сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-879

Э.Э.Энтральго

О КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРУКТУРНО-ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЫ

1988

В нерелятивистской квантовой механике считается, что частица является точечной в том смысле, что физическая величина A, которая характеризует ее в момент времени t, изображается оператором $\hat{A}(t)$, соответствующим по некоторому правилу (см., например,[I-8]) классической функции $A(q,p,t)$ координаты, импульса и времени, характеризующей классическую точечную частицу. Однако для описания движения частиц во внешних магнитных полях вводится дополнительная степень свободы - спин частицы $\vec{S}$, которая считается чисто квантовой в том смысле, что она не связана с какой-либо функцией, характеризующей движение классической частицы.

Начиная с работы Шредингера[9], в научной литературе появился ряд работ (см., например,[IO,II]), в которых на основе релятивистских квантовых уравнений движения показывается, что спин и другие физические величины, не имеющие классических аналогов, отражают некие степени свободы, связанные со структурой частицы.

В данной работе мы рассматриваем модель нерелятивистской классической точечной частицы со структурой. Такая частица представляет собой скопление точечных классических субчастиц, которые при "разумных" внешних полях, благодаря сильному взаимодействию друг с другом, "удерживаются" на расстояниях, не превышающих размер l, который на данном этапе развития физики не допускает непосредственного измерения. При таких условиях можно считать, что рассматриваемая частица характеризуется координатой $\vec{q}$ (координата центра масс) и импульсом $\vec{p}=m\dot{\vec{q}}$ (полный импульс скопления субчастиц), отражающими ее точечный характер, и, кроме того, такими физическими величинами, как собственный механический момент $\vec{s}$, дипольный момент $\vec{d}$, дипольная скорость $\dot{\vec{d}}$, магнитный момент $\vec{\mu}$, и другими, отражающими ее структурный характер. Такую частицу мы назовем структурно-точечной.

Для построения теории структурно-точечной частицы используем следующие рассуждения.

Физическая система с конечной массой m, конечным зарядом e, состоящая из точечных субчастиц с массами m_j ($\sum m_j = m$), зарядами e_j ($\sum e_j = e$), координатами $q_{j\alpha}$ и кинетическими импульсами $p_{j\alpha} = m_j \dot{q}_{j\alpha}$ в присутствии внешних стационарных гравитационного и и электромагнитного полей с напряженностями $\vec{G}(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})$, связанными с соответствующими потенциалами $\Phi(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ равенствами

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}), \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}), \quad \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}), \qquad (I)$$

описывается системой уравнений движений:

$$m_j \ddot{q}_{j\alpha} = m_j G_\alpha(\vec{q}_j) + e_j \mathcal{E}_\alpha(\vec{q}_j) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{e_j}{c}\frac{p_{j\beta}}{m_j}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q}_j) - \frac{\partial W(q)}{\partial q_{j\alpha}}. \qquad (2а)$$

Здесь предполагается, что W есть функция разностей координат, т.е.

$$W(q) = W(\ldots, \vec{q}_{jk}, \ldots), \quad \vec{q}_{jk} = \vec{q}_j - \vec{q}_k, \qquad (2б)$$

есть потенциальная энергия взаимодействия субчастиц.

Рассматриваемая система имеет физические характеристики отдельных субчастиц,

$$m_j, \quad e_j, \quad q_{j\alpha}, \quad p_{j\alpha} = m_j\dot{q}_{j\alpha}, \quad L_{j\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} q_{j\beta} p_{j\gamma}, \qquad (3а)$$

$$T_j = \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m}, \qquad U_j = m_j\Phi(\vec{q}_j) + e_j\varphi(\vec{q}_j), \qquad (3б)$$

и характеристики системы в целом, m, e,

$$q_\alpha = \sum_j \frac{m_j}{m} q_{j\alpha}, \qquad p_\alpha = \sum p_{j\alpha}, \qquad J_\alpha = \sum L_{j\alpha}, \qquad (4а)$$

$$H = \sum\left(\frac{p_{j\alpha}p_{j\alpha}}{2m_j} + m_j\Phi(\vec{q}_j) + e_j\varphi(\vec{q}_j)\right) + W(q). \qquad (4б)$$

Описание системой уравнений движения (2а) может быть записано в гамильтоновом формализме в терминах координат $q_{j\alpha}$ и кинетических импульсов $p_{j\alpha} = m_j\dot{q}_{j\alpha}$ в смысле, что изменение любой величины A со временем определится как

$$\dot{A} = \frac{dA(q,p)}{dt} = \{H(q,p), A(q,p)\}, \qquad (5а)$$

где $q = (\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N)$, $p = (\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N)$ и $\{\cdot,\cdot\}$ – скобки Пуассона, имеющие вид [I2]

$$\{A(q,p), B(q,p)\} = \sum\left(\frac{\partial A}{\partial p_{j\alpha}}\frac{\partial B}{\partial q_{j\alpha}} - \frac{\partial A}{\partial q_{j\alpha}}\frac{\partial B}{\partial p_{j\alpha}} - \frac{e_j}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\alpha(\vec{q}_j)\frac{\partial A}{\partial p_{j\beta}}\frac{\partial B}{\partial p_{j\gamma}}\right). \qquad (5б)$$

Справедливость соотношений (5) можно проверить, вычисляя скобки (5б) в частных случаях: $\{H, q_{j\alpha}\}$, приводящих к $p_{j\alpha} = m_j\dot{q}_{j\alpha}$, и $\{H, p_{j\alpha}\}$, приводящих к уравнениям (2а).

Результаты вычислений скобок Пуассона (5б) для одночастичных характеристик (3), которые будут полезны в дальнейших вычислениях, записаны ниже:

$$\{q_{j'\alpha}, q_{j''\beta}\} = 0, \qquad \{p_{j'\alpha}, q_{j''\beta}\} = \delta_{j'}^{j''}\delta_\alpha^\beta, \qquad (6а)$$

$$\{p_{j'\alpha}, p_{j''\beta}\} = -\delta_{j'}^{j''}\frac{e_{j'}}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q}_{j'}), \qquad \{q_{j'\alpha}, L_{j''\beta}\} = -\delta_{j'}^{j''}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} q_{j'\gamma}, \qquad (6б)$$

$$\{p_{j'\alpha}, L_{j''\beta}\} = -\delta_{j'}^{j''}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} p_{j'\gamma} + \frac{e_{j'}}{c}\left(q_{j'\alpha}\mathcal{H}_\beta(\vec{q}_{j'}) - \delta_\alpha^\beta q_{j'\gamma}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q}_{j'})\right)\right), \qquad (6в)$$

$$\{L_{j'\alpha}, L_{j''\beta}\} = -\delta_{j'}^{j''}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(L_{j'\gamma} + \frac{e_{j'}}{c} q_{j'\gamma} q_{j'\rho}\mathcal{H}_\rho(\vec{q}_{j'})\right), \qquad (6г)$$

