сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-916

Н.В.Махалдиани

ДИНАМИКА ПОЛЕЙ ЧИСЕЛ И ПРОБЛЕМА КОМПАКТИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВА В ЕДИНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЕЙ И СТРУН

1988

"Современная физика, как мы увидим позднее, вновь стоит перед необходимостью критического пересмотра геометрических представлений применительно к микромиру".

Д.И.Блохинцев [1]

"I would not be too surprised if discrete mod-p mathematics and p-adic numbers would eventually be of use in the building of models for very small phenomena."

Raul Bott [2] *

В основе современных моделей единых теорий всех видов материи и взаимодействий лежат протяженные частицы, струны [4], мембраны [5] и гипотезы об изменении размерности пространства при переходе от планковских масштабов к масштабу электрослабых взаимодействий.

Для моделей релятивистской струны и вообще для моделей протяженных частиц существует максимальная температура [6]. Эта температура для моделей замкнутых (супер) струн достижима — плотность энергии в критической точке конечна. Спрашивается, что происходит при дальнейшем увеличении энергии системы? В аналогичном случае адронной струны, при максимальной температуре, адронная струна "тает" (натяжение струны зануляется), кварки и глюоны высвобождаются, происходит переход из адронной фазы в кварк-глюонную фазу** [7].

---

* *Развитию математического анализа суперсимметричных теорий над общими числовыми полями положено начало в работе* [3].

** *Заметим, что критической температуре деконфайнмента $T \simeq 200$ МэВ соответствует адронный масштаб 1 фм. В явлении высокотемпературной сверхпроводимости участвуют сильновзаимодействующие электроны, поэтому представляет интерес применить методы теории сильной связи. Если переход в сверхпроводящую фазу связан с перекрытием "электронных мешков", то, следуя аналогии с адронами, критической температуре $T \sim 100$ K° будет соответствовать масштаб мешка $\sim 10^{-3}$ см. Но прежде чем доверять таким оценкам, надо учесть характерные особенности структуры сверхпроводников, квазидвумерность, плотность электронов и т.д.*

В работах [8-29, 60-66] обсуждается интересная возможность описания физических систем на микроскопических масштабах на основе нестандартных расширений поля рациональных чисел [30-33]. В работе [11] предлагается общая идея строить математические модели физических полей на основе произвольных полей чисел. Динамика должна обладать инвариантностью относительно замены поля чисел, что является обобщением репараметризационной инвариантности теории. Основное состояние может соответствовать определенному полю чисел. При изменении внешних условий — температуры, плотности, масштаба (разрешающей способности прибора) — может происходить фазовый переход из одного поля чисел в другое.

Комплексные расширения числовых полей полезны для анализа уравнений классической физики (например, для описания гидродинамики несжимаемой жидкости). Уравнения квантовой физики существенно опираются на комплексный анализ (квантовые амплитуды вероятности комплекснозначны). Комплексные расширения числовых полей полезны для более экономного описания многомерных теорий полей и струн [34-42]. Число действительных составляющих комплексного, кватернионного и октавного чисел связано с критической размерностью пространства, в которой определены эти теории*. Нелинейные условия связи разрешаются в твисторной параметризации координат и импульсов.

Алгебраическое расширение поля действительных чисел приводит к полю комплексных чисел. Теория комплексных аналитических функций лежит в основе теории двумерных интегрируемых нелинейных уравнений (задача Римана, $\bar{\partial}$-проблема [43, 44]). Алгебраические расширения p-адических числовых полей многомерны, поэтому можно надеяться, что соответствующие построения окажутся полезными в исследовании многомерных интегрируемых систем [24].

Может оказаться, что для моделей замкнутых струн высокотемпературной фазой является твисторная фаза. В низкотемпературной фазе имеет место конфайнмент твисторов в струны. Параметром порядка может служить координата струны, которая в низкотемпературной фазе принимает ненулевые наблюдаемые значения. Аналогичная картина может иметь место в синглетонной формулировке квантовой электродинамики [45] и в многочисленных моделях преонов, ришонов, терронов и т.д. [46-47].

1. В данной работе мы обращаем внимание на связь проблемы компактификации пространства (см., например, [48]) и поленезависимой формулировки теории. Компактные пространственные степени свободы можно связать с конечными числовыми полями, некомпактные — с действительными числовыми полями. Если разрешающая способность прибора сильнее, чем характерный размер компактного пространства, то это пространство представляется некомпактным. Следовательно, с изменением масштаба можно переходить от описания в рамках одного числового поля к описанию в рамках другого числового поля. На это можно смотреть так же, как на фазовый переход из одной числовой фазы в другую вследствие измерения*. Так обстоит дело в формулировке теории поля на решетке [50-52]. Здесь обычно стартуют из модели пространства с конечным набором точек, расположенных в объемлющем евклидовом пространстве с координатами, принимающими значения в множестве целых чисел. Требование периодических условий, накладываемое на динамические степени свободы, эквивалентно рассмотрению модели пространства в виде дискретного гипертора. Координаты узлов решетки при этом принимают значения в конечных числовых полях. В окрестности критической точки фазового перехода второго рода характерный масштаб длины много больше шага решетки a и много меньше длины решетки L, $L \gg \xi \gg a$ (промежуточная асимптотика), поэтому как дискретная, так и непрерывная формулировки теории описывают одну универсальную теорию.

