объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-863

Р.М.Кашаев, А.А.Осипов

РАСШИРЕНИЕ АЛГЕБРЫ КРИЧЕВЕРА – НОВИКОВА В ТЕОРИИ ЗАМКНУТОЙ СТРУНЫ

Направлено в Оргкомитет 6-го Всесоюзного коллоквиума "Современная теория групп: методы и приложения", Баку, сентябрь, 1988 г.

1988

Общий подход к квантованию динамических систем, функционал действия которых инвариантен относительно преобразований локальной группы, был сформулирован в работах Дирака[1]. Наиболее элегантную форму метод приобрел в статьях Баталина, Фрадкина и Вилковыского[2]. К числу существенных наблюдений, сделанных этими авторами, следует отнести два момента: расширение фазового пространства за счет антикоммутирующих динамических переменных и введение BRST-инвариантного гамильтониана на нём[3]. Таким образом, была обнаружена тесная связь между задачей исключения нефизических степеней свободы и симметрией квантовой системы.

В теории свободной струны симметрия BRST-гамильтониана шире. Это группа глобальных $OSp(1,1|2)$ преобразований[4]. Её существование можно связать с наличием расширенной алгебры, которую образуют связи Φ_i и дополнительные условия Ψ^j [5,6],

$$\{\Phi_i,\ \Phi_j\} = \sum_k U^k_{ij}\ \Phi_k \quad , \tag{1}$$

$$\{\Phi_i,\ \Psi^j\} = B^j_i - \sum_k T^j_{ik}\ \Psi^k \quad , \tag{2}$$

$$\{\Psi^i,\ \Psi^j\} = 0. \tag{3}$$

Фигурные скобки обозначают классические скобки Пуассона, а константы B^j_i и T^k_{ij} удовлетворяют известным соотношениям, вытекающим из тождеств Якоби. Если алгебра связей (1) является классической алгеброй Вирасоро, то $B^j_i = \delta^j_i$.

Изучение вопросов, связанных с взаимодействием замкнутых струн, а также исследования в области двумерных конформных теорий поля приводят к задачам, формулируемым на римановых поверхностях произвольного рода g. В работах [7,8] Кричевер и Новиков на этих поверхностях ввели базис в пространстве векторных полей, голоморфных вне двух отмеченных точек $P_{\pm}$, и изучили возникающие здесь тензорные объекты. Базисные векторные поля e_i образуют относительно скобки Ли алгебру Кричевера-Новикова (алгебра КН), которая совпадает с классической алгеброй Вирасоро при $g = 0$.

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{ij}^{s} e_{i+j-s} . \qquad (4)$$

Индекс i принимает целые значения для четных g и полуцелые для нечетных, а $g_0=\frac{3}{2}g$.

Алгебра (4) интересна с точки зрения физических приложений. Её реализация в терминах операторов типа Вирасоро, полученная в работе [8], является алгеброй связей для замкнутой взаимодействующей струны. В этом случае возникает вопрос о возможности её расширения до алгебры вида (1)-(3). Чтобы ответить на него, естественно сначала выяснить, существует ли соответствующая геометрическая конструкция на данной римановой поверхности, а затем попытаться реализовать её с помощью динамических переменных замкнутой струны. Всё это и составляет содержание настоящей работы

Кратко напомним основные объекты, возникающие на римановой поверхности Σ рода g , которые нам потребуются в дальнейшем [7]. Тензорные поля $f_j^{(\lambda)}$ параметризуются целыми числами λ (конформный вес). Они голоморфны на Σ за исключением, быть может, полюсов в $P_{\pm}$. В окрестностях этих точек формы $f_j^{(\lambda)}$ имеют следующее поведение

$$f_j^{(\lambda)} = a_j^{(\lambda)\pm} (z_{\pm})^{\pm j-S(\lambda)} [1+O(z_{\pm})](dz_{\pm})^{\lambda}, \qquad (5)$$

где $S(\lambda)=\frac{g}{2}-\lambda(g-1)$. Для $\lambda=0,1$ и $|j|\le\frac{g}{2}$ определение $f_j^{(\lambda)}$ модифицируется [7,8]. Формула (5) в силу теоремы Римана-Роха однозначно, с точностью до множителя, определяет формы $f_j^{(\lambda)}$ на