$$\{T_{j'}, q_{j''\alpha}\} = \delta_{j'}^{j''}\frac{p_{j'\alpha}}{m_{j'}}, \qquad \{T_{j'}, p_{j''\alpha}\} = \delta_{j'}^{j''}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{e_{j'}}{m_{j'}c} p_{j'\beta}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q}_{j'}), \qquad (6д)$$

$$\{T_{j'}, L_{j''\alpha}\} = \delta_{j'}^{j''}\frac{e_{j'}}{m_{j'}c}\left(q_{j'\beta} p_{j'\alpha}\mathcal{H}_\beta(\vec{q}_{j'}) - q_{j'\beta} p_{j'\beta}\mathcal{H}_\alpha(\vec{q}_{j'})\right), \qquad (6е)$$

$$\{m_{j'}\Phi(\vec{q}_{j'}), q_{j''\alpha}\} = 0, \qquad \{m_{j'}\Phi(\vec{q}_{j'}), p_{j''\alpha}\} = -\delta_{j'}^{j''} m_{j'}\frac{\partial\Phi(\vec{q}_{j'})}{\partial q_{j'\alpha}}, \qquad (6ж)$$

$$\{m_{j'}\Phi(\vec{q}_{j'}), L_{j''\alpha}\} = -\delta_{j'}^{j''}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} m_{j'} q_{j'\beta}\frac{\partial\Phi(\vec{q}_{j'})}{\partial q_{j'\gamma}}, \qquad (6з)$$

$$\{m_{j'}\Phi(\vec{q}_{j'}), T_{j''}\} = -\delta_{j'}^{j''} p_{j'\alpha}\frac{\partial\Phi(\vec{q}_{j'})}{\partial q_{j'\alpha}}, \qquad \{m_{j'}\Phi(\vec{q}_{j'}), m_{j''}\Phi(\vec{q}_{j''})\} = 0, \qquad (6и)$$

$$\{e_{j'}\varphi(\vec{q}_{j'}), q_{j''\alpha}\} = 0, \qquad \{e_{j'}\varphi(\vec{q}_{j'}), p_{j''\alpha}\} = -\delta_{j'}^{j''} e_{j'}\frac{\partial\varphi(\vec{q}_{j'})}{\partial q_{j'\alpha}}, \qquad (6к)$$

$$\{e_{j'}\varphi(\vec{q}_{j'}), L_{j''\alpha}\} = -\delta_{j'}^{j''}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_{j'} q_{j'\beta}\frac{\partial\varphi(\vec{q}_{j'})}{\partial q_{j'\gamma}}, \qquad (6л)$$

$$\{e_{j'}\varphi(\vec{q}_{j'}), T_{j''}\} = -\delta_{j'}^{j''}\frac{e_{j'}}{m_{j'}} p_{j'\alpha}\frac{\partial\varphi(\vec{q}_{j'})}{\partial q_{j'\alpha}}, \qquad (6м)$$

$$\{e_{j'}\varphi(\vec{q}_{j'}), e_{j''}\varphi(\vec{q}_{j''})\} = \{e_{j'}\varphi(\vec{q}_{j'}), m_{j''}\Phi(\vec{q}_{j''})\} = 0. \qquad (6н)$$

Пусть рассматриваемая система есть структурно-точечная частица, т.е. соотношение внешних и внутренних взаимодействий в уравнении (2а) таково, что в любой момент времени выполняется неравенство

$$|q_{j\alpha}(t) - q_\alpha(t)| \leq \ell. \qquad (7)$$

Тогда в силу ненаблюдаемости ℓ имеет смысл рассматривать только физические величины, характеризующие частицу в целом, т.е. величины (4). При этом имеется в распоряжении малый параметр (величина ℓ) для приближенного описания структурно-точечной частицы.

Учитывая последние замечания, имеет смысл перейти от переменных $q_{j\alpha}$ и $p_{j\alpha}$ к координате центра масс q_α, полному импульсу p_α и отклонениям координат и скоростей субчастиц от координаты и скорости центра масс, т.е.

$$q_{j\alpha} = q_\alpha + \xi_{j\alpha}\,, \qquad p_{j\alpha} = \frac{m_j}{m} p_\alpha + \eta_{j\alpha}\,, \qquad \eta_{j\alpha} = m_j \dot{\xi}_{j\alpha} \quad . \tag{8}$$

Отсюда следует, что

$$\sum m_j \xi_{j\alpha} = 0\,, \qquad \sum \eta_{j\alpha} = \sum m_j \dot{\xi}_{j\alpha} = 0 \; . \tag{9}$$

Отметим, что при замене переменных (8) для частных производных в (5б) справедливо

$$\frac{\partial}{\partial q_{j\alpha}} = \frac{m_j}{m}\frac{\partial}{\partial q_\alpha} + (1-\delta_j^{j'})\frac{\partial}{\partial \xi_{j\alpha}} - \frac{m_j}{m}\sum_{j''}(1-\delta_{j'}^{j''})\frac{\partial}{\partial \xi_{j''\alpha}}\,, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{j\alpha}} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} + (1-\delta_j^{j'})\frac{\partial}{\partial \eta_{j\alpha}} - \sum_{j''}\frac{m_{j''}}{m}(1-\delta_{j'}^{j''})\frac{\partial}{\partial \eta_{j''\alpha}} \, . \tag{10б}$$

С учетом обозначений (8) в теорию введена малая величина $|\xi_{j\alpha}(t)| \leq \ell$ при всех j, α и t, что позволяет говорить о различных приближениях теории по малому параметру ℓ. Если в разложении напряженности полей (I) по $\xi_{j\alpha}$ удерживать только линейные члены (что эквивалентно удержанию квадратичных потенциалов), т.е. использовать приближение

$$f_\alpha(\vec{q}_j) = f_\alpha(\vec{q}) + \frac{\partial f_\alpha(\vec{q})}{\partial q_\beta}\xi_{j\beta}\,, \tag{11}$$

то при замене переменных (8) с учетом (II) при суммировании по всем j получаем

$$m\ddot{q}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{e\,p_\beta}{mc}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q}) + \frac{p_\beta d_\rho}{mc}\frac{\partial \mathcal{H}_\gamma(\vec{q})}{\partial q_\rho} + \frac{\dot{d}_\beta}{c}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q}) + 2\mu_{\rho\beta}\frac{\partial \mathcal{H}_\gamma(\vec{q})}{\partial q_\rho}\right) + m\,G_\alpha(\vec{q}) + e\,\mathcal{E}_\alpha(\vec{q}) + d_\beta\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha(\vec{q})}{\partial q_\beta} \; . \tag{12}$$

