объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-871

Р.М.Ямалеев

МОДЕЛЬ ПОЛИЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕЦЕЛЫХ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1988

ВВЕДЕНИЕ

Осциллятор - один из первых объектов квантовой механики. Операторы "рождения-уничтожения", так широко используемые в современной квантовой теории поля[1], впервые появились из одномерной модели квантового осциллятора[2]. В последнее время заметно повысился интерес к так называемым нестандартным моделям квантового осциллятора[3,4]. В настоящей работе мы построим одно из обобщений традиционной модели гармонического осциллятора путем перехода от обычного билинейного /анти/коммутатора к понятию полилинейного /анти/коммутатора. В[5] была предложена идея построения квантовой механики, основанной на полилинейных формах в поле циклических чисел. Одним из объектов этой квантовой механики является модель полилинейного осциллятора. Интересное свойство модели заключается в том, что порождающие операторы полилинейного осциллятора сдвигают квантовое число заданного состояния на нецелую величину и, в принципе, могут быть реализованы с помощью операции дробного дифференцирования. Поэтому предлагаемая модель может быть применена в той области физики, где возникают дробные квантовые числа. Примерами физических систем, в которых реализуется дробление фермионного заряда, являются: молекулярная цепочка типа полиацетилен[6,7]; электронная система в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и др.[8,9]. Особый интерес представляет применение развиваемого формализма в теории кварков, поскольку последние обладают дробными квантовыми числами электрического заряда[10].

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Пусть P есть оператор циклической перестановки, действующий на заданный моном М-й степени, причем $P^{\circ} = 1$ и $P^{M} = 1$.

Полилинейным антикоммутатором между заданными M операторами $b_1, b_2, \dots, b_M$ будем называть сумму вида

$$[b_1, b_2, \dots, b_M] := \sum_{m=o}^{M-1} P^m (b_1 b_2 b_3 \dots b_M).$$

2. Пусть θ - примитивный корень уравнения $x^M - 1 = 0$.

Полилинейным коммутатором между заданными M операторами $(b_1, b_2, \dots, b_M)$ будем называть сумму вида

$$\{b_1, b_2, \dots, b_M\} := \sum_{m=o}^{M-1} \theta^m P^m (b_1 b_2 \dots b_M).$$

3. Пусть $\{\Phi_n\}$ есть бесконечное множество элементов пространства L^2 и образует ортогональную систему

$$(\Phi_n, \Phi_m) = \delta_{nm}.$$

Последовательность элементов $\{\Phi_n\}$, /n - целое/ образует базис гильбертова пространства $\mathcal{G}$. Далее, пусть $A(q)$ - линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$.

Множество функции $\{\Phi_p := A(q)\Phi_n\}$, $p = n + q$, q - нецелое, будем называть образом пространства $\mathcal{G}$ в $\mathfrak{X}$[11].

3. Оператор Гамильтона квадратичного осциллятора определяется через антикоммутатор двух порождающих операторов "рождения" - a_1 и "уничтожения" - a_2:

$$H(2) := \frac{1}{2}[a_1, a_2].$$

Действуя по аналогии, оператор Гамильтона полилинейного осциллятора определим в такой форме:

$$H(M) := \frac{1}{M}[b_1, b_2, \dots, b_M].$$

Операторы $b_1, b_2, \dots, b_M$ будем называть порождающими операторами полилинейного осциллятора.

4. Оператор

$$\hat{N}(M) := b_1 b_2 \dots b_M,$$

по аналогии с оператором

$$\hat{N}(2) = a_1 a_2,$$

будем интерпретировать как оператор числа частиц.

5. Правило действия оператора b_k на заданное состояние Φ_n зададим с помощью формулы:

$$b_k \Phi_n = \left(n + \sum_{\ell=1}^{k} \theta_\ell\right)^{1/M} \Phi_{n+\theta_k}. \qquad /1/$$

СПЕКТР ОПЕРАТОРОВ ГАМИЛЬТОНА И ЧИСЛА ЧАСТИЦ

Пользуясь формулой /1/, определяем спектр $\hat{N}(M)$ и $H(M)$:

$$\hat{N}(M)\Phi_n = n\Phi_n, \qquad /2/$$

$$H(M)\Phi_n = (n + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M-1}(M-m)\theta_m)\Phi_n. \qquad /3/$$

