вычетов. Приведем окончательный результат

$$\psi_n^{(L)} = \cos x + \theta(-x) \psi(x), \quad \psi_n^{(R)} = \cos x + \theta(x) \psi(x), \quad (6.10)$$

где функция $\psi(x)$ выражается через присоединенные полиномы Лагерра:

$$\psi(x) = x L_n^1 \left(\frac{2|x|}{n} \right) e^{-|x|/n}$$

Отсюда сразу получаются результаты Лаудона^[3], если вместо (6.10) выбрать базис (6.6) с определенной четностью.

Вернемся теперь к оператору (6.9). Согласно анализу (5.1),

$$\hat{A} = \frac{x}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \epsilon x. \quad (6.11)$$

Мы начнем с уравнения (5.2), которое можно записать и так:

$$\hat{h} \psi = 2\psi,$$

где оператор \hat{h} имеет вид

$$\hat{h} = -|x| \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2\epsilon \right). \quad (6.12)$$

Как видно, оператор \hat{A} выражается через оператор \hat{h} :

$$\hat{A} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \cdot \hat{h}. \quad (6.13)$$

Операторы \hat{A} и \hat{h} коммутируют

$$[\hat{A}, \hat{h}] = -\frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x \hat{h} - \hat{h} \operatorname{sgn} x) \hat{h} = 0,$$

и поэтому они имеют общие собственные функции (6.10). На этих функциях $\hat{h} = 2$, а поэтому (6.13) трансформируется в (2.2).

Заключение

Итак, что важнее - скрытая симметрия или сингулярность? Мы показали, что язык скрытой симметрии имеет несомненное преимущество. Скрытая симметрия не только объясняет факт двукратного вырождения сам по себе, она объясняет вид спектра (6.5), вид волновых функций (6.4) и (6.10), симметричное "происхождение" интеграла движения (6.11) и условие, при котором (6.11) переходит в (2.2).

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, Наука, М. 1977.
2. Avakian M., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M., Phys.Lett. A, 1987, 124, 233.
3. Loudon R. Amer. J.Phys., 1959, 27, 649.
4. Andrews M. Amer. J. Phys., 1979, 44, 1064.
5. Davtyan L.S., Pogosyan A.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M. J. Phys. A, 1987, 20, 2765.
6. Boya L.J., Kmiecik M., Bohm A. Phys. Rev. A, 1988, 37, 3567.
7. Kylleraas E. Z: Phys. 1932, 74, 216.
8. Englefield M.J. Group Theory and The Coulomb Problem. Wiley-Interscience New-York Sydney Toronto, 1972.
9. Lambert D., Kibler M., J. Phys. A, 1988, 21, 307.
10. Davtyan L.S., Mardoyan L.G., Pogosyan G.S., Sissakian A.M., Ter-Antonyan V.M., J.Phys. A, 1987, 20 6121.
11. Fock V. Z.Phys. 1935, 98, 145.
12. Nunez Yepez H., Vargas C., Sales Brito A., Eur. J.Phys., 1987, 8, 189.
13. Nunez Yepez H., Vargas C., Sales Brito A., J. Phys. A, 1988, 21, L651.
14. Bander M., Itzykson G. Rev. Moder Phys., 1966, 38, 330, 346.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1988 года.