Здесь введены обозначения:

$$d_\alpha = \sum e_j \xi_{j\alpha} = \sum m_j z_j q_{j\alpha} = \sum m_j z_j \xi_{j\alpha} \quad \text{– дипольный момент,} \tag{13а}$$

$$\dot{d}_\alpha = \sum e_j \dot{\xi}_{j\alpha} = \sum z_j p_{j\alpha} = \sum m_j z_j \dot{\xi}_{j\alpha} \quad \text{– дипольная скорость,} \tag{13б}$$

$$z_j = \frac{e_j}{m_j} - \frac{e}{m} \quad \text{– отклонения отношений заряда к массе,} \tag{13в}$$

$$\mu_{\alpha\beta} = \sum \frac{e_j}{2c}\xi_{j\alpha}\dot{\xi}_{j\beta} \quad \text{– тензор магнитного момента.} \tag{13г}$$

Первый, пятый и шестой члены правой части уравнения движения (I2) отражают воздействие внешних полей на точечную сторону частицы,

а остальные отражают взаимодействие за счет структурной стороны частицы. Следует заметить, что внутренние силы, связанные с потенциалом W (2б), явным образом не влияют на движение центра масс частицы.

Следует отметить, что в выбранном нами приближении (II) для уравнения движения (I2) (это приближение сохраним при вычислениях изменений во времени других физических величин) мы практически пренебрегаем квадратичными членами, т.е. считаем, что

$$\sum a_j \xi_{j\alpha}\xi_{j\beta} = 0\,, \qquad a_j = const \, . \tag{14а}$$

Отсюда при дифференцировании по времени следует

$$A_{\alpha\beta} = \sum a_j \xi_{j\alpha}\dot{\xi}_{j\beta} = -\sum a_j \xi_{j\beta}\dot{\xi}_{j\alpha} = -A_{\beta\alpha}\,, \tag{14б}$$

что означает, что все физические величины типа магнитного момента (см. (I3г)) являются антисимметричными, и следовательно, для соответствующих векторов можно написать

$$A_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\gamma} \qquad \text{и} \qquad A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\gamma \, . \tag{14в}$$

Рассмотрим теперь другие физические величины, характеризующие частицу в целом, начиная с полного момента количества движения:

$$J_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum q_{j\beta}p_{j\gamma} = L_\alpha + S_\alpha\,, \tag{15а}$$

$$L_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_\beta p_\gamma\,, \qquad S_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sum m_j \xi_{j\beta}\dot{\xi}_{j\gamma}\,, \tag{15б}$$

где L_α – орбитальный, S_α – собственный механический момент количества движения.

Для полной энергии (4б) с учетом лишь квадратичных членов по $\xi_{j\alpha}$, не учитывая постоянный отсчет внутренней энергии $W(0)$ и требуя равенства нулю суммарных постоянных составляющих внутренних сил, имеем

$$H = T + \tau + U + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)\sum m_j \xi_{j\alpha}\xi_{j\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_\beta}d_\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)\sum e_j \xi_{j\alpha}\xi_{j\beta} + \frac{1}{2}\sum_{j',j''}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_{j'\alpha}\partial \xi_{j''\beta}}\right)\xi_{j'\alpha}\xi_{j''\beta} \, . \tag{16а}$$

Здесь введены обозначения

$$T = \frac{p_\alpha p_\alpha}{2m}\,, \qquad \tau = \sum \frac{m_j}{2}\dot{\xi}_{j\alpha}\dot{\xi}_{j\alpha}\,, \qquad U = m\,\varphi(\vec{q}) + e\,\psi(\vec{q})\,, \tag{16б}$$

определяющие кинетическую T и потенциальную U энергии структурно-точечной частицы как точки и внутреннюю кинетическую энергию τ. Остальные члены в (I6а) соответствуют потенциальной энергии, связанной со структурой частицы.

Отметим, что вычисление $\{H, q_\alpha\}$ и $\{H, P_\alpha\}$ по формуле (5б) с приближенным выражением (I6) для H также приводит к уравнению (I2).

Теперь, вычисляя изменение моментов количества движения с помощью (5), (6), (I4) и (I6) для орбитального и собственного моментов (I5б), получаем

$$\dot{L}_\alpha = \{H, L_\alpha\} = \frac{e q_\beta}{mc}\left(P_\alpha \mathcal{H}_\beta - P_\beta \mathcal{H}_\alpha\right) + \frac{q_\beta}{mc}\left(d_\gamma P_\alpha \frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\gamma} - d_\gamma P_\beta \frac{\partial \mathcal{H}_\alpha}{\partial q_\gamma}\right)$$

$$+ \frac{q_\beta}{c}\left(\dot{d}_\alpha \mathcal{H}_\beta - \dot{d}_\beta \mathcal{H}_\alpha\right) + 2 q_\beta\left(\mu_{\gamma\alpha}\frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\gamma} - \mu_{\gamma\beta}\frac{\partial \mathcal{H}_\alpha}{\partial q_\gamma}\right) \qquad \text{(I7а)}$$

$$+ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} q_\beta \left(m G_\gamma + e \mathcal{E}_\gamma + d_\rho \frac{\partial \mathcal{E}_\gamma}{\partial q_\rho}\right),$$

$$\dot{S}_\alpha = \{H, S_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta \mu_\gamma + \frac{d_\beta}{mc}\left(P_\alpha \mathcal{H}_\beta - P_\beta \mathcal{H}_\alpha\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\beta \mathcal{E}_\gamma. \qquad \text{(I7б)}$$

Таким образом, в данном приближении при вычислении изменения во времени моментов количества движения не появляются новые величины по сравнению с величинами (I3) уравнения (I2), но если в уравнении (I6) и соотношении (I7а) появление магнитного момента $\vec{\mu}$ связано с неоднородностью магнитного поля, то в уравнении (I7б) он возникает и в однородном случае.

Итак, структурно-точечная частица характеризуется физическими величинами, отражающими ее точечный характер – m, e, $\vec{q}$, $\vec{P}$, $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{P}$, T, и т.п., а также физическими величинами, отражающими ее структуру – $\vec{d}$, $\dot{\vec{d}}$, $\vec{S}$, $\vec{\mu}$, τ, W и т.п. Для того чтобы установить связи между этими величинами, получим уравнение для d_α (I3а,б), что можно сделать, умножая уравнение (2а) на z_j и повторяя процедуру, которая привела к уравнению (I2), или вычисляя $\{H, \dot{d}_\alpha\}$. При этом получим

$$\ddot{d}_\alpha = \{H, \dot{d}_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{P_\beta}{mc}\varkappa \mathcal{H}_\gamma + \frac{P_\beta}{mc}\left(d_\rho^{(2)} + \frac{e}{m} d_\rho\right)\frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\dot{d}_\beta^{(2)}}{c} + \frac{e}{mc}\dot{d}_\beta\right)\mathcal{H}_\gamma + \left(4c\mu_{\rho\beta}^{(2)} - 2\frac{e}{m}\mu_{\rho\beta}\right)\frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\right) + d_\beta \frac{\partial G_\alpha}{\partial q_\beta} \qquad \text{(I8)}$$

$$+ \varkappa \mathcal{E}_\alpha(\vec{q}) + \left(\frac{e}{m} d_\beta + d_\beta^{(2)}\right)\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta} - \sum_{j',j''} W_{j'j''}^{\alpha\beta} z_{j'} \xi_{j''\beta}.$$