всей поверхности Σ. Числовые множители зафиксируем, положив $a_j^{(\lambda)+}=1$. Используем также удобные обозначения:

$$e_j=f_j^{(-1)}, \qquad A_j=f_j^{(0)}, \qquad \omega^j=f_{-j}^{(1)}, \qquad \Omega^j=f_{-j}^{(2)}. \qquad (6)$$

Выполняются следующие соотношения дуальности:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f_i^{(\lambda)} f_{-j}^{(1-\lambda)} = \delta_{ij} \qquad (7)$$

при всех значениях i и j. Здесь и далее, где мы не будем этого явно указывать, интегрирование осуществляется по любому несамопересекающемуся контуру, который разделяет Σ на две части $\Sigma^{\pm}$ так, что $P_{\pm}\subset\Sigma^{\pm}$. Поскольку все такие контуры гомологичны, а подынтегральные функции голоморфны вне $P_{\pm}$, то интеграл не зависит от выбора контура.

На тензорных полях $f_j^{(\lambda)}$ реализуются представления алгебры КН

$$\mathcal{L}_{e_i} f_j^{(\lambda)} = e_i \nabla f_j^{(\lambda)} + \lambda f_j^{(\lambda)} \nabla e_i = \sum_k R_{ijk}^{(\lambda)} f_k^{(\lambda)} . \qquad (8)$$

Структурные константы $R_{ijk}^{(\lambda)}$ равны

$$R_{ijk}^{(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i} \oint f_{-k}^{(1-\lambda)} [e_i \nabla f_j^{(\lambda)} + \lambda f_j^{(\lambda)} \nabla e_i] = -R_{i,-k,-j}^{(1-\lambda)} . \qquad (9)$$

Ковариантный голоморфный дифференциал ∇ в локальной системе координат имеет вид $\nabla=dz\otimes\nabla_{\partial/\partial z}$, а его действие на базис $(dz)^{\lambda}$ определяется из формулы

$$\nabla_{\partial/\partial z} (dz)^{\lambda} = - \lambda \Gamma(z)(dz)^{\lambda} . \qquad (10)$$

На пересечении карт $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ связность $\Gamma(z)$ преобразуется обычным образом, т.е. если $z_{\beta} = f(z_{\alpha})$, то $\Gamma_{\beta}(z_{\beta})f' = \Gamma_{\alpha}(z_{\alpha}) - f''/f'$, где $f'=\partial z_{\beta}/\partial z_{\alpha}$. Выражение (9) не зависит от связности.

Предположим, что алгебре (1)-(3) соответствует одна из следующих бесконечномерных алгебр, характеризуемых индексом λ:

$$[L_i,\ L_j] = \sum_k R^{(-1)}_{ijk} L_k,$$
$$[L_i,\ N_j^{(\lambda)}] = \sum_k R^{(1-\lambda)}_{ijk} N_k^{(\lambda)} + \xi^{(\lambda)}_{ij}, \qquad (11)$$
$$[N_i^{(\lambda)},\ N_j^{(\lambda)}] = 0\ .$$

Здесь $R^{(-1)}_{ijk}=C^{i+j-k}_{ij}$ (см. формулу (4)), а скобки обозначают абстрактные коммутаторы.

Чтобы найти возможные центральные расширения $\xi^{(\lambda)}_{ij}$ алгебры (11), сделаем дополнительные преобразования. Для этого, следуя работе /7/, рассмотрим систему контуров C_τ на поверхности Σ, определяемых как линии уровня функции $\mathrm{Re}\ p(Q)$, где $p(Q)=\int_{Q_0}^{Q}\omega$, Q_0– произвольная начальная точка, а ω –единственный мероморфный дифференциал третьего рода, который в точках $P_\pm$ имеет простые полюса с вычетами ±1 и чисто мнимые периоды по всем циклам.