Компактная угловая переменная ϕ принимает значения в $[0, 2\pi)$. Можно перейти к переменной $h = (\phi/2\pi)p$, $h \in [0, p)$. При этом два значения h и h' сравнимы (равнозначны): $h = h' \pmod p$, если $h - h' = kp$, k — целое. Если ограничиться лишь целыми значениями $h = 0, 1, \ldots, p-1$, то при достаточно больших p можно хорошо приблизить значения $\phi = (2\pi/p)h$. Следовательно, исходную компактную непрерывную переменную можно заменить переменной h, принимающей значения в конечном числовом кольце F_p**.

Так обстоит дело, например, при исследовании калибровочных теорий на решетке, когда заменяем калибровочную группу $U(1)$ на конечную группу Z_p. Переходу к непрерывной компактной переменной соответствует предел $p \to \infty$. Неабелевы компактные группы $SU(N)$, представляющие интерес для единых теорий полей, также можно приблизить конечными неабелевыми подгруппами [53, 54]. Следовательно, представляет интерес рассматривать как координаты (внешнее пространство), так и поля (внутреннее пространство) из разных числовых полей и более общих групповых многообразий.

Из-за конечной точности измерения данные эксперимента представляются в множестве рациональных чисел Q. Анализ результатов естественно приводит к необходимости расширения поля рациональных чисел

* *Отметим, что число кварков 3х6 и лептонов 6 в сумме дают число независимых степеней свободы бозонной струны: 26 - 2 = 24.*

* *Интерпретация процесса измерения в квантовой механике как фазового перехода дана в работе [49].*

** *Для простых значений p F_p является числовым полем.*

до полного поля чисел*. На поле рациональных чисел определены обычная и p-адические метрики. Естественно пополнять поле $\mathbf{O}$ по всем этим метрикам. Пополнение по обычной метрике дает поле действительных чисел $\mathbf{O}_0^{**}$. Пополнения по p-адическим метрикам дают поля p-адических чисел $\mathbf{O}_p$, $p = 2,3,5,...$ Значению $p = 1$ соответствует тривиальная метрика.

Отметим, что в нестандартном анализе[55, 56] производится дальнейшее расширение поля действительных чисел добавлением бесконечно малого числа ϵ. При этом архимедово поле действительных чисел, для которого имеет место аксиома Архимеда (для любых действительных a и b найдется такое конечное целое число N, что $Na > b$), превращается в неархимедово поле нестандартных действительных чисел, т.к., например, неравенство $N\epsilon > a$ не имеет места при конечных N. Представляет интерес распространение методов нестандартного анализа на другие числовые поля.

Действительное число в p-ичном исчислении (обычно рассматривают $p = 2,8,10$ или 16) записывается в виде бесконечного, сходящегося по обычной метрике ряда:

$$T = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_0 + a_{-1} p^{-1} + ... ,$$

где $a_i = 0,1,..., p-1$, p-адическое число записывается в виде бесконечного, сходящегося в p-адической метрике ряда

$$t = a_{-n} p^{-n} + a_{-n+1} p^{-n+1} + ... + a_0 + a_1 p^1 + ...$$

Подмножеству рациональных чисел соответствует разложение в виде конечного ряда***. Действительные и p-адические числа пересекаются на множестве рациональных чисел. Естественно ввести объединение действительных и p-адических чисел, рассмотрев разложение

$$F_p = ... + a_{-n} p^{-n} + ... + a_0 + ... + a_n p^n + ... \qquad (1)$$

При таком представлении чисел имеется некоторая неопределенность в выделении конечного рационального отрезка чисел. Если параметру

**Числовое поле – это множество с заданными на нем операциями сложения и умножения, относительно которых это множество является коммутативной группой.*

***Часто применяются обозначения **R** или $\mathbf{O}_\infty$. Последнее обозначение оправдано тем, что в некотором смысле p-адическая норма лежит между тривиальной и обычной нормами.*

**** Отметим, что одно и то же рациональное число, в зависимости от значения p, может представляться в виде как конечной, так и бесконечной периодической дроби. Например, $(5/7)_{10} = 0,(714285)$, $(5/7)_7 = 0,5$.*

p придать смысл параметра разрешающей способности прибора (скажем, переданный импульс), то представление (1) указывает на то, что для сильной разрешающей способности (большие переданные импульсы, малые расстояния) существенна p-адическая структура числа*. "Окно рациональных чисел" с увеличением p передвигается вправо. Для слабой разрешающей способности (малые p) существенна действительная часть числа, окно рациональных чисел с уменьшением p передвигается влево.