ОПЕРАТОРЫ, ПОВЫШАЮЩИЕ /РОЖДЕНИЯ/ И ПОНИЖАЮЩИЕ /УНИЧТОЖЕНИЯ/ ДАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Введенные выше определения позволяют без труда угадать в операторе b_1 повышающий оператор:

$$b^+ := b_1, \quad b^+\Phi_n = (n+1)^{1/M}\Phi_{n+1},$$

а в $b^- := b_2 b_3 \ldots b_M$ - оператор, понижающий заданное состояние на единицу:

$$b^-\Phi_n = (n)^{(M-1)/M}\Phi_{n-1}.$$

Операторы b^+ и b^- действительно имеют свойства операторов "рождения и уничтожения": $\hat{N} = b^+ b^-$ - есть оператор числа частиц, коммутатор $\{b^+, b^-\}$ равен единице и

$$\{H(M), b^+\} = b^+, \quad \{H(M), b^-\} = -b^-.$$

Аналогия между b^+, b^- и a^+, a^- приводит к мысли о существовании "x"-представления для операторов b^+, b^-. Рассмотрим действие операторов b^+ и b^- на состояние Φ_n, описываемое целочисленным квантовым числом n. Определим функцию n-го состояния так:

$$\Psi_n(x) := (2^n n!)^{-1/M}\exp(-x^2/2)\mathcal{H}_n(x), \qquad /4/$$

где $\mathcal{H}_n(x)$ - полином Эрмита, который удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mathcal{H}_{n+1} - 2x\mathcal{H}_n + 2n\mathcal{H}_{n-1} = 0, \quad \frac{d}{dx}\mathcal{H}_n = 2n\mathcal{H}_{n-1}. \qquad /5/$$

Из /4/ и /5/ находим рекуррентные соотношения для $\Psi_n(x)$. Имеем

$$(2n+2)^{1/M}\Psi_{n+1} - 2x\Psi_n + (2n)^{(M-1)/M}\Psi_{n-1} = 0, \qquad /6/$$

$$\frac{d}{dx}\Psi_n = x\Psi_n + (2n)^{(1-M)/M}\Psi_{n-1}. \qquad /7/$$

Объединяя /6/ и /7/, получаем,

$$2^{(1-M)/M}(x + \frac{\partial}{\partial x})\Psi_n = (n)^{(1-M)/M}\Psi_{n-1}.$$

$$2^{-1/M}(x - \frac{\partial}{\partial x})\Psi_n = (n+1)^{1/M}\Psi_{n+1}.$$

Таким образом, если n-е состояние действительно определяется функцией /4/, то

$$b^+ = 2^{-1/M}(x - \frac{\partial}{\partial x}),$$

$$b^- = 2^{(1-M)/M}(x + \frac{\partial}{\partial x}). \qquad /8/$$

Прежде чем принять выражения /8/, нам предстоит доказать, что состояние, описываемое функцией /4/, действительно является собственной функцией оператора $H(M)$.

ФУНКЦИИ ЭРМИТА ДЛЯ НЕЦЕЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ $n(q)$

Полиномы Эрмита для целых n определяются выражением

$$\mathcal{H}_n(x) = (-1)^n\exp(-x^2)\eta_n,$$

где

$$\eta_n = \frac{d^n}{dx^n}\exp(-x^2)$$

является решением уравнения

$$z'' + 2xz' + (2n+2)z = 0. \qquad /9/$$

Существует удобная форма выражения решения /9/ при нецелых n с использованием операции дробного дифференцирования. Действие операции дробного дифференцирования порядка q на функцию $f(x)$ будем обозначать так:

$$(\mathfrak{D}^q f)(x).$$

Согласно[12], имеем следующее представление решения уравнения /9/ при произвольном значении $n = q$ /в том числе и для комплексного q, $\mathrm{Re}\,q > 0$/

$$z_q(x) = (\mathfrak{D}^q \exp)(-x^2).$$

Теперь можно определить функцию Эрмита индекса q

$$\mathcal{H}_q(x) := \exp(i\pi q)\exp(-x^2)\, z_q(x),$$

которая переходит в обычный полином Эрмита при натуральных значениях q. Для функции Эрмита $\mathcal{H}_q(x)$ справедливо одно важное соотношение, обобщающее формулу /5/ для полинома Эрмита /см. Приложение/:

$$(\mathfrak{D}^q \mathcal{H}_p)(x) = \frac{2^q\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)}\,\mathcal{H}_{p-q}(x). \qquad /10/$$