В уравнении (I8) обозначено

$$\varkappa \equiv \varkappa^{(2)} = \sum m_j z_j^2, \quad d_\alpha^{(2)} = \sum m_j z_j^2 \xi_{j\alpha}, \quad \dot{d}_\alpha^{(2)} = \sum m_j z_j^2 \dot{\xi}_{j\alpha}, \qquad \text{(I9а)}$$

$$\mu_{\alpha\beta}^{(2)} = \sum m_j \left(\frac{e_j}{2m_j c}\right)^2 \xi_{j\alpha}\dot{\xi}_{j\beta}, \quad W_{j'j''}^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_{j'\alpha}\partial \xi_{j''\beta}}\right)_0 = W_{j''j'}^{\beta\alpha}. \qquad \text{(I9б)}$$

Как мы видим, в уравнении (I8) появились новые величины (I9), содержащие z_j^2. Если продолжать эту процедуру, то образуется цепочка уравнений с величинами типа (I9), но содержащих z_j^N. Поэтому мы можем оборвать эту цепочку, считая, что имеется еще одна малая величина z, а именно:

$$z = max\{|z_j|\}, \qquad z_j = \frac{e_j}{m_j} - \frac{e}{m}. \qquad \text{(20)}$$

Используя оценки по малости z,

$$\varkappa^{(1)} = \sum m_j z_j = 0, \qquad |\varkappa^{(M)}| = |\sum m_j z_j^M| \leq m z^M, \qquad \text{(2Iа)}$$

$$|d_\alpha^{(N)}| = |\sum m_j z_j^N \xi_{j\alpha}| \leq m z^N \ell, \qquad \text{(2Iб)}$$

можно оборвать цепочку физических величин, отбросив члены z^M при $M \geqslant 3$ и $z^N \ell$ при $N \geqslant 2$. При этом

$$\varkappa^{(M)} = 0 \quad \text{при} \quad M \geqslant 3 \quad ; \quad d_\alpha^{(N)} = 0 \quad \text{при} \quad N \geqslant 2 \quad ; \qquad \text{(22а)}$$

$$\varkappa^{(M)} d^{(N)} = 0 \quad \text{при} \quad M \geqslant 2 \quad \text{и} \quad N \geqslant 1 \quad ; \qquad \text{(22б)}$$

$$\dot{d}_\alpha^{(N)} = 0 \quad \text{при} \quad N \geqslant 2 \quad ; \quad \varkappa^{(M)} \dot{d}^{(N)} = 0 \quad \text{при} \quad M \geqslant 2, N \geqslant 1 ; \qquad \text{(22в)}$$

$$d_\alpha^{(M)} \dot{d}_\beta^{(N)} = 0 \quad \text{при} \quad M \geqslant 1 \quad \text{и} \quad N \geqslant 1. \qquad \text{(22г)}$$

Кроме того, внутренняя потенциальная энергия W должна быть согласована с приближением (22) и с уравнением $\ddot{d}_\alpha^{(2)} = 0$, что достигается, если

$$W_{j'j''}^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta e_{j'} e_{j''} \frac{w^2}{2} \qquad \text{при} \quad w^2 \sim \frac{1}{\ell z}, \qquad \text{(23)}$$

и, кроме того, из уравнения $\ddot{d}_\alpha^{(2)} = 0$ вытекает, что

$$\mu_\alpha^{(3)} = \frac{e}{mc}\mu_\alpha^{(2)} + \frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa}{mc^2} - \frac{e^2}{m^2c^2}\right)\mu_\alpha. \qquad \text{(24а)}$$

Здесь по аналогии с (2Iа,б) введены величины

$$\mu_\alpha^{(N)} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum m_j \left(\frac{e_j}{2m_j c}\right)^N \xi_{j\beta}\dot{\xi}_{j\gamma}. \qquad \text{(24б)}$$

Следует отметить, что равенство (24а) возникает лишь при рассмотрении неоднородных магнитных полей.

Итак, в выбранном приближении (22) с учетом (23) уравнение (I8) для дипольного момента принимает вид

$$\ddot{d}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{p_\beta}{mc}\varkappa\mathcal{H}_\gamma + \frac{e}{m^2c}p_\beta d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{e}{mc}\dot{d}_\beta\mathcal{H}_\gamma + \left(4c\mu^{(2)}_{\rho\beta} - 2\frac{e}{m}\mu_{\rho\beta}\right)\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\right) + \tag{25}$$
$$+ d_\beta\frac{\partial G_\alpha}{\partial q_\beta} + \varkappa\mathcal{E}_\alpha(\vec{q}) + \frac{e}{m}d_\beta\frac{\partial\mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta} - W^2\varkappa d_\alpha .$$

Кроме того, в рассматриваемом приближении справедливо

$$\sum m_j\xi_{j\alpha}\xi_{j\beta} = \frac{d_\alpha d_\beta}{\varkappa}, \qquad \sum e_j\xi_{j\alpha}\xi_{j\beta} = \frac{e}{m\varkappa}d_\alpha d_\beta, \tag{26}$$

и поэтому гамильтониан (I6) принимает вид

$$H = T + \mathcal{T} + U + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right)\frac{d_\alpha d_\beta}{\varkappa} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta}d_\beta + \tag{27}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right)\frac{e}{m\varkappa}d_\alpha d_\beta + \frac{W^2}{2}d_\alpha d_\alpha .$$

Поскольку из (I4) и (26) следует, что

$$d_\alpha\dot{d}_\beta + d_\beta\dot{d}_\alpha \approx 0, \tag{28}$$

то удобно ввести аналог вектора момента количества движения для дипольных моментов:

$$\mathcal{L}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{d_\beta\dot{d}_\gamma}{\varkappa}, \qquad \frac{d_\alpha\dot{d}_\beta}{\varkappa} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\mathcal{L}_\gamma}{2} . \tag{29}$$