Каждое рациональное число x относительно заданного простого числа p имеет единственное представление:

$$x = p^n \frac{a}{b}, \qquad (2)$$

где a, b и p взаимно простые, а n просто целое числа.

Над полем рациональных чисел существует важное тождество, связывающее обычную и p-адические нормы (и, следовательно, согласованные с нормами метрики):

$$\prod_{p \geq 0} |x|_p = 1, \qquad (3)$$

где $|\ |_0$ — обычная норма:

$$|x|_0 = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \\ -x, & x < 0; \end{cases}$$

$|\ |_1$ — тривиальная норма:

$$|x|_1 = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0; \end{cases}$$

$|\ |_p$, $p = 2,3,5,...$, p-адические нормы**:

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ p^{-n}, & x \neq 0, \end{cases} \qquad (4)$$

где n определено в соотношении (2).

**В этих рассуждениях наша интуиция опирается на возможность аналитического продолжения в (1) по p, множество $\{F_p(t) = \Sigma a_i t^i\}$ представляет собой поле степенных рядов над полем вычетов по модулю p, $a_i \in F_p$.*

***Заметим, что относительно тривиальной нормы поле рациональных чисел является полным, т.к. ни одна бесконечная сумма рациональных чисел по тривиальной норме не сходится и нечем пополнить $\mathbf{O} = \mathbf{O}_1$.*

Последовательность $(a_0, a_1, \dots, a_p, \dots) \equiv a$, где $a_i \in \mathbf{O}_i$, назовем аделем, если существует такое конечное целое N, что a_q — целое при $q > N$. Другими словами, адель содержит лишь конечное число нецелых компонент *. Множество всех аделей составляет кольцо A. Операция покомпонентного сложения аделей определяет аддитивную группу A^+. На множестве A определяется покомпонентное умножение. Элементы A, для которых существует обратный элемент относительно умножения, называются иделями. Для иделя $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \dots)$, $\lambda_i \neq 0$, $|\lambda_p|_p = 1$ при $p > N$. Множество иделей образуют группу относительно умножения. Норма на аделях определяется так:

$$|a|_A = \prod_{p \geq 0} |a_p|_p . \tag{5}$$

Адель $r = (r, r, \dots, r, \dots)$, где $r \in \mathbf{O}$, называется собственным. Собственный идель имеет единичную норму (5), (3).

2. Для определения операторов дробного интегрирования и дифференцирования — фрактального исчисления [48] вводят [58] функцию f_α:

$$f_\alpha = \begin{cases} \dfrac{\Theta(x)}{\Gamma(a)} |x|^{\alpha-1}, & \alpha > 0, \\ f^{(n)}_{\alpha+n}, & \alpha \leq 0,\ \alpha + n \geq 0,\ n - \text{целое}. \end{cases}$$

Для свертки

$$f_\alpha * f_\beta = \int_0^x dy f_\alpha(y) f_\beta(x-y) \tag{6}$$

имеет место соотношение

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta} . \tag{7}$$

Действительно,

$$f_\alpha * f_\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x dy |y|^{\alpha-1} |x-y|^{\beta-1} =$$

$$= \frac{|x|^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) = \frac{|x|^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = f_{\alpha+\beta} .$$

---

* *В обычное определение аделя* [57,32] *не включают элемент* a_1.

Оператор $D_x^{-\alpha} = f_\alpha *$ является оператором дробного интегрирования при $\alpha > 0$ и дробного дифференцирования при $\alpha < 0$.

Фрактальное исчисление удобно представить в форме Адамара [59]:

$$_0D_x^{-\alpha} \phi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x dy |x-y|^{\alpha-1} \phi(y) = \tag{8}$$

$$= \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 dt |1-t|^{\alpha-1} \phi(xt) .$$

Рассмотрим примеры. Пусть $\phi = 1$,

$$_0D_x^{-\alpha} 1 = \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \alpha \geq 0. \tag{9}$$

Для производной $-\alpha = \beta > 0$, $n - \beta \geq 0$

$$D^{-(n-\beta)+n} \phi = D^{-(n-\beta)} \phi^{(n)} = D^n D^{-(n-\beta)} \phi . \tag{10}$$

Другая возможность определения производной — это аналитически продолжить определение интеграла на отрицательные значения α:

$$D_x^\beta \phi = \frac{|x|^{-\beta}}{\Gamma(-\beta)} \int_0^1 dt \frac{\phi(xt)}{|1-t|^{\beta+1}} . \tag{11}$$

Легко видеть, что для $\phi(x) = x^k$ ответы, полученные по формулам (10) и (11), совпадают. В качестве следующего примера рассмотрим дуальную амплитуду Венециано, выведем формулу, связывающую бета-функцию с гамма-функциями:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 du\, dv\, \delta(1-v-u) v^{\alpha-1} u^{\beta-1} =$$

$$= \int_0^1 du (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} = \Gamma(\alpha) D_1^{-\alpha} |u|^{\beta-1} = \tag{12}$$

$$= \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) D_1^{-\alpha} D^{-(\beta-1)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} .$$

При этом мы использовали соотношения (9) и (7).