На контуре C_τ введём следующие дельта-функции

$$\Delta_\tau^{(\lambda)}(Q,Q') = \sum_i f_i^{(\lambda)}(Q)\, f_{-i}^{(1-\lambda)}(Q') = \Delta_\tau^{(1-\lambda)}(Q',Q) \qquad (12)$$

и тензорные поля

$$T(Q) = \sum_k L_k\, \Omega^k(Q), \qquad (13)$$
$$N^{(\lambda)}(Q) = \sum_i N_i^{(\lambda)} f_{-i}^{(\lambda)}(Q), \qquad (14)$$

тогда (11) переходит в алгебру

$$[T(Q),T(Q')] = \nabla T(Q)\Delta(Q,Q') + 2T(Q)\nabla\Delta(Q,Q'),$$
$$[N^{(\lambda)}(Q),T(Q')] = \nabla N^{(\lambda)}(Q)\Delta(Q,Q') + \lambda N^{(\lambda)}(Q)\nabla\Delta(Q,Q') - \xi^{(\lambda)}(Q,Q'),$$
$$[N^{(\lambda)}(Q),N^{(\lambda)}(Q')] = 0, \qquad (15)$$

где $Q,Q'\in C_\tau$, а $\Delta(Q,Q')\equiv\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')$.

Функции $\xi^{(\lambda)}(Q,Q')$ будем искать в виде ряда

$$\xi^{(\lambda)}(Q,Q') = \sum_{n\geq0}\xi_n^{(\lambda)}(Q)\ \nabla^n\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q'), \qquad (16)$$

ТЕОРЕМА. Нетривиальные центральные расширения алгебры (15) существуют только для тензорных полей $N^{(\lambda)}(Q)$ при $\lambda=0,1,2$ и имеют вид

а. $\xi^{(0)}(Q,Q') = \sigma(Q)\Delta(Q,Q') + c_1\nabla\Delta(Q,Q')$,

б. $\xi^{(1)}(Q,Q') = c_2\nabla^2\Delta(Q,Q')$,

в. $\xi^{(2)}(Q,Q') = c_3\nabla^3\Delta(Q,Q')$,

где $c_1,c_2,c_3=\mathrm{const.}$, а $\sigma(Q)$-неточная на C_τ форма.

Чтобы доказать теорему, воспользуемся тождеством Якоби для форм $N^{(\lambda)}(Q)$, $T(Q')$, $T(Q'')$, из которого получим уравнение

$$\Delta(Q,Q')\nabla\xi^{(\lambda)}(Q,Q'') + \lambda\xi^{(\lambda)}(Q,Q'')\nabla\Delta(Q,Q') - (Q'\Leftrightarrow Q'') =$$
$$= \xi^{(\lambda)}(Q,Q')\nabla'\Delta(Q',Q'') - (Q'\Leftrightarrow Q'').$$

Подставим сюда выражение (16) и сгруппируем члены при одинаковых степенях $\nabla^n\Delta(Q,Q'')$.

$$\Delta(Q,Q'')\big([\lambda\xi_0^{(\lambda)}(Q)-\nabla\xi_1^{(\lambda)}(Q)]\nabla\Delta(Q,Q') - \sum_{n\geq2}\nabla\xi_n^{(\lambda)}(Q)\nabla^n\Delta(Q,Q')\big) -$$
$$-\nabla\Delta(Q,Q'')\big([\lambda\xi_0^{(\lambda)}(Q)-\nabla\xi_1^{(\lambda)}(Q)]\Delta(Q,Q') + \sum_{n\geq2}\xi_n^{(\lambda)}(Q)(\lambda+1-n)\nabla^n\Delta(Q,Q')\big) +$$
$$+\sum_{n\geq2}\nabla^n\Delta(Q,Q'')\big(\Delta(Q,Q')\nabla\xi_n^{(\lambda)}(Q) + (\lambda+1-n)\xi_n^{(\lambda)}(Q)\nabla\Delta(Q,Q') +$$
$$+\sum_{m\geq n+1}\xi_m^{(\lambda)}(Q)\,(C_m^{n-1} - C_m^{n})\nabla^{m-n+1}\Delta(Q,Q')\big) = 0. \qquad (17)$$