Коль скоро введена функция Эрмита индекса p, определим через нее функцию состояния для нецелых квантовых чисел:

$$\Psi_p(x) := [\,2^p\,\Gamma(p+1)\,]^{-1/M}\,\mathcal{H}_p(x)\exp(-x^2/2). \qquad /11/$$

Действие операторов порождения $b_1, b_2, \ldots, b_M$ на функцию $\Psi_p(x)$ определим формально, по той же формуле, что и в /1/:

$$b_k \Psi_p = \Big(p + \sum_{\ell=1}^{k} \theta_\ell\Big)^{1/M} \Psi_{p+\theta_k}. \qquad /12/$$

В этом случае нетрудно убедиться, что Ψ_n /n - целое/ действительно является собственной функцией оператора $H(M)$. Это означает, что "x" - представление для операторов b^+, b^- из /8/ имеет силу. Однако было бы весьма интересно попытаться найти "x"-представление и для операторов b_k /$k = 1,2,\ldots,M$/.

Определим оператор

$$L_q := 2^{q(1-M)/M}\exp(-x^2/2)\,(\mathfrak{D}^q \exp)(x^2/2)$$

и рассмотрим его действие на функцию Ψ_p. Используя формулы /11/ и /10/, получим

$$L_q \Psi_p = \Big(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)}\Big)^{\frac{M-1}{M}} \Psi_{p-q}. \qquad /13/$$

Формула /24/ верна и для комплексных значений p и q. Как видно, оператор $L_{-\theta_k}$ отличается от b_k лишь коэффициентом перед функцией $\Psi_{n+\theta_k}$. Однако важно, что конечный результат действия операторов $L_{-\theta_k}$, а именно - спектры операторов $\hat N(M)$ и $H(M)$ - один и тот же. Таким образом, определить "x"-реализацию формулы /12/ не удается, вместо нее мы имеем формулу /13/. Формула /13/ позволяет определить оператор Гамильтона полилинейного осциллятора независимо от чисел циклического базиса θ_k.

Рассмотрим произвольные вещественные числа $q_1, q_2, \ldots, q_M$, удовлетворяющие двум условиям: 1/ $q_1 = 1$; 2/ $\sum_{m=1}^{M} q_m = 0$. Введем операторы $b^+ = L_1$ и $b_k := L_{+q_k}$, $k = 2,3\ldots M$. В этом случае вместо формул /2/, /3/ получим следующий спектр операторов $\hat N(M)$ и $H(M)$:

$$\hat N(M)\,\Phi_n = n\,\Phi_n,$$

$$H(M)\,\Phi_n = [\,n + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M-1}(M-m)\,q_m]\,\Phi_n.$$

В принципе можно задать еще более общее представление для операторов $b_1, b_2, \ldots, b_M$, а именно, вместо условий 1/ и 2/ ограничиться только условием 2/. Это возможно, если определить оператор типа "рождения" на нецелое квантовое число. В качестве такого оператора можно выбрать выражение

$$K(q) := 2^{-q/M}\exp(x^2/2)\,(\mathfrak{D}^q \exp)(-x^2/2),$$

являющееся обобщением оператора b^+ из /8/ на случай нецелых q, причем, при $q = 1$, $b^+ = K(1)$.

Действие оператора $K(q)$ на заданное состояние Ψ_p выражается формулой

$$K(q)\,\Psi_p = \Big(\frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)}\Big)^{1/M} \Psi_{p+q}.$$

В этом случае не удается написать общий вид спектра оператора $H(M)$, однако в каждом конкретном случае нетрудно найти вид этой функции. В качестве примера рассмотрим трилинейный осциллятор, квантовые числа операторов порождения которого имеют значения:

$q_1 = 2/3$, $q_2 = -1/3$, $q_3 = -1/3$.

Оператор Гамильтона

$$H(3) := \frac{1}{3}[\, b_1(\tfrac{2}{3}),\ b_2(-\tfrac{1}{3}),\ b_3(-\tfrac{1}{3})],$$

будет иметь следующий спектр:

$$H(3)\,\Phi_p = \left[\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{3})} + \frac{\Gamma(p+\frac{5}{3})}{\Gamma(p+1)} + \frac{\Gamma(p+\frac{4}{3})}{\Gamma(p+\frac{2}{3})}\right]\Phi_p .$$

Заметим, что принятие в качестве оператора рождения b^+ оператора $K(q)$ /q - нецелое/ приводит к тому, что $H(M)$ будет иметь непрерывный спектр.