Фрактальное исчисление естественно переносится на p-адический случай. Для этого полезно вспомнить, что симметризованная по всем каналам амплитуда Венециано записывается в форме/4/ :

$$B_s(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |1-x|^{\alpha-1}\, |x|^{\beta-1} = \tag{12'}$$

$$= B(\alpha,\beta) + B(\beta,\gamma) + B(\gamma,\alpha), \quad \alpha+\beta+\gamma = 1,$$

где интеграл берется по всему полю действительных чисел. Мы примем определение

$$D_x^{-\alpha}\,\phi = \frac{|x|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{O_p} dt\, |1-t|^{\alpha-1}\, \phi(xt), \tag{13}$$

где $|\ |$ и Γ — p-адическая норма и Г-функция (18) соответственно. Отметим, что из определения (13) следует определение, данное в работе/33/ . Действительно, после замены $t = z/x$ получим

$$D_x^{-\alpha}\,\phi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{O_p} dz\, |x-z|^{\alpha-1}\, \phi(z). \tag{14}$$

Многомерное обобщение фрактального исчисления дается следующей интерпретацией формулы (13) :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad |x|^{\alpha} = |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n}$$

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n), \quad dt = dt_1 dt_2 \dots dt_n,$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in O_p^n, \quad \alpha_i \in \mathbf{C}.$$

Для p-адической амплитуды Венециано — бета-функции аналогично (12) получим

$$B_p(\alpha,\beta) = \int_{O_p} dt\, |1-t|^{\alpha-1}\, |t|^{\beta-1} = \frac{\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(\beta)}{\Gamma_p(\alpha+\beta)}.$$

Рассмотрим пример p-адического интеграла:

$$\int dt\,\phi(t) = \sum_k \int_{|x|=p^{-k}} dx\ \phi(x).$$

Если $|x| = p^{-k}$, то

$$x = p^k (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)$$

$$a_0 = 1, 2, \dots, p-1, \quad a_i = 0, 1, \dots, p-1, \quad i \ge 1.$$

Примем определение/61/

$$\int_{|x|=p^{-k}} dx\,\phi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p^N} \frac{1}{p^k} \sum_{\{a_i\}} \phi(p^k(a_0 + a_1 p + \dots + a_{N-1} p^{N-1})),$$

что для случая $\phi = 1$ согласуется с обычной нормировкой инвариантной меры dx,

$$dx = d(x+a), \quad d(ax) = |a|_p\, dx, \qquad \int_{|x|\le 1} dx = 1,$$

т.к.

$$\int_{|x|=p^{-k}} dx = \int_{|x|\le p^{-k}} dx - \int_{|x|\le p^{-k-1}} dx = p^{-k}(1-p^{-1}) \int_{|x|\le 1} dx.$$

В частности, для $\phi(x) = \phi(|x|)$ получим/60/ :

$$\int_{|x|=p^{-k}} dx\,\phi(|x|) = (1-p^{-1})\, p^{-k}\, \phi(p^{-k}).$$

Для $\phi(x) = \sum a_n x^n$ имеем

$$\int_{|t|\le 1} dt\,\phi(|t|) = \sum_n a_n (1-p^{-1}) \sum_{k\ge 0} p^{-k(n+1)} = \sum_n a_n p_n, \tag{15}$$

где $p_n = (1 + p^{-1} + \dots + p^{-n})^{-1}$. Если в (15) аналитически продолжить в точку $p = 1$, получим

$$\int_{|t|\le 1} dt\,\phi(|t|) \Rightarrow \sum \frac{a_n}{n+1} = \int_0^1 dt\,\phi(t),$$

где в правой части имеем обычный интеграл. С другой стороны,

$$\int_{|t|\ge 1} dt\,\phi(|t|) = \sum a_n (1-p^{-1}) \sum_{k\ge 0} p^{k(n+1)} = \sum_n a_n Q_n,$$

где $Q_n = (1-p^{-1})/(1-p^{n+1}) = -(p + p^2 + \dots + p^{n+1})^{-1}$, и мы отсуммировали ряд в p-адической норме. Следовательно, для интеграла

$$\int_0^1 dx\,\phi(x)$$

от функции $\phi(x) = \Sigma\, a_n x^n$ можно рассматривать аналитическое продолжение в точку $p = 1$ значений p-адических интегралов

$$\int_{|t| \le 1} dt\,\phi(|t|) \quad \text{и/или} \quad -\int_{|t| \ge 1} dt\,\phi(|t|).$$

Для интеграла по всему полю O_p от рассматриваемой функции в пределе $p \to 1$ получим нулевое значение. Действительно,

$$\int_{O_p} dt\,\phi(|t|) = \int_{|t| \le 1} + \int_{|t| > 1} = -\int_{|t| = 1} = -\phi(1)(1 - p^{-1}).$$

В ненормируемых квантовых теориях поля, например в четырехфермионной теории или гравитации, расходимости на малых расстояниях вызваны полиномиально растущим поведением подынтегрального выражения для диаграмм Фейнмана. Если интегрировать по виртуальным импульсам над полем p-адических чисел, с последующим переходом к $p = 1$, то такие вклады зануляются.