Чтобы установить соотношения между остальными физическими величинами и выделить независимые физические величины, вычислим их скобки Пуассона в данном приближении, начиная с координат и кинетических моментов:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, q_\beta\} = \delta^\beta_\alpha, \quad \{p_\alpha, p_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{e}{c}\mathcal{H}_\gamma + \frac{d_\rho}{c}\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\right), \tag{30а}$$

$$\{q_\alpha, d_\beta\} = \{p_\alpha, d_\beta\} = \{\dot{d}_\alpha, q_\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, \dot{d}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\varkappa}{c}\mathcal{H}_\gamma + \frac{e d_\rho}{mc}\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}\right), \tag{30б}$$

$$\{d_\alpha, d_\beta\} = 0, \quad \{\dot{d}_\alpha, d_\beta\} = \varkappa\delta^\beta_\alpha, \quad \{\dot{d}_\alpha, \dot{d}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{e\varkappa}{mc}\mathcal{H}_\gamma . \tag{30в}$$

Отметим, что с помощью магнитного векторного потенциала (I) можно ввести в рассмотрение канонический импульс $\vec{\mathcal{P}}$ и каноническую дипольную скорость $\dot{\vec{D}}$ соотношениями

$$\mathcal{P}_\alpha = p_\alpha + \frac{e}{c}A_\alpha + \frac{d_\rho}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\rho} + \frac{1}{2}\frac{d_\rho d_\mu}{mc\varkappa}\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial q_\rho\partial q_\mu} \tag{3I}$$

$$\dot{D}_\alpha = \dot{d}_\alpha + \frac{\varkappa}{c}A_\alpha + \frac{e}{mc}d_\rho\frac{dA_\alpha}{dq_\rho} . \tag{32}$$

При этом из (30)-(32) следуют канонические соотношения,

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \qquad \{\mathcal{P}_\alpha, q_\beta\} = \delta^\beta_\alpha, \qquad \{\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{P}_\beta\} = 0, \tag{33а}$$

$$\{q_\alpha, d_\beta\} = 0, \qquad \{\mathcal{P}_\alpha, d_\beta\} = \{\dot{D}_\alpha, q_\beta\} = 0, \qquad \{\mathcal{P}_\alpha, \dot{D}_\beta\} = 0, \tag{33б}$$

$$\{d_\alpha, d_\beta\} = 0, \qquad \{\dot{D}_\alpha, d_\beta\} = \varkappa\delta^\beta_\alpha, \qquad \{\dot{D}_\alpha, \dot{D}_\beta\} = 0. \tag{33в}$$

означающие независимость величин $\vec{q}$, $\vec{\mathcal{P}}$ от величин $\vec{d}$, $\dot{\vec{D}}$ (и обратно).

Приведем теперь результаты вычисления скобок Пуассона для координаты $\vec{q}$ и кинетических импульсов $\vec{p}$ с моментами количества движения (орбитальным $\vec{L}$, дипольным моментом $\vec{\mathcal{L}}$, собственным $\vec{S}$) и последних между собой.

$$\{L_\alpha, q_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma, \qquad \{L_\alpha, d_\beta\} = 0, \qquad \{\mathcal{L}_\alpha, q_\beta\} = 0, \tag{34а}$$

$$\{L_\alpha, p_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma - \frac{e}{c}\left(\delta^\beta_\alpha q_\gamma\mathcal{H}_\gamma - q_\beta\mathcal{H}_\alpha\right) - \frac{1}{c}\left(\delta^\beta_\alpha q_\gamma d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} - q_\beta d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\alpha}{\partial q_\rho}\right), \tag{34б}$$

$$\{L_\alpha, L_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{q_\gamma q_\rho}{c}\left(e\mathcal{H}_\rho + d_\mu\frac{\partial\mathcal{H}_\rho}{\partial q_\mu}\right), \tag{34в}$$

$$\{L_\alpha, \dot{d}_\beta\} = -\frac{\varkappa}{c}\left(\delta^\beta_\alpha q_\gamma\mathcal{H}_\gamma - q_\beta\mathcal{H}_\alpha\right) + \frac{e}{mc}\left(\delta^\beta_\alpha q_\gamma d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} - q_\beta d_\rho\frac{\partial\mathcal{H}_\alpha}{\partial q_\rho}\right), \tag{34г}$$

$$\{L_\alpha, \mathcal{L}_\beta\} = -\frac{1}{c}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}d_\gamma q_\rho\mathcal{H}_\rho - \varepsilon_{\beta\gamma\rho}d_\gamma q_\rho\mathcal{H}_\alpha\right), \tag{34д}$$

$$\{\mathcal{L}_\alpha, d_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}d_\gamma, \qquad \{\mathcal{L}_\alpha, p_\beta\} = -\frac{1}{c}\left(\delta^\beta_\alpha d_\gamma\mathcal{H}_\gamma - d_\beta\mathcal{H}_\alpha\right), \tag{34е}$$

$$\{\mathcal{L}_\alpha, L_\beta\} = -\frac{1}{c}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma d_\rho\mathcal{H}_\rho - \varepsilon_{\beta\gamma\rho}q_\gamma d_\rho\mathcal{H}_\alpha\right), \tag{34ж}$$

$$\{\mathcal{L}_\alpha, \dot{d}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{d}_\gamma - \frac{e}{mc}\left(\delta^\beta_\alpha d_\gamma\mathcal{H}_\gamma - d_\beta\mathcal{H}_\alpha\right), \qquad \{\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{L}_\gamma, \tag{34з}$$

$$\{S_\alpha, q_\beta\} = 0, \qquad \{S_\alpha, p_\beta\} = -\frac{1}{c}\left(\delta^\beta_\alpha d_\gamma\mathcal{H}_\gamma - d_\beta\mathcal{H}_\alpha\right), \qquad \{S_\alpha, d_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}d_\gamma, \tag{34и}$$

$$\{S_\alpha, L_\beta\} = -\frac{1}{c}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma d_\rho\mathcal{H}_\rho - \varepsilon_{\beta\gamma\rho}q_\gamma d_\rho\mathcal{H}_\alpha\right), \tag{34к}$$

$$\{S_\alpha, \dot{d}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{d}_\gamma - \frac{e}{mc}\left(\delta^\beta_\alpha d_\gamma\mathcal{H}_\gamma - d_\beta\mathcal{H}_\alpha\right), \tag{34л}$$

$$\{S_\alpha, \mathcal{L}_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{L}_\gamma, \qquad \{S_\alpha, S_\beta\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma . \tag{34м}$$

Из всех этих соотношений видно, что величины L_α, $\mathcal{L}_\alpha$ и S_α за-

зависят от величин $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\dot{\vec{d}}$ в общем случае. Однако величина

$$S_\alpha = s_\alpha - \mathcal{L}_\alpha , \tag{35}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\{ S_\alpha, q_\beta \} = \{ S_\alpha, p_\beta \} = \{ S_\alpha, P_\beta \} = 0 , \tag{36а}$$

$$\{ S_\alpha, d_\beta \} = \{ S_\alpha, \dot{d}_\beta \} = \{ S_\alpha, D_\beta \} = 0 , \tag{36б}$$

$$\{ S_\alpha, S_\beta \} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma . \tag{36в}$$

Поэтому величина $\vec{S}$, определяемая соотношением (35), может рассматриваться как независимая от величин $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\dot{\vec{d}}$ (и обратно).