В заключение автор выражает искреннюю признательность проф.В.Г.Маханькову за ряд ценных указаний, а также Н.В.Махалдиани, оказавшему неоценимую помощь в подборе литературы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция Эрмита индекса p определяется как решение уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{H}_p - 2x\frac{d}{dx}\mathcal{H}_p + 2p\,\mathcal{H}_p = 0. \qquad /п.1/$$

Подействуем на /п.1/ оператором дробного дифференцирования[12]:

$$\mathfrak{D}^{q+1}(xz) = x\,\mathfrak{D}^{q+1}z + (p+1)\,\mathfrak{D}^{q}z,$$

Получим

$$\frac{d^2}{dx^2}R_{pq} - 2x\frac{d}{dx}R_{pq} + 2(p-q-1)R_{pq} = 0, \qquad /п.2/$$

где

$$R_{pq} = \mathfrak{D}^{q+1}\mathcal{H}_p .$$

С другой стороны, функция $\mathcal{H}_{p-q-1}$ также является решением /п.2/. Следовательно,

$$\mathfrak{D}^{q+1}\mathcal{H}_p = A(p,q)\,\mathcal{H}_{p-q-1}, \qquad /п.3/$$

$A(p,q)$ - постоянная, подлежащая определению. Соотношение /п.3/ указывает на способ получения явной формулы для функции Эрмита для нецелых значений индекса. При $p = n$ /n - натуральное число/ функцию $\mathcal{H}_n(x)$ можно записать в виде следующего конечного ряда[13]:

$$\mathcal{H}_n(x) \quad (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n+1)(n-2)(n-3)}{3}2x^{n-4} + \dots \qquad /п.4/$$

Под действием оператора $\mathfrak{D}^{q+1}$ полином Эрмита $\mathcal{H}_n(x)$ переходит в функцию Эрмита $\mathcal{H}_{n-q-1}(x)$ нецелого индекса. Перепишем ряд /п.4/ в виде, который формально может быть обобщен и на случай нецелых показателей:

$$\mathcal{H}_n(x) = (2x)^n + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-2k+1)}(2x)^{n-2k}. \qquad /п.5/$$

Действуя оператором $\mathfrak{D}^q$ на ряд /п.5/, получим

$$\mathfrak{D}^q\mathcal{H}_n(x) = \frac{2^q\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-q+1)}\mathcal{H}_{n-q}. \qquad /п.6/$$

Очевидно, формулы /п.5/-/п.6/ имеют тот же вид и для нецелых значений индекса. Отсюда следует, что явный вид $A(p,q)$ определяется выражением

$$A(p,q) = \frac{2^q\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
2. Fock V.A. - Zs.Phys., 1932, v.75, p.622.

3. Игнатьев А.Ю., Кузьмин В.А. - ЯФ, 1987, вып.3/9/, т.46.
4. Greenberg O.W., Mohaparta R.N. - Commun. of the College Park, 5989/87.
5. Ямалеев Р.М. Сообщение ОИЯИ, Р2-88-147, Дубна, 1988.
6. Goldstone J., Wilczek F. - Phys. Rev. Lett., 1981, v.47, p.986.
7. Jackiw R. - Phys.Rev., 1984, v.D29, p.2375.
8. Ситенко Ю.А. - ЯФ, 1988, т.47, вып.1.
9. Rubakov V.D. - Nucl.Phys., 1982, v.B203, p.311.
10. Индурайн Ф. Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
11. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
12. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
13. Фок В.А. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 декабря 1988 года.

Ямалеев Р.М. Р2-88-871

Модель полилинейного осциллятора
в пространстве нецелых квантовых чисел

Предложена модель полилинейного осциллятора, операторы порождения которого действуют в пространстве дробных квантовых чисел. Определены правила действия и "x"-представление для порождающих операторов, собственные функции состояния для операторов числа частиц и энергии. Модель может быть использована при исследовании физических систем с дробными квантовыми числами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Yamaleev R.M. P2-88-871

Model of Polylinear Oscillator in
the Space of Non-Whole Quantum Numbers

Model of polylinear oscillator generating operators of which work in space of non-whole quantum numbers is proposed. Rules of operation and "x"-representations for generating operators, state eigenfunctions for operators of particle number and energy are defined. The model may be useful for investigation of physical systems with non-whole quantum numbers.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988