3. Рассмотрим модель скалярного поля, принимающего действительные значения над одномерным p-адическим пространством O_p со свободным действием* :

$$S = \frac{1}{2}\int_{O_p} dx\,\phi(x)\, D_x^{a}\phi = \frac{1}{2}\int_{O_p} du\,\tilde{\phi}(-u)\,|u|^{a}\,\tilde{\phi}(u), \tag{16}$$

где

$$\phi(x) = \int_{O_p} du\,\chi(ux)\,\tilde{\phi}(u).$$

χ — аддитивный характер над O_p,

$$\chi(ux)\,\chi(vx) = \chi((u+v)x), \quad \int \chi(ux)\,dx = \delta(u),$$

$$D^{-a}\chi(ux) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_{O_p} |x-t|^{a-1}\,\chi(ut)\,dt = \frac{1}{\Gamma(a)}\int |t|^{a-1}\,\chi(u(t+x))\,dt = \tag{17}$$

$$= \chi(ux)\,\frac{1}{\Gamma(a)}\int |t|^{a-1}\chi(ut)\,dt = |u|^{-a}\chi(ux).$$

Обобщение на многомерный случай $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in O_p^n$, $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_D) \in R^D$ не составляет труда.

мы воспользовались инвариантностью меры относительно сдвига и определением гамма-функций [32] :

$$\Gamma(a) = \int_{O_p} dt\,|t|^{a-1}\,\chi(t) = \frac{1 - p^{a-1}}{1 - p^{-a}}. \tag{18}$$

С помощью соотношения (17) в пределе $a \to 1$ получим

$$D_x^{-1}\phi = -\frac{p-1}{p\ln p}\int_{O_p} dt\,\ln|x-t|\,\phi(t),$$

если

$$\tilde{\phi}(0) = \int_{O_p} dx\,\phi(x) = 0.$$

При $a = 1$ модель (16) сводится к модели работ [60,61] :

$$\int dx\,\phi(x)\,D_x\phi = \frac{1}{\Gamma(-1)}\int dx\,dy\,\phi(x)\,\phi(y)/|x-y|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(-1)}\int dx\,dy\,[\phi(x) - \phi(y)]^2/|x-y|^2,$$

где $\Gamma(-1) = -\frac{p+1}{p2}$, $\Gamma(1) = 0$. Случай $a = 2$ рассматривался в работе [14]. Основное состояние модели (16) сильно вырождено. Минимальное значение действие принимает при любом постоянном $\phi(x) = \phi_0 = \mathrm{const}$. Условие $\tilde{\phi}(0) = 0$ означает $\phi_0 = 0$. Квантование модели (16) проведем с помощью функционального интеграла

$$Z = \int d\phi\,\exp\{-S[\phi]\}. \tag{19}$$

Для пропагатора в импульсном пространстве имеем

$$\langle \tilde{\phi}(u)\,\tilde{\phi}(v) \rangle = \delta(u+v)/|u|^{a}.$$

В координатном пространстве получим

$$\langle \phi(x)\,\phi(y) \rangle = \int du\,dv\,\chi(ux)\,\chi(vy)\,\langle \tilde{\phi}(u)\,\tilde{\phi}(v) \rangle =$$

$$= \int du\,\chi(u(x-y))/|u|^{a} = \Gamma(1-a)/|x-y|^{1-a}.$$

При $u \in \mathcal{O}$ пропагатор безмассовой частицы $G(u)$, описываемой моделью (16), удовлетворяет тождеству

$$\prod_{p \geq o} G_p(u) = 1, \quad \alpha \neq 1.$$

Рассмотрим динамику частицы, описываемой векторным обобщением модели (16), $\phi \to x^\mu$. Для амплитуды замкнутой траектории, проходящей через N точек, в случае $t \in R$ имеем

$$A(\{x_i\}) = \int_{-\infty}^{\infty} dT \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \ldots \int_{-T/2}^{T/2} dt_N \, \delta(\Sigma t_i - T) \times$$

$$\times v(x_1 t_1; x_2 t_2) v(x_2 t_2; x_3 t_3) \ldots v(x_N t_N; x_1 t_1) = \tag{20}$$

$$= \int dx(t) \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_i \, \delta(x^\mu(t_i) - x_i^\mu)\right) \exp\{-S[x(t)]\} =$$

$$= \int \prod_{j,\mu} \frac{dk_j^\mu}{2\pi} \exp(-i \Sigma k_j^\mu x_j^\mu) \tilde{A}(\{k_j^\mu\});$$

где

$$\tilde{A}(\{k_j^\mu\}) = \int dx(t) \prod_j dt_j \exp(-S + i\Sigma k_j x(t_j)) =$$

$$= \int dx \, V(k_1) \ldots V(k_N) \exp(-S); \tag{22}$$

$V(k) = \int dt \exp(ikx(t))$, — вершинный оператор.