Теперь рассмотрим соотношения, включающие в себя вектор магнитного момента $\vec{\mu}$ (I3е):

$$\{ \mu_\alpha, q_\beta \} = 0 , \qquad \{ \mu_\alpha, p_\beta \} = -\frac{e}{2mc^2} \left(\delta^\beta_\alpha d_\gamma \mathcal{H}_\gamma - d_\beta \mathcal{H}_\alpha \right), \tag{37а}$$

$$\{ \mu_\alpha, L_\beta \} = -\frac{e}{2mc^2} \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} q_\gamma d_\rho \mathcal{H}_\rho - \varepsilon_{\beta\gamma\rho} q_\gamma d_\rho \mathcal{H}_\alpha \right), \tag{37б}$$

$$\{ \mu_\alpha, d_\beta \} = -\frac{e}{2mc} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\gamma , \qquad \{ \mu_\alpha, \dot{d}_\beta \} = -\frac{e}{2mc} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \dot{d}_\gamma - \frac{e^2}{2m^2c^2} \left(\delta^\beta_\alpha d_\gamma \mathcal{H}_\gamma - d_\beta \mathcal{H}_\alpha \right), \tag{37в}$$

$$\{ \mu_\alpha, \mathcal{L}_\beta \} = -\frac{e}{2mc} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{L}_\gamma , \tag{37г}$$

$$\{ \mu_\alpha, S_\beta \} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mu_\gamma , \qquad \{ \mu_\alpha, \mu_\beta \} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mu^{(2)}_\gamma , \qquad \{ \mu^{(2)}_\alpha, S_\beta \} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mu^{(2)}_\gamma . \tag{37д}$$

Здесь и далее используются величины $\mu^{(N)}_\alpha$, определенные равенствами (24).

Вводя в рассмотрение величины $\vec{M}$ и $\vec{M}^{(N)}$ согласно равенствам

$$M_\alpha = M^{(1)}_\alpha = \mu_\alpha - \frac{e}{2mc} \mathcal{L}_\alpha , \qquad M^{(N)}_\alpha = \mu^{(N)}_\alpha - \left(\frac{e}{2mc} \right)^N \mathcal{L}_\alpha , \tag{38}$$

из соотношений (37) получим

$$\{ M^{(N)}_\alpha, q_\beta \} = \{ M^{(N)}_\alpha, p_\beta \} = \{ M^{(N)}_\alpha, P_\beta \} = 0 , \tag{39а}$$

$$\{ M^{(N)}_\alpha, d_\beta \} = \{ M^{(N)}_\alpha, \dot{d}_\beta \} = \{ M^{(N)}_\alpha, D_\beta \} = 0 , \tag{39б}$$

$$\{ M^{(N)}_\alpha, M^{(M)}_\beta \} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M^{(M+N)}_\gamma , \qquad \{ M_\alpha, S_\beta \} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma . \tag{39в}$$

Соотношения (39) показывают, что величины $M^{(N)}_\alpha$ не зависят от $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\dot{\vec{d}}$. При этом сравнение (39в) с (36в) позволяет сделать вывод о пропорциональности между $\vec{M}$ и $\vec{S}$, а именно:

$$M_\alpha = g S_\alpha , \qquad M^{(N)}_\alpha = g^N S_\alpha , \tag{40}$$

где g некоторая константа, имеющая размерность гиромагнитного отношения и связанная со структурой частицы. В случае неоднородных магнитных полей, согласно (24а) и (40), в рассматриваемом нами приближении имеет место равенство

$$M^{(3)}_\alpha = \frac{e}{mc} M^{(2)}_\alpha + \frac{1}{4} \left(\frac{\varkappa}{mc^2} - \frac{e^2}{m^2c^2} \right) M_\alpha . \tag{4Iа}$$

Отсюда следует соотношение

$$g^2 - \frac{e}{mc} g - \frac{1}{4} \left(\frac{\varkappa}{mc^2} - \frac{e^2}{m^2c^2} \right) = 0 , \tag{4Iб}$$

т.е. в случае неоднородных магнитных полей устанавливается связь между структурными константами g и $\varkappa$.

Для кинетической энергии T, связанной с точечной стороной структурно-точечной частицы (см. определения (I6б)), выполняются соотношения

$$\{ T, q_\alpha \} = \frac{p_\alpha}{m} , \qquad \{ T, d_\alpha \} = 0 , \tag{42а}$$

$$\{ T, p_\alpha \} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{p_\beta}{mc} \left(e \mathcal{H}_\gamma + d_\rho \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} \right), \tag{42б}$$

$$\{ T, L_\alpha \} = \frac{e q_\beta}{mc} \left(p_\alpha \mathcal{H}_\beta - p_\beta \mathcal{H}_\alpha \right) + \frac{q_\beta}{mc} \left(d_\gamma p_\alpha \frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\gamma} - p_\beta d_\gamma \frac{\partial \mathcal{H}_\alpha}{\partial q_\gamma} \right), \tag{42в}$$

$$\{ T, \dot{d}_\alpha \} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\varkappa}{mc} p_\beta \mathcal{H}_\gamma + \frac{e}{m^2c} d_\rho p_\beta \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} \right), \tag{42г}$$

$$\{ T, \mathcal{L}_\alpha \} = \frac{1}{mc} \left(d_\beta p_\alpha \mathcal{H}_\beta - d_\beta p_\beta \mathcal{H}_\alpha \right), \tag{42д}$$

$$\{ T, s_\alpha \} = \frac{1}{mc} \left(d_\beta p_\alpha \mathcal{H}_\beta - d_\beta p_\beta \mathcal{H}_\alpha \right), \tag{42е}$$

$$\{ T, \mu_\alpha \} = \frac{e}{2mc^2} \left(d_\beta p_\alpha \mathcal{H}_\beta - d_\beta p_\beta \mathcal{H}_\alpha \right), \tag{42ж}$$

$$\{ T, S_\alpha \} = \{ T, M_\alpha \} = 0 . \tag{42з}$$

а для внутренней кинетической энергии τ имеем

$$\{ \tau, q_\alpha \} = 0 , \qquad \{ \tau, p_\alpha \} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\dot{d}_\beta}{c} \mathcal{H}_\gamma + \mu_\beta \frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\alpha} , \tag{43а}$$

$$\{ \tau, L_\alpha \} = -\frac{e}{2mc} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_\beta \mathcal{L}_\gamma , \qquad \{ \tau, d_\alpha \} = \dot{d}_\alpha , \tag{43б}$$

$$\{ \tau, \dot{d}_\alpha \} = \frac{e}{mc} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \dot{d}_\beta \mathcal{H}_\gamma + \left(2c M^{(2)}_\beta - \frac{e}{m} \mu_\beta \right) \frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\alpha} , \tag{43в}$$

$$\{ \tau, \mathcal{L}_\alpha \} = -\frac{e}{2mc} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_\beta \mathcal{L}_\gamma , \qquad \{ \tau, s_\alpha \} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}_\beta M_\gamma \tag{43г}$$

$$\{\tau, \mu_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta \mu_\gamma^{(2)}, \qquad \{\tau, S_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta M_\gamma, \tag{43д}$$

$$\{\tau, M_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta M_\gamma^{(2)}, \qquad \{\tau, M_\alpha^{(N)}\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta M_\gamma^{(N+1)}. \tag{43е}$$