Символом C_m^n обозначены биномиальные коэффициенты. Уравнение (17) ведёт к следующим ограничениям на функции $\xi_m^{(\lambda)}(Q)$:

$$\lambda\xi_0^{(\lambda)}(Q) = \nabla\xi_1^{(\lambda)}(Q),$$
$$\nabla\xi_n^{(\lambda)}(Q) = 0,\quad \xi_n^{(\lambda)}(Q)(\lambda+1-n) = 0,\quad n\geq2. \qquad (18)$$
$$\xi_n^{(\lambda)}(Q) = 0,\quad n\geq4.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Среди полученных здесь алгебр имеется такая, которую можно рассматривать как расширенную алгебру связей и дополнительных условий для взаимодействующей струны. Действительно, положим в формуле (15) $\lambda=0$ и выберем $\xi^{(0)}(Q,Q')=\sigma(Q)\Delta(Q,Q')$. Тогда, используя соотношения дуальности (7), придём к следующей алгебре:

$$
\begin{aligned}
&[L_i,\ L_j] = \sum_k R^{(-1)}_{ijk}\, L_k\,,\\
&[L_i,\ \Psi^j] = -\sum_m R^{(0)}_{imj}\, \Psi^m + \xi^{(0)}_{i,-j}\,, \qquad (19)\\
&[\Psi^i,\ \Psi^j] = 0\,,
\end{aligned}
$$

где

$$\Psi^i = N^{(0)}_{-i}\,, \qquad \xi^{(0)}_{i,-j} = \frac{1}{2\pi i}\oint \omega^j\, e_i\, \sigma.$$

Если в качестве σ взять дифференциал третьего рода ω, то центральный элемент $\xi^{(0)}_{ij}$ будет удовлетворять условию локальности: $\xi^{(0)}_{i,-j} = 0$ при $|i-j|>g$. В частном случае $g=0$ он перейдёт в дельта-символ Кронекера $\xi^{(0)}_{i,-j}\big|_{g=0,\sigma=\omega} = \delta^j_i$, а вся алгебра (19) совпадёт с известной расширенной алгеброй связей и дополнительных условий в теории свободной бозонной струны./5,6/

Перейдём к реализации алгебры (19) в терминах динамических переменных замкнутой струны. Для этого отметим, что системы базисных функций $\{f^{(\lambda)}_j\}$ при каждом значении λ полны на контуре C_τ, поэтому динамические переменные струны можно разложить по ним.

$$X_\mu(Q) = X^n_\mu\, A_n(Q), \qquad P_\mu(Q) = P_{\mu n}\,\omega^n(Q). \qquad (20)$$

Коэффициенты разложения имеют следующие скобки Пуассона

$$[X^n_\mu, X^m_\nu] = 0, \qquad [X^n_\mu, P_{\nu m}] = \eta_{\mu\nu}\delta^n_m \qquad [P^\mu_n, P^\nu_m] = 0 \qquad (21)$$

Вид операторов L_k был получен в работе/8/:

$$L_k = 1/2\ \zeta^{mn}_k\, \alpha^\mu_m\, \alpha^\mu_n, \quad \text{а} \quad \zeta^{mn}_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\tau} \omega^m\, \omega^n\, e_k. \qquad (22)$$

В отличие от переменных X^n_μ и P^μ_m, которые зависят от собственного времени τ, коэффициенты $\sqrt{2}\alpha^\mu_n = (P_{\mu n} + i\gamma_{nm}X^m_\mu)$, не чувствительны к выбору контура C_τ. В этом можно убедиться, если воспользоваться теоремой Стокса. Константы γ_{nm} равны

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\tau} A_n\, dA_m\,. \qquad (23)$$

Чтобы решить второе из уравнений (19) относительно Ψ^n, удобно его представить в виде

$$[\Psi(Q), T(Q')] = [d\Psi(Q) - \sigma(Q)]\,\Delta(Q,Q'), \qquad (24)$$

где $\Psi(Q) = \Psi^n A_n(Q)$. Решением уравнения (24) является функция

$$\Psi(Q) = X(Q_0) + \int_{Q_0}^{Q} (\pi + \sigma), \qquad Q, Q_0 \in C_\tau\,. \qquad (25)$$

Здесь $X(Q_0) \equiv X_\mu(Q_0)k^\mu$ – константа интегрирования, k_μ–постоянный лоренцевский вектор, а форма $\pi(Q) \equiv k_\mu \pi_\mu(Q)$, $\pi_\mu(Q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \alpha_{\mu n}\omega^n(Q)$. Дифференциал $\sigma(Q)$ определяется условием совместности

$$\oint_{C^i_\tau} [\pi(Q) + \sigma(Q)] = 0, \qquad (26)$$

где C^i_τ – связные компоненты контура C_τ. Светоподобный вектор k_μ нарушает явную лоренц-инвариантность теории, поэтому он является чисто вспомогательной величиной ($k^2=0$ гарантирует выполнение последнего уравнения в (19)) . Процедура его исключения подробно обсуждалась в литературе/9,10/.