Для уравнения движения получим

$$D_j^\alpha x^\mu - i \sum_j k_j^\mu \delta(t - t_j) = 0, \tag{22}$$

$$|u|^\alpha \tilde{x}^\mu(u) - i \sum_j k_j^\mu \chi(-ut_j) = 0.$$

Последнее равенство должно иметь место для всех u, в частности, при $u = 0$ получаем необходимое условие существования нетривиальных решений:

$$\sum_j k_j^\mu = 0. \tag{23}$$

Интегрирование в (21) по $x(t) = \text{const}$ дает $\delta(\Sigma k_j)$, что обеспечивает соблюдение условия (23). Решим уравнение (22):

$$x^\mu(t) = iD_t^{-\alpha} \Sigma k_j^\mu \delta(t - t_j) =$$

$$= \frac{i}{\Gamma(\alpha)} \sum_j k_j^\mu |t - t_j|^{\alpha - 1}. \tag{24}$$

На решении (24) действие (16) принимает значение

$$S = -\frac{i}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i<j} k_i k_j |t_i - t_j|^{\alpha-1}. \tag{25}$$

Аналогичное рассмотрение имеет место и в p-адическом случае, $t \in \mathcal{O}_p$. Выражения для случая $\alpha = 1$ получаются предельным переходом $\alpha \to 1$ с учетом условия (23) и поведения гамма-функции (18):

$$\Gamma(1 + \epsilon) = \frac{1 - p^\epsilon}{1 - p^{-1}} = -\frac{\epsilon \ln p}{1 - p^{-1}}, \tag{26}$$

$$x^\mu(t) = -i \frac{p-1}{p \ln p} \sum_j k_j^\mu \ln|t - t_j|,$$

$$S[x(t)] = \frac{p-1}{p \ln p} \sum_{i<j} k_i k_j \ln|t_i - t_j|.$$

Заметим, что в действительном случае для получения конечного выражения для действия требуется перенормировка константы связи, тогда как в p-адическом случае в этом нет необходимости. Для амплитуды (21) имеем

$$\tilde{A}(\{k_i^\mu\}) = \int \prod_{j=1}^{N} dt_j \exp\left(-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i<j} k_i k_j |t_i - t_j|^{\alpha-1}\right).$$

В p-адическом случае при $\alpha = 1$

$$\tilde{A}(\{k_i^\mu\}) = \int \prod_{j=1}^{N} dt_j \prod_{i<j} |t_i - t_j|^{\frac{p-1}{p \ln p} k_i k_j}. \tag{27}$$

В координатном представлении получим

$$A(\{x_i^{\mu}\}) = \int \prod_{j=1}^{N} dt_j \int \prod_{j,\mu} \frac{dk_j^{\mu}}{2\pi} \delta(\sum_i k_i^{\mu}) \exp(-i\sum k_j x_j - \frac{1}{2}\sum k_i A_{ij} k_j) =$$

$$= (2\pi)^{-M} \int \prod_{j=1}^{N} dt_j (\det A)^{-D/2} \int \prod_{\mu=1}^{D} d a^{\mu} \exp(\frac{1}{2}\sum (x_i - a)(A^{-1})_{ij}(x_j - a)), \qquad (28)$$

где

$M = D(N+1)$,

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} |t_i - t_j|^{\alpha-1}, & \alpha \neq 1 \\ & \qquad i \neq j \\ -\dfrac{p-1}{p \ln p} \ln |t_i - t_j|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Сформулируем квантовую теорию аделей [64] на примере моделей типа (16). В качестве пространства непрерывных функций рассмотрим функции вида

$$\phi(a) = \prod_{p \geq o} \phi_p(a_p), \qquad (29)$$

где $\phi_p(a_p) = 1$ для $a_p \in Z_p$ и $\phi_p(a_p) = 0$, когда $a_p \bar{\in} Z_p$, начиная с $p > N$. Такие функции называются элементарными функциями на аделях [32]. Произведение (29) сходится и является непрерывной функцией на аделях.