Соотношения (43) позволяют представить внутреннюю кинетическую энергию τ в виде суммы трех слагаемых:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \tag{44а}$$

$$\tau_1 = \frac{\dot{d}_\beta \dot{d}_\beta}{2\varkappa}, \qquad \tau_2 = -M_\beta \mathcal{H}_\beta, \qquad \tau_3 = -\left(2cM_\beta^{(2)} - \frac{e}{m}M_\beta\right)\frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\gamma}\frac{d_\gamma}{\varkappa}. \tag{44б}$$

При этом для τ_1, τ_2 и τ_3 справедливо

$$\{\tau_1, q_\alpha\} = \{\tau_2, q_\alpha\} = \{\tau_3, q_\alpha\} = 0, \tag{45а}$$

$$\{\tau_1, P_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\dot{d}_\beta}{c}\mathcal{H}_\gamma + \frac{e}{2mc}\mathcal{L}_\beta \frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\alpha}, \qquad \{\tau_2, P_\alpha\} = M_\beta \frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\alpha}, \tag{45б}$$

$$\{\tau_3, P_\alpha\} = 0, \quad \{\tau_1, L_\alpha\} = q_\beta \frac{\dot{d}_\alpha}{c}\mathcal{H}_\beta - q_\beta \frac{\dot{d}_\beta}{c}\mathcal{H}_\alpha + \frac{e}{2mc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} q_\beta \ell_\rho \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho}, \tag{45в}$$

$$\{\tau_2, L_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma} q_\beta M_\rho \frac{\partial \mathcal{H}_\rho}{\partial q_\sigma}, \qquad \{\tau_3, L_\alpha\} = 0, \tag{45г}$$

$$\{\tau_1, d_\alpha\} = \dot{d}_\alpha, \qquad \{\tau_2, d_\alpha\} = \{\tau_3, d_\alpha\} = 0, \tag{45д}$$

$$\{\tau_1, \dot{d}_\alpha\} = \frac{e}{mc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{d}_\beta \mathcal{H}_\gamma, \qquad \{\tau_2, \dot{d}_\alpha\} = 0, \tag{45е}$$

$$\{\tau_3, \dot{d}_\alpha\} = \left(2cM_\beta^{(2)} - \frac{e}{m}M_\beta\right)\frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\alpha}, \tag{45ж}$$

$$\{\tau_1, \mathcal{L}_\alpha\} = -\frac{e}{2mc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta \mathcal{L}_\gamma, \qquad \{\tau_2, \mathcal{L}_\alpha\} = \{\tau_3, \mathcal{L}_\alpha\} = 0, \tag{45з}$$

$$\{\tau_1, S_\alpha\} = -\frac{e}{2mc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta \ell_\gamma, \quad \{\tau_2, S_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta M_\gamma, \quad \{\tau_3, S_\alpha\} = 0, \tag{45и}$$

$$\{\tau_1, \mu_\alpha\} = -\frac{e^2}{4m^2c^2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta \ell_\gamma, \quad \{\tau_2, \mu_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta M_\gamma^{(2)}, \quad \{\tau_3, \mu_\alpha\} = 0, \tag{45к}$$

$$\{\tau_1, \mathcal{S}_\alpha\} = 0, \quad \{\tau_2, \mathcal{S}_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta M_\gamma, \quad \{\tau_3, \mathcal{S}_\alpha\} = 0, \tag{45л}$$

$$\{\tau_1, M_\alpha\} = 0, \quad \{\tau_2, M_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta M_\gamma^{(2)}, \quad \{\tau_3, M_\alpha\} = 0. \tag{45м}$$

Итак, в рассмотренном выше приближении состояние структурно-точечной частицы можно задать следующими величинами:

постоянные: m, e, g, w, (46)

независимые переменные: $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\dot{\vec{d}}$, $\vec{s}$. (47)

Остальные физические характеристики структурно-точечного объекта являются функциями постоянных (46) и независимых переменных (47), а именно:

$$\vec{L} = \vec{q} \times \vec{P}, \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \qquad T = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}, \tag{48а}$$

$$\varkappa = \left(4g\left(g - \frac{e}{mc}\right) + \frac{e^2}{m^2c^2}\right)mc^2, \qquad \vec{\mathcal{L}} = \frac{\vec{d} \times \dot{\vec{d}}}{\varkappa}, \tag{48б}$$

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{s} - \vec{\mathcal{L}}, \qquad \vec{M} = g\vec{S}, \qquad \vec{\mu} = \vec{M} + \frac{e}{2mc}\vec{\mathcal{L}}, \tag{48в}$$

$$\tau = \frac{\dot{\vec{d}}^{\,2}}{2\varkappa} - \vec{M}\cdot\vec{\mathcal{H}} - \left(2cg - \frac{e}{m}\right) g S_\beta \frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\gamma}\frac{d_\gamma}{\varkappa}, \tag{48г}$$

$$U = m\Phi(\vec{q}) + e\varphi(\vec{q}), \qquad W = \frac{\omega^2}{2}\vec{d}^{\,2}, \tag{48д}$$

$$H = T + \tau + U + W + d_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} + \frac{e}{2m\varkappa} d_\alpha d_\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} + \frac{d_\alpha d_\beta}{2\varkappa}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}. \tag{48е}$$

Следует особо отметить канонические переменные $\vec{P}$, $\dot{\vec{D}}$, $\vec{\mathcal{S}}$, выражаемые через кинетические переменные (47) соотношениями (31), (32) и (35) соответственно. Возможность перехода от кинетических независимых $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\dot{\vec{d}}$, $\vec{s}$ к каноническим независимым $\vec{q}$, $\vec{P}$, $\vec{d}$, $\vec{D}$, $\vec{\mathcal{S}}$ сводит систему скобок Пуассона для независимых физических характеристик структурно-точечного объекта к соотношениям (33а,б,в) и (36а,б,в). Это показывает, что в квантовой теории структурно-точечного объекта (см. [13,15]), построенной с оператором вероятности [8,12], алгебра с образующими $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\dot{\vec{d}}$, $\vec{s}$ фактически сводится к произведению трех независимых подалгебр с образующими $\vec{q}$, $\vec{P}$ (бозе-алгебра), $\vec{d}$, $\vec{D}$ (бозе-алгебра) и $\vec{\mathcal{S}}$ (алгебра момента).