Общее решение уравнения (24) представляет собой сумму его частного решения и решения однородного уравнения. Константа $X(Q_0)$ в (25), кроме α^μ_n, очевидно, зависит и от $\bar{\alpha}^\mu_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (P_{\mu n} - i\gamma_{nm}X^m_\mu)$. Последний оператор коммутирует с α^μ_n, а значит и с $T(Q)$. Чтобы исключить эту зависимость, необходимо разбить X^n_μ на сумму $X^n_\mu = x^n_\mu(\alpha) + \bar{x}^n_\mu(\bar{\alpha})$ и отбросить второе слагаемое. В общем виде это сделать трудно, поскольку мы не знаем матрицы, обратной к γ_{nm}. Однако в каждом конкретном случае, т.е когда фиксирован род поверхности Σ и явно известны матричные элементы γ_{nm}, данная процедура осуществима.

В заключение отметим, что все **наши результаты** аналогичным образом распространяются на сопряжённый сектор замкнутой струны. Мы надеемся, что полученные расширения алгебры КН окажутся полезными при расчётах g-петлевых диаграмм в теориях струн, а также при использовании операторного метода в задачах конформной теории поля, формулируемых на римановых поверхностях рода g.

Литература.

1. Dirac P.A.M., -Can.J.Math., 1950, 2, p.129; -Proc.Roy.Soc., 1958, A246, p.326.
2. Fradkin E.S., Vilkovisky G.A., -Phys.Lett., 1975, B55, p.224; Batalin I.A., Vilkovisky G.A., -Phys.Lett., 1977, 69, p.309; Fradkin E.S., Fradkina T.E., -Phys.Lett., 1978, B79, p.343.
3. Henneaux M., -Phys.Rep., 1985, 126, p.1.
4. Siegel W., Zwiebach B., -Nucl.Phys., 1987, B288, p.332.
5. Aratyn H., Ingermanson R., Niemi A.J., -Preprint DOE/ER/01545-391, 1987; -Phys.Lett., 1987, B194, p.506.
6. Aratyn H., Ingermanson R., Niemi A.J., -Nucl.Phys., 1988, B299, p.507.
7. Кричевер И.М., Новиков С.П., -Функцион.анализ и его прил., 1987, 21, вып.2, с.46.
8. Кричевер И.М., Новиков С.П., -Функцион.анализ и его прил., 1987, 21, вып.4, с.47.
9. Brink L., Henneaux M., Teitelboim C., -Nucl.Phys., 1987, B293, p.505.
10. Aratyn H., Ingermanson R., -Preprint DOE/ER/01545-399, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1988 года.

Кашаев Р.М., Осипов А.А.

Р2-88-863

Расширение алгебры Кричевера – Новикова
в теории замкнутой струны

Обсуждаются возможные специальные расширения алгебры Кричевера – Новикова. Среди них имеется такое, которое можно трактовать как замкнутую алгебру связей и дополнительных условий в теории бозонной струны с мировой поверхностью фиксированной топологии. Получена реализация данной алгебры в терминах струнных переменных. Отсюда делается вывод о том, что симметрия изучаемой квантовой системы шире, чем обычная BRST-инвариантность. Это группа глобальной симметрии OSP(1.1|2).

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод М.И.Потапова

Kashaev R.M., Osipov A.A.

P2-88-863

Extension of the Krichever – Novikov
Algebra in the Closed String Theory

Possible special extensions of the Krichever – Novikov algebra are discussed. Among them there is an extension which can be interpreted as the closed algebra of constraints and additional conditions in the theory of the boson string with the fixed topology world sheet. Realization of the given algebra is obtained in terms of string variables. The conclusion is drawn that the symmetry of the quantum system studied is wider than the usual BRST-invariance. This is the group of the global symmetry OSP(1.1|2).

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988