Для определения аделева фрактального исчисления в (13) положим

$$|x| = \prod_{p \geq o} |x_p|_p, \quad \Gamma(\alpha) = \prod_{p \geq o} \Gamma_p(\alpha) = \Gamma_1(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha},$$

$$\Gamma_o(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x|^{\alpha-1} e^{i2\pi x} = (2\pi)^{-\alpha} 2\cos\frac{\pi\alpha}{2}\, \Gamma(\alpha) = \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)} = \prod_{p\geq 2} \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \qquad (30)$$

$$dt = \prod_{p \geq o} dt_p, \quad \phi(x) = \prod_{p \geq o} \phi_p(x_p).$$

Аделеву квантовую теорию получим из выражений (16) заменой (30) и $D_x^{\alpha} \to \sum_{p \geq o} D_{ap}^{\alpha}$.

Если рассматривать функции (29), удовлетворяющие условиям

$\int da_p |\phi_p(a_p)|^2 = 1$,

и, следовательно,

$\int da\, |\phi(a)|^2 = 1$,

то будет иметь место факторизация $S = \sum_{p \geq o} S_p$,

$S_p = \int_{O_p} da_p \phi_p(a_p) D_{ap}^{\alpha} \phi_p$,

$Z = \prod_{p \geq o} Z_p$.

Для рассматриваемой модели имеет место аделева структура

$$Z = \prod_{p \geq o} Z_p = 1,$$

космологическая константа $\Lambda \sim \ln Z$ равняется нулю, т.е. происходит компенсация действительной космологической константы за счет p-адических миров, если импульсы принимают лишь рациональные значения. Действительно,

$$Z_p = \int d\phi\, e^{-\frac{1}{2}\int \phi D^{\alpha} \phi} = \det{}^{-1/2} D^{\alpha} = \prod_u |u|_p^{-\alpha/2},$$

$$Z = \prod_u (\prod_{p \geq o} |u|_p)^{-\alpha/2} = 1, \quad \text{если } u \in \mathbf{O}.$$

4. Вместо постоянной Планка $\hbar$ рассмотрим функцию пространства-времени [48]. Обобщение уравнения Шредингера получим из действия

$$S = \int dt dx^D \{ i \frac{\hbar_1}{2} (\bar{\Psi} \partial_t \Psi - \partial_t \bar{\Psi} \Psi) -$$

$$- \frac{\hbar_2^2}{2m} \nabla \bar{\Psi} \nabla \Psi - \bar{\Psi} V \Psi \}, \qquad (31)$$

где $\hbar_1$ и $\hbar_2$, вообще говоря, разные функции. В предположении, что $\hbar_1$ и $\hbar_2$ постоянны, выбором единиц длины и времени можно положить $\hbar_1 = \hbar_2 = \hbar$.

Действие (31) инвариантно относительно глобального изменения фазы волновой функции

$$\Psi \to e^{-i\alpha}\,\Psi. \qquad (32)$$

Для вывода соответствующего закона сохранения

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \mu = t, \vec{x},$$

достаточно найти вариацию действия при переменных значениях α:

$$\delta S = \int \partial_\mu \alpha \, J^\mu.$$

Легко видеть, что*

$$J^\circ = \hbar_1 \bar{\Psi}\Psi,$$

$$\vec{J} = \frac{i\hbar_2^2}{2m}\left[\,\bar{\Psi}(\vec{\nabla}\Psi) - (\vec{\nabla}\bar{\Psi})\Psi\,\right]. \qquad (33)$$

Я благодарю И.В.Воловича** и О.К.Пашаева за обсуждения р-адических теорий; Б.С. де Витта за обсуждение квантовой теории с переменной $\hbar$ и полезное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д.И. — Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1982.
2. Bott R. — Advances in Mathematics, 1975, 16, p.144.
3. Владимиров В.С., Волович И.В. — ТМФ, 1984, 59, с.3.
4. Green M.B., Schwarz J.H., Witten E. — Superstring Theory. Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1987.
5. Bergshoeff E., Sezgin E., Townsend P.K. — Preprint Trieste IC/87/255,1987.
6. Махалдиани Н.В. — ОИЯИ, Р2-87-916, Дубна, 1987.
7. Cleymans J., Gavai R.V., Suhonen E. — Phys. Rep., 1986, 130, p.217.
8. Volovich I.V. — Class, Quantum Grav., 1987, 4, p.83.
9. Волович И.В. — ТМФ, 1987, 71, с.33.

---

* *Выражения (31) и (33) дают ответ на вопрос Б.С. де Витта об унитарности теории с переменной* $\hbar$.

** *После завершения рукописи данной работы я получил работу* /66/ *по р-адическому обобщению уравнения Шредингера, где также применяется фрактальное исчисление, развитое в работе* /33/.