Вернемся теперь к классическому описанию эволюции структурно-точечного объекта во внешних полях (1). Вычисляя с помощью соотношений (6), (30), (33), (34), (37), (39), (42) и (43) производные (5) для независимых переменных (47) с учетом гамильтониана (48е), получим

$$\dot{q}_\alpha = \{H, q_\alpha\} = p_\alpha/m, \tag{49а}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_\alpha = \{H, P_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{e p_\beta}{mc}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q}) + \frac{p_\beta d_\rho}{mc}\frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{\dot{d}_\beta}{c}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q})\right) + \\ + \left(gS_\beta + \left(\frac{e}{2mc} - g\right)\mathcal{L}_\beta\right)\frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\alpha} + mG_\alpha(\vec{q}) + e\mathcal{E}_\alpha(\vec{q}) + d_\beta \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta}, \end{aligned} \tag{49б}$$

$$\dot{d}_\alpha = \{H, d_\alpha\}, \tag{49в}$$

$$\ddot{d}_\alpha = \{H, \dot{d}_\alpha\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{e p_\beta}{mc}\mathcal{H}_\gamma(\vec{q}) + \frac{e p_\beta d_\rho}{m^2 c}\frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{e}{mc}\dot{d}_\beta \mathcal{H}_\gamma\right)$$

$$+ \left(2cg - \frac{e}{m}\right) g \left(S_\beta - \mathcal{L}_\beta\right)\frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial q_\alpha} + d_\beta \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta} + \varkappa \mathcal{E}_\alpha(\vec{q}) + \frac{e \dot{d}_\beta}{m}\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial q_\beta} - w^2 \varkappa d_\alpha, \qquad (49г)$$

$$\dot{S}_\alpha = \{H, S_\alpha\} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_\beta\left(g S_\gamma + \left(\frac{e}{2mc} - g\right)\mathcal{L}_\gamma\right) + \frac{d_\beta}{mc}\left(p_\alpha \mathcal{H}_\beta - p_\beta \mathcal{H}_\alpha\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\beta \mathcal{E}_\gamma. \qquad (49д)$$

Совокупность соотношений (49) представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка, позволяющую определить независимые переменные $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{d}$, $\dot{\vec{d}}$, $\vec{S}$ в любой момент времени $t \geqslant t_0$, если их значения заданы в момент t_0 .

Таким образом, соотношения (49) есть уравнения движения структурно-точечной частицы во внешних стационарных полях, вывод которых и являлся основной целью настоящей работы.

Подчеркнем два важных обстоятельства:

I. Структурно-точечная частица обладает собственным механическим $\vec{S}$ (15б) и собственным магнитным $\vec{\mathcal{M}}$ (13д) моментами, причем эти моменты в общем случае непараллельны, а именно:

$$\vec{\mathcal{M}} = g\vec{S} + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{e}{2mc} - g\right)\vec{d}\times\dot{\vec{d}}. \qquad (50)$$

2. Моменты $\vec{S}$ и $\vec{\mathcal{M}}$ в общем случае не сохраняются. Однако существует величина $\vec{\mathcal{S}}$ (35), связанная с ними соотношениями

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{S} - \frac{1}{\varkappa}\vec{d}\times\dot{\vec{d}}, \qquad \vec{\mathcal{M}} = g\vec{\mathcal{S}} + \frac{e}{2mc\varkappa}\vec{d}\times\dot{\vec{d}}, \qquad (51)$$

квадрат которой, так же, как и полная энергия (48е) структурно-точечной частицы, является интегралом движения при любых стационарных внешних полях (естественно, в рамках рассматриваемого в данной работе приближения), т.е.

$$\dot{H} \approx 0, \quad \dot{\vec{\mathcal{S}}}^2 \approx 0; \quad H \approx const, \quad \vec{\mathcal{S}}^2 \approx const. \qquad (52)$$

Приближенное выполнение законов сохранения (52) объясняется тем, что при выводе уравнений движения (49), так же, как и при вычислениях скобок Пуассона, учитывались лишь члены, пропорциональные $\xi_{\lambda\alpha}$, и без достаточного обоснования отбрасывались члены, содержащие произведения типа $\xi_{\lambda\alpha}\xi_{\kappa\beta}\xi_{\varepsilon\gamma}$, в то время как в выражениях (48г,д,е) для энергии учтены даже члены типа $\xi_{\lambda\alpha}\xi_{\kappa\beta}$.

Нужно отметить, что удержание членов типа $\xi_{\lambda\alpha}\xi_{\kappa\beta}\dot{\xi}_{\varepsilon\gamma}$ автоматически приведет к появлению в теории структурно-точечной частицы более

сложных физических величин, в частности тороидальных моментов (см., например, [14]).

В заключение настоящей статьи отметим, что развитое в ней классическое описание структурно точечной частицы может быть проквантовано с использованием метода квантования, содержащего канонический принцип соответствия, так как все необходимые классические скобки Пуассона известны. В более простых вариантах структурно-точечной частицы такое квантование уже проведено в работах [13] и [15].

Автор выражает признательность Курышкину В.В. и Дубовику В.М. за интересные и стимулирующие дискуссии.

Литература

I. Born M., Jordan P. Z. Physik, 1925, v.34, p.858-888.
2. Dirac P.A.M. Proc. Roy. Soc. London, 1926, v.A110, p.561-579.
3. Weyl H. Z. Physik, 1927, v.46, p.1-17.
4. Neuman J.Von. Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1927, p.245-272.
5. Mehta C.L. J. Math. Phys., 1964, v.5, p.677-681.
6. Cohen L. J. Math. Phys., 1966, v.7, p.781-786.
7. Курышкин В.В. Известия вузов, 1971, Физика № 11, с.103-106.
8. Entralgo E.E., Kuryshkin V.V., Zaparovanny Yu.I. In "Microphysical Reality and Quantum Formalism",Kluwer Ac.Publ.,1988,p.115-143.
9. Schrödinger E. Sitzungsb. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 1930, v.24, p.418-430.
10. Barut A.O., Bracken A.J. Phys. Rev., 1981, v.D23, p.2454-2463.
11. Barut A.O., Thacker W.D. Phys. Rev., 1985, v.D31, p.1386-1392.
12. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. Сообщение ОИЯИ, Дубна, 1987, Р4-87-221, 15 с.
13. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. В сб. Гравитация и гипотетические взаимодействия, М.: УДН, 1988, с.56-65.
14. Дубовик В.М., Тосунян Л.А. ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.1193-1228.
15. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. Сообщение ОИЯИ, Дубна, 1988, Р2-88-878, 16 с.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1988 года.