10. Volovich I.V. — Lett. Math. Phys., 1988, 16, p.61.
11. Volovich I.V. — Preprint CERN-TH, 4781/87, 1987.
12. Владимиров В.С., Волович И.В. — ДАН СССР, 1988, 302, с.320.
13. Aref'eva I.Ya., Dragovic B.G., Volovich I.V. — Phys. Lett. B, 1988, 200, p.512; 209, p.445; 212, p.283; 214, p.339.
14. Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. — In: Proc. Seminar on Quantum Gravity, eds. M.Markov, V.Berezin, V.Frolov. World Scientific, Singopore, 1988.
15. Hannay J.H., Berry M.V. — Physica D, 1980, 1, p.267.
16. Nambu Y. — Preprint Univ. of Chicago EFI 85-52, 1985.
17. Freund P.G.O., Olson M. — Phys. Lett. B, 1987, 199, p.186.
18. Freund P.G.O., Olson M. — Nucl. Phys. B, 297, p.86.
19. Freund P.G.O., Witten E. — Phys. Lett. B, 1987, 199, p.191.
20. Brekke L. et al. — Nucl. Phys. B, 1988, 302, p.365.
21. Marinari E., Parisi G. — Phys. Lett. B, 1988, 203, p.52.
22. Grossman B. — Phys. Lett. B., 1987, 197, p.101.
23. Frampton P.H., Okada Y. — Phys. Rev. Lett., 1988, 60, p.484.
24. Gervais J.L. — Phys. Lett. B, 1988, 201, p.306.
25. Ryzak Z. — Phys. Lett. B, 1988, 208, p.411.
26. Hlousek Z., Spector D. — Coenwll Univ. Preprint CLNS 88/832, 1988.
27. Yamakoshi H. — Phys. Lett. B, 1988, 207, p.426.
28. Alacoque C. et al. — Phys. Lett. B, 1988, 211, p.59.
29. Meurice Y. — Preprint ANL-HEP-PR-87-114, Argonne, 1987.
30. Коблиц Н. — р-адические числа, р-адический анализ и дзета-функции, М.: Мир, 1982.
31. Боревич З.Н., Шафаревич И.Р. — Теория чисел. М.: Наука, 1985.
32. Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятецкий-Шапиро И.И. — Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.
33. Владимиров В.С. — УМН, 1988, 43, с.17.
34. Kugo T., Townsend P. — Nucl. Phys. B, 1983, p.357.
35. Gursey F. — Yale preprint YTP 87-25, 1987; Mod. Phys. Lett. A, 1987, 2, p.967.
36. Foot R., Joshi G.C. — Phys. Rev. D, 1987, 36, p.1169.
37. Fairlie D.B., Manoque C.A. — Phys. Rev. D, 1986, 34, p.1832; 1987, 36, p.475.
38. Shirafuji T. — Prog. Theor. Phys., 1983, 70, p.18.
39. Shaw W.T. — Class. Quantum Grav., 1985, 2, L113; 1986, 3, p.753.
40. Bengtsson I. — Class. Quantum Grav., 1987, 4, p.1143.
41. Волков Д.В., Сорокин Д.П., Ткач В.И. — Препринт ХФТИ 88-31, Харьков, 1988;
Sorokin D.P. et al. — Preprint KFTI 88-59, Kharkov, 1988.
42. Kimura T., Oda I. — Prog. Theor. Phys., 1988, 80, p.1.
43. Mikhailov A.V. — Preprint CERN-TH, 3194/81, 1981.
44. Rodin Yu.L. — Physica D, 1987, 24, p.1.
45. Fronsdal C., Flato M. — Phys. Lett. B, 1986, 172, p.412.

46. 't Hooft G. — In: Recent Developments in Gauge Theories, ed. G.'t Hooft et al., Plenum Press, NY, 1980.
47. Pati J.C. — In: Superstrings, Supergravity and Unified Theories, ed. by G.Furlan et al. World Scientific, Singapore, 1986.
48. Махалдиани Н.В. — ОИЯИ, Р2-87-306, Дубна, 1987.
49. Ne'eman Y. — In: Microphysical Reality and Quantum Formalism A. van der Merwe et al. (eds.) Kluwer Acad. Publishers, 1988.
50. Кройц М. — Кварки, глюоны и решетки. М.: Мир, 1987.
51. Зайлер Э. — Калибровочные теории. М.: Мир, 1985.
52. Махалдиани Н.В. — ОИЯИ, Р2-86-849, Дубна, 1986.
53. Bhanot G., Rebbi C. — Nucl. Phys. B, 1981, 180, p.469.
54. Cabibbo N., Marinari E. — Phys. Lett. B, 1982, 119, p.387.
55. Девис М. — Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.
56. Успенский В.А. — Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987.
57. Вейль А. — Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.
58. Владимиров В.С. — Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
59. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.Н. — Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
60. Spokoiny B.L. — Phys. Lett. B, 1988, 207, p.401.
61. Zhang R.B. — Phys. Lett. B, 1988, 209, p.229.
62. Parisi G. — Mod. Phys. Lett. A, 1988, 3, p.639.
63. Melser E. — Preprint EFI-88-41, 1988.
64. Roth B.D.B. — Preprint VTT-09-88, 1988.
65. Missarov M.D. — Marseille preprints CTP-88/P2151; CTP-88/P215, 1988.
66. Vladimirov V.S., Volovich I.V. — Preprint NBI-HE-88-77, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1988 года.